

Lezioni di Campi Elettromagnetici II¹

Fabrizio Frezza²

23 luglio 2013



© IEEE Student Branch — Roma “La Sapienza”

¹ Versione L^AT_EX a cura di [Alessandro Ciorba](#), IEEE Member, già Student Member dello Student Branch dell'Università degli Studi di Roma “La Sapienza”.

²Università degli Studi di Roma “La Sapienza”, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Elettrotecnica e Telecomunicazioni, via Eudossiana 18, 00184 Roma, E-mail: fabrizio.frezza@uniroma1.it, URL del testo:

http://151.100.120.244/personale/frezza/disp_cem_II/Lezioni/LezioniCEmII,LaTeX.pdf

Alla memoria dell'Amico e Collega
Ferdinando Alessandri
(26 giugno 1959 – 5 aprile 2005)

Si ringraziano anticipatamente coloro che vorranno segnalare eventuali imperfezioni o errori riscontrati nel presente testo all'autore (fabrizio.frezza@uniroma1.it) o al curatore (alessandro.ciorba@uniroma1.it).

Nessuna parte del presente testo può essere riprodotta per scopi di lucro senza la previa autorizzazione scritta di Fabrizio Frezza.

No portion of this text may be reproduced for profit without the express prior written consent of Fabrizio Frezza.

Prefazione

Il presente testo raccoglie il materiale delle lezioni da me tenute per il corso di Campi Elettromagnetici II, a partire dall'anno accademico 1990–91, prima come collaboratore del Prof. Paolo Lampariello, poi dal 1994–95 come docente.

Nelle Università italiane i corsi denominati “Campi Elettromagnetici II” sono spesso di natura molto diversa fra loro. Nel caso della “Sapienza” un tale corso viene in genere (fortunatamente) proposto a studenti (attualmente dei corsi di Laurea di secondo livello) che hanno già un bagaglio piuttosto completo di conoscenze di Elettromagnetismo, fornite ad esempio da corsi di Campi Elettromagnetici I, Antenne e Microonde. Si tratta prevalentemente di studenti di Ingegneria Elettronica, ma anche di Ingegneria delle Telecomunicazioni e di Scienze per l’Ingegneria. Quanto detto ha consentito fin dall’inizio da un lato una maggiore libertà del docente nella scelta del materiale, rendendo anche possibile che una piccola parte del corso avesse carattere monografico, il che avviene piuttosto di rado nelle Facoltà scientifiche; dall’altro lato la possibilità di maggiori approfondimenti. Di fatto, buona parte degli argomenti trattati è costituita da quelli su cui ho studiato e lavorato negli ultimi venti anni. È dunque a volte più un percorso personale che non una logica concatenazione a legare i vari Capitoli fra loro, e se questo è un limite del testo, penso possa contribuire a renderlo più vivo, per la benefica interazione mutua fra studio, ricerca e didattica. Ritengo comunque che molti degli argomenti proposti appartengano al bagaglio delle conoscenze fondamentali per uno studente di Elettromagnetismo.

Quando il Dipartimento di Ingegneria Elettronica si è dotato di un sito internet, mi è sembrato molto opportuno che il testo vi fosse subito completamente inserito, e successivamente trascritto in formato più “libresco”, grazie al mio ex-studente, ora Dottore di Ricerca in Elettromagnetismo, ing. Alessandro Ciorba e a Maurizio Fascetti. Il motivo principale di questa scelta, al di là delle pur degne ragioni di convenienza e comodità per gli studenti, risiede nella possibilità, mentre si usa il testo, di implementare correzioni, aggiunte, cambiamenti praticamente in tempo reale. In effetti si è trattato di un libro “in itinere”, una sorta di “diario di bordo”: le “edizioni” successive sono state numerose (di solito almeno una ogni anno), e ringrazio per il loro “feedback” tutti gli Studenti e Colleghi che mi hanno segnalato errori veniali o gravi, manchevolezze, possibili miglioramenti. Nel corso degli anni, anche per serbare il materiale accumulato, sono state incorporate nel testo molte delle osservazioni proposte durante le lezioni: questo permette al docente (e anzi in qualche modo lo obbliga, pena il decadere dell’interesse per le lezioni dal vivo) di rinnovarle anno dopo anno in conseguenza dell’aggiornamento, approfondimento e ripensamento della

materia stessa.

Nella versione attuale, datata 23 luglio 2013, il testo appare diviso in tre Parti. La prima, intitolata Lezioni del corso, comprende materiale che almeno una volta è stato da me svolto durante il corso, il programma del quale, come si è detto, presenta spesso alcuni cambiamenti e avvicendamenti di anno in anno. Gli argomenti principali riguardano le guide planari, che costituiscono il supporto dei componenti e circuiti a microonde e ottici: l'applicazione delle tecniche spettrali e l'uso delle linee di trasmissione equivalenti trasverse consente di trattare strutture stampate stratificate molto generali; le antenne ad apertura e le tecniche asintotiche; lo scattering bidimensionale; le rappresentazioni integrali del campo, impiegate nello studio delle guide dielettriche di forma arbitraria e nello scattering tridimensionale; alcuni concetti di analisi funzionale di interesse in Elettromagnetismo.

La seconda Parte, intitolata Complementi, per la quale sono debitore al Dottore di Ricerca in Elettromagnetismo applicato ing. Carlo Di Nallo, riguarda contenuti più avanzati “fuori programma”, oggetto negli anni di studi accurati per lo svolgimento della tesi di Laurea o di Dottorato da parte di alcuni collaboratori del Prof. Lampariello e miei. Ritengo che nella sua forma attuale tale materiale sia di interesse per lo studioso che voglia approfondire concetti e sviluppi che nel corso sono necessariamente solo introdotti o accennati, ed è mia personale soddisfazione l'aver riscontrato la possibilità di assimilazione di questi argomenti da parte di molti studenti.

Finalmente, la terza Parte, intitolata Richiami di Campi Elettromagnetici I, comprende argomenti da me svolti e trascritti in forma cartacea, a partire dall'anno accademico 1988–89, come “esercitatore” del corso di Campi Elettromagnetici I. Dopo l'uscita nel 1995 del libro “Lezioni di Campi Elettromagnetici” dei Proff. Giorgio Gerosa e Paolo Lampariello (seconda Edizione nel 2006), il contenuto è stato depurato di ciò che risultava trattato in tale testo. Nella sua forma attuale ancorché frammentata può costituire un'utile propedeutica a certi aspetti del corso.

Chiude il testo un'ampia sezione bibliografica (Parte IV), cartacea o virtuale, il più possibile commentata, che va ben oltre i confini scientifici e culturali del corso. Presenta infine, particolarmente nell'Epilogo, alcune piccole perle di saggezza, principalmente sul tema dello Studio.

Il taglio espositivo della trattazione ha sempre mirato alla completezza, cercando di non omettere mai i dettagli chiarificatori e di giustificare il più possibile le affermazioni fatte, pur non rinunciando talvolta ad aperture non dimostrabili nei limiti del corso, ma che potessero far intravedere allo studente mondi sconosciuti e affascinanti.

Con la riforma degli ordinamenti didattici, che a mio parere ha abbassato sensibilmente il livello di approfondimento degli argomenti da parte degli studenti e la loro dotazione media di strumenti matematico-fisici di base, e con la suddivisione del corso in due moduli, ho preferito lasciare inalterato l'impianto della trattazione e agire io come raccordo in fase di esposizione orale, nel tentativo di limitare il più possibile i danni.

Attorno al nucleo del testo, il sito del corso si è nel tempo arricchito di una notevole quantità di materiale complementare: a parte le “informazioni di servizio” sulle attività svolte e i vari siti web di interesse, vi compaiono molti documenti, scritti da valenti Colleghi

cui sono assai grato, che costituiscono un prezioso patrimonio di utili e profonde monografie su argomenti di base o avanzati, da Essi svolti negli anni, “a latere” del corso.

Fabrizio Frezza

Indice

Prefazione	7
Indice	9
I Lezioni del corso	17
1 Strutture guidanti planari	19
1.1 Espressione di un generico campo elettromagnetico in termini di campi TM e TE	19
1.2 Campi elettromagnetici in strutture planari bidimensionali	23
1.3 Linee di trasmissione equivalenti in direzione trasversa	24
1.4 Soluzioni dell'equazione di Helmholtz per strutture planari. Relazione di dispersione. Spettro discreto dei modi guidati.	26
1.5 Risoluzione grafica dell'equazione caratteristica per uno strato dielettrico su un piano metallico	30
1.6 Modi di radiazione. Spettro continuo.	32
1.7 Soluzioni complesse dell'equazione caratteristica. Onde "leaky".	34
1.8 La regione di transizione fra l'onda leaky e l'onda superficiale	36
1.9 Antenne a onda leaky	39
1.10 Sviluppo in onde piane di fasci a sezione limitata. Riflessione totale di fasci a sezione limitata. Il "Goos-Hänchen shift".	44
1.11 Richiami sull'onda laterale	50
2 Metodo della risonanza trasversa	55
2.1 Introduzione al concetto di risonanza	55
2.2 Applicazioni elementari del metodo della risonanza trasversa a guide metalliche	57
2.3 Onde superficiali guidate da uno strato (<i>slab</i>) dielettrico su un piano metallico	60
2.4 Guida d'onda a <i>slab</i> simmetrico. Simmetrie e bisezioni.	68
2.4.1 Slab simmetrico, metodo della risonanza trasversa	70
2.5 Approccio di ottica geometrica, condizione di congruenza di fase	72
2.6 Guida d'onda a slab asimmetrico	76
2.6.1 Slab asimmetrico, metodo della risonanza trasversa	77

2.7	Guida a piatti paralleli parzialmente riempita di dielettrico	79
2.7.1	Calcolo del valore di $\frac{\beta}{k_o}$ al tendere a zero della frequenza con t costante, per il modo TM_o	81
2.7.2	Calcolo dei valori di $\frac{t}{\lambda_o}$ quando $\frac{\beta}{k_o} = 1$ per i modi superiori	82
2.8	La guida d'onda dielettrica non radiativa (NRD)	83
2.9	Guide d'onda dielettriche tridimensionali: il metodo della costante dielettrica efficace	88
2.10	La <i>slot line</i>	92
3	Il metodo dello <i>spectral domain</i>	95
3.1	Introduzione	95
3.2	Applicazione del metodo alla <i>slot line</i>	96
3.3	Soluzione con il metodo dei momenti	98
3.4	Analisi di strutture planari stratificate generiche	102
3.4.1	Introduzione	102
3.4.2	Rappresentazione del campo elettromagnetico nel dominio spettrale	103
3.4.3	Costruzione delle funzioni di Green spettrali per strutture planari stratificate	106
3.4.4	Calcolo della funzione di Green per una linea di trasmissione	114
3.4.5	Equazioni integrali per l'analisi di strutture guidanti planari stratificate, il caso della microstriscia	119
4	Diadi	125
4.1	Algebra diadica	125
4.2	Analisi diadica	131
4.3	Formalismo di Marcuvitz-Schwinger per le equazioni di Maxwell	134
4.4	Linee di trasmissione equivalenti	137
4.5	Tensore degli sforzi di Maxwell. Quantità di moto del campo elettromagnetico.	141
4.6	Calcolo del gradiente del gradiente della funzione di Green scalare per l'equazione di Helmholtz e per lo spazio libero	145
5	Antenne ad apertura	149
5.1	Espressione dei campi irradiati da un'apertura come spettri di onde piane	149
5.2	Tecniche asintotiche per la valutazione di integrali	152
5.2.1	Il metodo della fase stazionaria	152
5.2.2	Estensione del metodo della fase stazionaria al caso bidimensionale	154
5.2.3	Metodo della <i>steepest descent</i>	157
5.3	Calcolo del campo lontano	162
5.4	Ammettenza d'apertura	171
5.5	Antenne a onda leaky. Caratteristiche di radiazione, efficienza di radiazione, procedure di sagomatura (<i>tapering</i>).	176
5.5.1	Estensione al caso di presenza di perdite nei materiali	182

6	Scattering elettromagnetico	187
6.1	Scattering di un'onda piana da cilindro indefinito perfettamente conduttore.	
	Incidenza normale	187
6.1.1	Caso di polarizzazione E o $TM^{(z)}$	188
6.1.2	Caso di polarizzazione H o $TE^{(z)}$	193
6.2	Strutture cilindriche dielettriche	197
6.3	Incidenza obliqua	199
6.4	Metodo di Richmond per un allineamento di fili	202
6.4.1	Campo elettrico prodotto da correnti longitudinali	203
6.4.2	Metodo del <i>point-matching</i>	206
6.5	Scattering di onda piana da un reticolo periodico di cilindri indefiniti, perfettamente conduttori. Polarizzazione E — Incidenza normale	210
6.5.1	Incidenza obliqua rispetto alla congiungente i centri	213
6.6	Scattering di un'onda piana da un cilindro sottile di lunghezza finita	214
6.6.1	Scattering di un'onda piana da un cilindro spesso di lunghezza finita	217
6.7	Scattering da un'iride induttiva in guida d'onda rettangolare	218
6.7.1	Il metodo del <i>mode-matching</i>	223
6.8	Riepilogo di relazioni di ortogonalità per le funzioni armoniche	226
7	Rappresentazioni integrali del campo	229
7.1	Applicazione del teorema di equivalenza per la formulazione di equazioni integrali	229
7.1.1	Calcolo della funzione di Green diadica per l'equazione delle onde nello spazio libero	232
7.2	Conseguenze del comportamento singolare della funzione di Green	235
7.3	Equazioni integrali per lo scattering	239
7.4	Formulazione bidimensionale	240
7.5	Valutazione del contributo delle singolarità della funzione di Green	243
7.6	Appendice sulle singolarità	247
8	Problemi di Sturm-Liouville in elettromagnetismo	251
8.1	Introduzione. Problemi di Sturm-Liouville in una variabile.	251
8.2	Soluzione del problema di Sturm-Liouville del secondo tipo	254
8.3	Estensione a tre dimensioni del problema di Sturm-Liouville	256
8.4	Determinazione della funzione di Green in forma chiusa per un generico problema di Sturm-Liouville	257
8.4.1	Calcolo della funzione di Green per l'equazione di Helmholtz bidimensionale nello spazio libero	260
8.4.2	Funzione di Green per una cavità metallica rettangolare	263
8.5	Operatori autoaggiunti, il metodo della rappresentazione spettrale	265
8.5.1	Esempi di applicazione	266
8.5.2	Determinazione delle autofunzioni e degli autovalori dalla funzione di Green	269

8.5.3	Interpretazione alternativa della rappresentazione spettrale. Trasformazioni.	271
8.6	Problemi di Sturm-Liouville del terzo tipo. Spettri continui.	274
8.7	Funzione di Green in forma integrale	280
8.8	Spettri misti. Problemi di Sturm-Liouville non autoaggiunti.	281
9	Metodo dei momenti	283
9.1	Introduzione	283
9.2	Applicazione a problemi di scattering	287
10	Onde rotanti	289
10.1	Campi rotanti all'interno di un risonatore cilindrico	289
10.2	Dimostrazione che sull'asse la polarizzazione è circolare	294
10.3	Dimostrazione che $M_z = n W/\omega$	296
11	Cenni sulle equazioni integrali di Fredholm	299
11.1	Prime definizioni	299
11.2	Equazioni di II specie e serie di Neumann	301
11.3	Nuclei di Pincherle-Goursat (o degeneri)	301
11.4	Nuclei hermitiani	303
11.5	Equazioni di I specie	306
11.6	Equazioni singolari	306
12	Cenni sulle funzioni sferoidali prolate	309
12.1	Definizioni e proprietà	309
12.2	Due esempi di applicazione delle sferoidali	316
12.3	Generalizzazioni	317
II	Complementi	319
13	Il fenomeno del leakage per strutture guidanti planari	321
13.1	Introduzione	321
13.2	Meccanismi di perdita per radiazione in strutture planari	322
13.2.1	Perdita per radiazione da onda superficiale	322
13.2.2	Perdita per radiazione nello spazio	323
13.3	Il ruolo delle soluzioni modali improprie della struttura	324
13.3.1	Origine analitica dell'esistenza di soluzioni improprie	326
13.3.2	Scelta del cammino di integrazione	327
13.4	Considerazioni preliminari sul significato fisico di un modo leaky: la condizione per il leakage	333
13.5	Considerazioni conclusive	335

14 Eccitazione dei modi leaky in una struttura guidante di lunghezza finita:	337
metodo numerico	337
Premessa	337
14.1 Introduzione	337
14.2 Calcolo delle correnti sulla striscia con il metodo dei momenti	338
14.3 Analisi delle correnti sulla striscia	342
14.3.1 Metodo dei minimi quadrati	343
14.3.2 Metodo GPOF	344
14.4 Limitazioni del metodo numerico	344
15 Metodo analitico per lo studio dell'eccitazione dei modi leaky	347
15.1 Introduzione	347
15.2 Costruzione della funzione di Green per la linea di trasmissione	347
15.3 Proprietà analitiche della funzione di Green della struttura guidante	352
15.3.1 Ruolo dei poli della funzione di Green del substrato corrispondenti alle onde superficiali	354
15.3.2 Ruolo dei punti di diramazione della funzione di Green del substrato	357
15.3.3 Effetti derivanti dalla presenza contemporanea di poli e punti di diramazione	360
15.4 Classificazione delle diverse componenti della corrente	361
15.4.1 Calcolo dei residui	364
15.5 La condizione per il leakage come condizione necessaria	365
15.5.1 Prova della necessità della condizione per il leakage	366
15.5.2 Ulteriori considerazioni sulla eccitabilità di un modo leaky	371
15.6 Conclusioni	372
 III Richiami di Campi Elettromagnetici I	 373
16 Algebra e analisi vettoriale	375
16.1 Algebra vettoriale	375
16.2 Analisi vettoriale	376
16.3 Operatore nabla. Identità vettoriali	376
17 Coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche	377
17.1 Coefficienti metrici	377
17.2 Trasformazioni di coordinate: versori, componenti, prodotti	379
17.3 Operatori differenziali in coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche	388
18 Equazione di Poisson	393
19 Teorema di Helmholtz	399
20 Applicazione del teorema di Poynting ad un cavo coassiale in continua	403

21 Vettori complessi	407
21.1 Polarizzazione dei vettori	409
21.2 Scomposizione di una polarizzazione generica	412
21.3 L'ellisse di polarizzazione	415
22 Costanti secondarie dei mezzi. Costanti di fase e di attenuazione per onde piane uniformi. Perdite dei mezzi. Relazioni di Kramers-Krönig	417
23 Onde piane uniformi	425
23.1 Onde piane TE, TM e TEM	430
23.2 Vettore di Poynting per onde piane	432
23.3 Vettore di Poynting per incidenza normale di onde piane uniformi	433
24 Carta di Smith	445
24.1 Adattamento con uno stub	445
24.2 Adattamento con doppio stub	447
24.3 Rapporto di onda stazionaria	450
IV Bibliografia	455
25 Bibliografie	457
25.1 Bibliografie dei vari capitoli	458
25.1.1 Capitolo 3	458
25.1.2 Capitolo 7	458
25.1.3 Capitolo 11	459
25.1.4 Capitolo 12	459
25.1.5 Capitolo 13	460
25.1.6 Capitolo 14	461
25.1.7 Capitolo 15	462
25.1.8 Parte III	462
25.2 Collegamenti con altri corsi	463
25.3 Riferimenti generali	464
25.4 Riferimenti in italiano	466
25.5 Riferimenti per argomento	467
25.5.1 Guide dielettriche	467
25.5.2 Onde superficiali e onde leaky	468
25.5.3 Antenne a onda leaky	468
25.5.4 Guida d'onda NRD	469
25.5.5 La slot line	469
25.5.6 Modi LSE e LSM	470
25.5.7 Discontinuità in guida d'onda	470
25.5.8 Scattering	470

25.5.9	Calcolo tensoriale	471
25.5.10	Momento angolare del campo elettromagnetico	471
25.5.11	Onde rotanti	472
25.5.12	Funzioni di Bessel ed integrali relativi	472
25.5.13	Metodi matematici	473
25.5.14	Metodi matematici in elettromagnetismo	473
25.5.15	Calcolo numerico	473
25.5.16	Metodi numerici in elettromagnetismo	474
25.5.17	Briciole di storia dell'elettromagnetismo	478
25.6	Elenco di siti internet	478
	Seminari e visite guidate	479
25.7	Ringraziamenti	480
	Epilogo	480

Parte I

Lezioni del corso

Capitolo 1

Strutture guidanti planari

1.1 Espressione di un generico campo elettromagnetico in termini di campi TM e TE

Si considerino le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza, omogenee (assenza di termini noti, ossia di grandezze impresse), per mezzi isotropi:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega\varepsilon_c \underline{E}\end{aligned}$$

con $\varepsilon_c = \varepsilon - j\sigma/\omega$. Espandendo i rotori in coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla \times \underline{E} = \begin{vmatrix} \underline{x}_o & \underline{y}_o & \underline{z}_o \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \underline{x}_o \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \underline{y}_o \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \underline{z}_o \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

da cui le equazioni scalari:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z\end{aligned}$$

In modo analogo dalla seconda equazione di Maxwell (oppure per dualità) si ricava:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon_c E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon_c E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon_c E_z\end{aligned}$$

Si consideri ora propagazione di energia nella direzione z , nel verso positivo (presenza della sola onda progressiva, assenza di riflessioni, come avverrebbe in una struttura indefinita). Pertanto la dipendenza dalla coordinata z sarà del tipo $e^{-jk_z z}$. In tale ipotesi, derivare rispetto a z equivale a moltiplicare per $-jk_z$. Per cui le equazioni precedenti diventano:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + jk_z E_y = -j\omega\mu H_x \quad (1.1)$$

$$-jk_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (1.3)$$

e le duali:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + jk_z H_y = j\omega\epsilon_c E_x \quad (1.4)$$

$$-jk_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon_c E_y \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon_c E_z \quad (1.6)$$

Si noti che nelle quattro equazioni (1.1), (1.2), (1.4) e (1.5) sono state eliminate le derivate delle quattro componenti trasverse rispetto alla direzione (longitudinale) z , cioè delle componenti E_x , E_y , H_x , H_y . È dunque possibile, con semplici passaggi algebrici, ottenere da tali equazioni le componenti trasverse in termini delle derivate delle componenti longitudinali E_z , H_z , rispetto alle coordinate trasverse x, y .

Partendo dalla (1.5) si ottiene che:

$$E_y = \frac{-jk_z}{j\omega\epsilon_c} H_x - \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{k_z}{\omega\epsilon_c} H_x + \frac{j}{\omega\epsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (1.7)$$

Sostituendo nella (1.1) si ha:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + jk_z \left(-\frac{k_z}{\omega\epsilon_c} H_x + \frac{j}{\omega\epsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -j\omega\mu H_x$$

Mettendo in evidenza i termini contenenti H_x :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega \varepsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_x + \frac{jk_z^2}{\omega \varepsilon_c} H_x = -j \left(\omega\mu - \frac{k_z^2}{\omega \varepsilon_c} \right) H_x = \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega \varepsilon_c} H_x$$

ove $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c$. Per cui:

$$H_x = \frac{j\omega \varepsilon_c}{k_t^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega \varepsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{k_t^2} \left(j\omega \varepsilon_c \frac{\partial E_z}{\partial y} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (1.8)$$

Si è espresso H_x in funzione di E_z e di H_z , e si è posto $k_t^2 = k^2 - k_z^2$, ove il pedice t sta per trasverso rispetto a z . Sostituendo la prima uguaglianza della (1.8) nella (1.7) si ha poi:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{k_z}{\omega \varepsilon_c} \frac{j\omega \varepsilon_c}{k_t^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega \varepsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{j}{\omega \varepsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \\ &= -\frac{jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{jk_z^2}{\omega \varepsilon_c k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{j}{\omega \varepsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{j}{\omega \varepsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \left(\frac{k_z^2}{k_t^2} + 1 \right) = \\ &= -\frac{jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{j}{\omega \varepsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{k_z^2 + k^2 - k_z^2}{k_t^2} \end{aligned}$$

Si ha infine:

$$E_y = \frac{1}{k_t^2} \left(-jk_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

avendo espresso anche E_y in termini di E_z e H_z . A questo punto dalla (1.4) si aveva:

$$E_x = \frac{1}{j\omega \varepsilon_c} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + jk_z H_y \right)$$

e, sostituendo nella (1.2):

$$H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[-\frac{jk_z}{j\omega \varepsilon_c} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + jk_z H_y \right) - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] = -\frac{jk_z}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{k_z^2}{k^2} H_y + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} H_y \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{jk_z}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ H_y \frac{k^2 - k_z^2}{k^2} &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{jk_z}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned}$$

E quindi:

$$H_y = \frac{1}{k_t^2} \left(\frac{k^2}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = -\frac{1}{k_t^2} \left(j\omega \varepsilon_c \frac{\partial E_z}{\partial x} + jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (1.10)$$

avendo espresso anche H_y in termini di E_z e H_z . A questo punto, tornando alla (1.4) si ha per E_x :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{jk_z}{k_t^2} \left(j\omega\epsilon_c \frac{\partial E_z}{\partial x} + jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{k_z^2}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{\partial H_z}{\partial y} \left(1 + \frac{k_z^2}{k_t^2} \right) - \frac{jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \\ &= \frac{k^2}{j\omega\epsilon_c k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned}$$

Per cui:

$$E_x = -\frac{1}{k_t^2} \left(jk_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (1.11)$$

Quindi un campo elettromagnetico progressivo lungo z del tutto generale è ricavabile una volta assegnate le sole due componenti E_z e H_z . La dimostrazione è stata fatta in coordinate cartesiane, ma il risultato è valido anche in coordinate cilindriche generalizzate (q_1, q_2, z) . Si noti tuttavia che le espressioni (1.8)-(1.11) per i campi trasversi (rispetto a z) diventano indeterminate nel caso di campo TEM^(z) ($E_z \equiv 0, H_z \equiv 0, k_t^2 = 0$).

Finora le relazioni (1.3) e (1.6) non sono state utilizzate. Si inseriscano allora nella (1.3) le espressioni ricavate per E_x (1.11) ed E_y (1.9) e nella (1.6) quelle per H_x (1.8) e H_y (1.10). Nell'ipotesi ulteriore che il mezzo sia omogeneo, ed utilizzando il teorema sull'inversione dell'ordine delle derivate parziali, si può vedere, come è noto, che H_z ed E_z (rispettivamente dalla (1.3) e dalla (1.6)) debbono soddisfare separatamente un'equazione di Helmholtz bidimensionale nelle due variabili trasverse x, y (questo risultato è valido anche in coordinate cilindriche generalizzate q_1, q_2, z).

Pertanto un generico campo elettromagnetico progressivo lungo z , applicando la sovrapposizione degli effetti per la linearità delle equazioni di Maxwell e del mezzo, si può esprimere come somma di un campo TE^(z) e di un campo TM^(z) (a meno di campi TEM^(z)), ipotizzando nel primo caso $E_z \equiv 0$, nel secondo $H_z \equiv 0$. Non è detto tuttavia in generale che tali due campi siano da soli soluzioni possibili per la particolare struttura guidante in esame, cioè in grado di soddisfare da soli le condizioni al contorno imposte dalla struttura stessa (non è detto cioè che siano dei modi di propagazione).

Le funzioni E_z ed H_z si possono in sostanza vedere come funzioni potenziale scalare, ponendo ad esempio, in coordinate cilindriche generalizzate:

$$\begin{aligned} E_z(q_1, q_2, z) &= k_t^2 \phi^{\text{TM}}(q_1, q_2) e^{-jk_z z} \\ H_z(q_1, q_2, z) &= k_t^2 \phi^{\text{TE}}(q_1, q_2) e^{-jk_z z} \end{aligned}$$

essendo q_1 e q_2 le generiche coordinate in un piano trasverso. Tali espressioni evidenziano il fatto che nel caso di campi TEM ($k_t = 0$) le componenti longitudinali si annullano.

In ciascuna regione omogenea le funzioni ϕ devono soddisfare la:

$$\nabla_t^2 \phi + k_t^2 \phi = 0$$

con $\nabla_t^2 = \nabla^2 - \partial^2/\partial z^2$. In coordinate cartesiane e separando le variabili si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_x^2 \phi + k_y^2 \phi = 0$$

Si noti infine che le funzioni ϕ sono evidentemente legate alle funzioni $T(q_1, q_2)$ che rappresentano la dipendenza trasversa dei potenziali vettori $\underline{A}$ e $\underline{E}$, supposti diretti nella direzione longitudinale z . Si ha ad esempio per il caso TM (cfr. Campi Elettromagnetici I):

$$\underline{A}(q_1, q_2, z) = A_z(q_1, q_2, z) \underline{z}_o = T^{\text{TM}}(q_1, q_2) L(z) \underline{z}_o$$

Si può vedere infatti che valgono le relazioni:

$$T^{\text{TM}}(q_1, q_2) = j\omega \varepsilon_c \phi^{\text{TM}}(q_1, q_2)$$

$$T^{\text{TE}}(q_1, q_2) = j\omega \mu \phi^{\text{TE}}(q_1, q_2)$$

1.2 Campi elettromagnetici in strutture planari bidimensionali

Si imponga ora invece l'ipotesi di indipendenza da x ($\partial/\partial x = 0$), perché ad esempio si sta studiando una struttura supposta indefinita nella direzione x . In tal caso si può ottenere una formulazione alternativa, in funzione delle componenti E_x e H_x . Infatti, ripartendo dalle equazioni di Maxwell omogenee, si ha, ponendo $\partial/\partial x = 0$:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega \mu H_x \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega \mu H_y \quad (1.13)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega \varepsilon_c E_x \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega \varepsilon_c E_y \quad (1.16)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \varepsilon_c E_z \quad (1.17)$$

Come si vede, le sei equazioni possono ora essere così divise: tre in cui compaiono le sole componenti E_x , H_y , H_z e cioè le (1.13), (1.14) e (1.15); e le altre tre in cui compaiono

le sole componenti H_x , E_y , E_z . Questo significa che, nella sola ipotesi $\partial/\partial x = 0$, il campo elettromagnetico si può sempre vedere come sovrapposizione di un campo TE sia rispetto a y che rispetto a z , con le sole tre componenti di campo E_x , H_y , H_z , e di un campo TM sia rispetto a y che rispetto a z , con le sole tre componenti H_x , E_y , E_z . Tali due campi risultano completamente disaccoppiati (indipendenti).

È inoltre possibile ottenere il campo TE in funzione della sola componente E_x , esprimendo H_y e H_z mediante le (1.13) e (1.14). Sostituendo nella (1.15) si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = j\omega\varepsilon_c E_x$$

da cui, nell'ipotesi che μ non dipenda dal punto (come spesso accade):

$$\begin{aligned} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= j\omega\varepsilon_c E_x \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x &= 0 \end{aligned}$$

equazione di Helmholtz scalare (bidimensionale) nelle variabili y, z .

In modo analogo il campo TM può essere ottenuto in funzione della sola componente H_x , esprimendo E_y ed E_z mediante le (1.16) e (1.17). Sostituendo nella (1.12) si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) = -j\omega\mu H_x$$

Nell'ipotesi che ε e σ , contenute in ε_c , non dipendano dal punto si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x &= 0 \end{aligned}$$

anch'essa equazione di Helmholtz scalare bidimensionale.

1.3 Linee di trasmissione equivalenti in direzione trasversa

Ipotizzando ora contemporaneamente l'indipendenza da x ed una dipendenza da z del tipo $e^{-jk_z z}$, si può mostrare che lungo la direzione y (cioè lungo una direzione trasversa rispetto a quella del flusso di energia, individuata nell'asse z) si può stabilire una linea di trasmissione equivalente. Nel caso dei TE dall'equazione (1.14) si può scrivere:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = j\omega\mu H_z = -jk_y \frac{\omega\mu}{k_y} (-H_z) \quad (1.18)$$

ove k_y è definito dalla $k_y^2 = k^2 - k_z^2$.

D'altra parte si ha dalla (1.15), con la ipotizzata dipendenza da z :

$$\frac{\partial(-H_z)}{\partial y} = -\frac{\partial H_z}{\partial y} = jk_z H_y - j\omega\varepsilon_c E_x$$

Tenendo ora conto della (1.13), che diventa:

$$H_y = \frac{k_z}{\omega\mu} E_x \quad (1.19)$$

si ha:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{jk_z^2}{\omega\mu} E_x - j\omega\varepsilon_c E_x = \frac{jk_z^2 - jk^2}{\omega\mu} E_x = -j \frac{k_y^2}{\omega\mu} E_x$$

Per cui si può scrivere:

$$\frac{\partial(-H_z)}{\partial y} = -jk_y \frac{k_y}{\omega\mu} E_x \quad (1.20)$$

Ponendo allora $E_x(y, z) = V(y) e^{-jk_z z}$ e $-H_z(y, z) = I(y) e^{-jk_z z}$ (componenti di campo trasverse rispetto alla direzione y) si hanno le equazioni delle linee di trasmissione, con $Z_o^{\text{TE}} = \omega\mu/k_y$ (cfr. Campi Elettromagnetici I).

Considerando in maniera analoga i modi TM si ha, dalla (1.17):

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -j\omega\varepsilon_c E_z = -jk_y \frac{\omega\varepsilon_c}{k_y} E_z \quad (1.21)$$

D'altra parte dalla (1.12) si ha, con la ipotizzata dipendenza da z :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -jk_z E_y - j\omega\mu H_x$$

e, per la (1.16), che diventa:

$$E_y = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon_c} H_x \quad (1.22)$$

segue:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{jk_z^2}{\omega\varepsilon_c} H_x - j\omega\mu H_x = \frac{jk_z^2 - jk^2}{\omega\varepsilon_c} H_x = -j \frac{k_y^2}{\omega\varepsilon_c} H_x$$

e quindi:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -jk_y \frac{k_y}{\omega\varepsilon_c} H_x \quad (1.23)$$

Ponendo $E_z(y, z) = V(y) e^{-jk_z z}$ e $H_x(y, z) = I(y) e^{-jk_z z}$ si hanno nuovamente le equazioni delle linee di trasmissione, con $Z_o^{\text{TM}} = k_y/\omega\varepsilon_c$.

L'equazione di Helmholtz bidimensionale da risolvere, ad esempio nel caso TE, ossia la:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

diventa, con la dipendenza assunta per la variabile z :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - k_z^2 E_x + k^2 E_x = 0$$

ossia:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + k_y^2 E_x = 0 \quad (1.24)$$

equazione monodimensionale nella variabile y . Con le posizioni viste segue poi, semplificando gli esponenziali in z , l'equazione dei moti armonici:

$$\frac{d^2 V(y)}{dy^2} + k_y^2 V(y) = 0$$

Nel caso di un mezzo non omogeneo (ad esempio omogeneo a tratti, come nel caso di un mezzo stratificato lungo la direzione y), le equazioni di Helmholtz viste vanno ovviamente risolte separatamente nei vari mezzi omogenei (ad esempio aria e dielettrici), e le relative linee di trasmissione avranno in generale valori diversi per k_y e Z_o . Si devono poi imporre le condizioni di continuità per le componenti tangenziali del campo elettrico e di quello magnetico alle interfacce. Occorre, ad esempio, nel caso TE, imporre la continuità di E_x e H_z (ossia, per le equazioni delle linee, di E_x e di $\partial E_x / \partial y$, nell'ipotesi che μ sia lo stesso per i vari mezzi). La continuità di E_x e H_z corrisponde alla continuità della tensione e della corrente lungo le varie linee, e cioè a giustapporre direttamente le linee relative a mezzi diversi.

Si noti che il numero d'onda (tangente alle interfacce) k_z deve essere lo stesso nelle varie regioni considerate, in conseguenza delle condizioni di continuità delle componenti tangenziali alle interfacce stesse, condizioni che devono valere per ogni z . A ciò è legato il fatto che campi TEM non possano propagarsi in strutture con più dielettrici. La stessa osservazione dovrebbe valere se fosse diverso da zero l'altro numero d'onda tangente k_x .

1.4 Soluzioni dell'equazione di Helmholtz per strutture planari. Relazione di dispersione. Spettro discreto dei modi guidati.

L'integrale generale dell'equazione (1.24) può esprimersi, come è noto, in termini di funzioni trigonometriche (onde stazionarie) o di funzioni esponenziali immaginarie (onde progressive).

Si consideri ad esempio il caso in Fig. 1.1 di un sottile strato dielettrico (*film*) di spessore t e costante dielettrica relativa ε_r su un substrato anch'esso dielettrico di costante dielettrica relativa ε_{rs} (guida d'onda a "slab" asimmetrico). Al di sopra del film vi sia una regione d'aria (di caratteristiche come è noto molto simili a quelle del vuoto).

Una tale struttura è utilizzata, con opportune modifiche, in applicazioni di ottica integrata. Infatti a frequenze ottiche i metalli non sono più ottimi conduttori ed hanno perdite

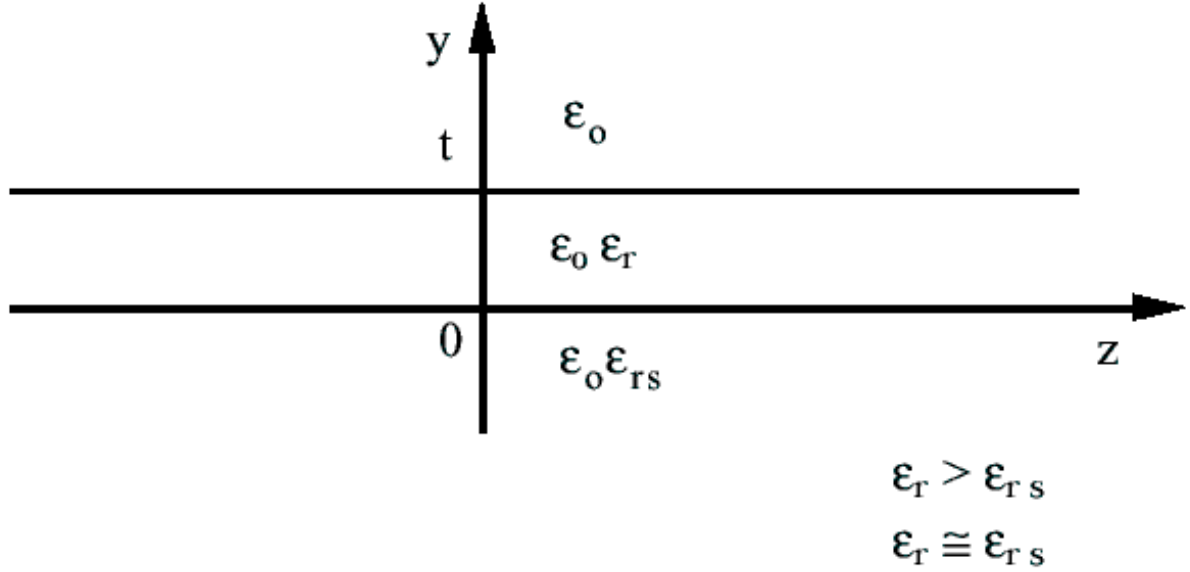


Figura 1.1: sezione longitudinale della guida d'onda a *slab* asimmetrico.

molto alte. Vengono usati più che altro come elettrodi, per permettere l'interfacciamento fra un dispositivo ottico ed uno elettronico, o per un controllo elettronico di dispositivi ottici (ad esempio modulatori utilizzando l'effetto elettro-ottico). Si usano invece substrati dielettrici, ad indice di rifrazione ovviamente inferiore a quello del film ($\epsilon_r > \epsilon_{rs}$), così da ottenere la riflessione totale alle due interfacce, e l'attenuazione esponenziale del campo al di fuori della regione centrale. Si noti che peraltro le guide ottiche usate in pratica risultano "debolmente guidanti", ossia l'indice di rifrazione del substrato è solo di poco inferiore a quello del film (normalmente differisce di meno dell'1%). Le dimensioni geometriche sono tipicamente dell'ordine del μm .

È naturale ipotizzare nel film, che risulta limitato sia superiormente che inferiormente, una soluzione in termini di onda stazionaria (seni e coseni).

Si supporrà inoltre di aver eccitato un'onda nella regione del film, per cui nella regione d'aria (supposta indefinita verso l'alto) sarà presente soltanto l'onda progressiva nel verso positivo delle y , nel substrato (supposto indefinito verso il basso) quella nel verso negativo. Quindi si potranno considerare adattate le corrispondenti linee di trasmissione.

Si avranno dunque le espressioni (ad esempio nel caso di campi TE, per cui occorre la componente E_x):

$$E_{x_o} = A e^{-jk_{y_o}(y-t)} \quad y \geq t \quad (1.25)$$

$$E_{x_\varepsilon} = B \cos(k_{y_\varepsilon} y) + C \sin(k_{y_\varepsilon} y) \quad 0 \leq y \leq t \quad (1.26)$$

$$E_{x_s} = D e^{jk_{y_s} y} \quad y \leq 0 \quad (1.27)$$

ove si è sottintesa la dipendenza da z , di tipo $e^{-jk_z z}$ in tutte le regioni¹.

Da tali espressioni è possibile poi ricavare, per la (1.14), anche H_z nelle varie regioni, in termini delle quattro costanti incognite A, B, C, D . Imponendo allora la continuità di E_x e H_z per $y = 0$ e $y = t$ si ottiene un sistema algebrico omogeneo di quattro equazioni nelle quattro incognite. Condizione necessaria e sufficiente per ottenere autosoluzioni (soluzioni diverse da quella banale nulla) è l'annullarsi del determinante dei coefficienti di A, B, C, D . Tale condizione di annullamento porta alla cosiddetta equazione caratteristica, o di dispersione, nella variabile k_z , dopo aver sfruttato le relazioni di separabilità:

$$\begin{aligned} k_{y_o} &= \sqrt{k_o^2 - k_z^2} = \sqrt{\omega^2 \mu_o \varepsilon_o - k_z^2} \\ k_{y_\varepsilon} &= \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \\ k_{y_s} &= \sqrt{\omega^2 \mu_s \varepsilon_s - k_z^2} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Risolvendo l'equazione di dispersione, che in generale è un'equazione trascendente (e come tale difficilmente risolvibile analiticamente), si ricavano dei valori discreti di k_z , per i vari modi di propagazione, in funzione della frequenza, delle dimensioni geometriche e delle caratteristiche fisiche dei mezzi: in particolare, per fissati valori dei predetti parametri, il k_z può assumere un numero finito di valori.

Una volta ottenuti i valori di k_z (autovalori) permessi per la struttura, per quei valori è possibile, dal sistema omogeneo (nel quale in questo caso figureranno tre equazioni indipendenti), esprimere tre delle costanti incognite A, B, C, D in funzione della quarta. In questa maniera il campo elettromagnetico risulta espresso in termini di una sola costante arbitraria, dipendente ovviamente dall'eccitazione.

In particolare vale la condizione di ortogonalità fra i vari modi (scritta con riferimento all'unità di lunghezza lungo x):

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}_m \times \underline{H}_n^* \cdot \underline{z}_o dy = P_m \delta_{mn} \quad (1.29)$$

essendo m ed n gli indici (discreti) di modo, e P_m la potenza complessa (sempre per unità di lunghezza) associata al modo m -simo. Tale condizione, nota la potenza in ingresso, determina la costante residua.

Si consideri come esempio concreto di quanto si è detto il caso più semplice in cui lo strato dielettrico (*slab*) sia posto su un piano metallico perfettamente conduttore (*grounded slab*).

Per campi TE occorre considerare le (1.25) e (1.26), e si hanno le tre costanti, incognite, A, B, C . Imponendo l'annullamento di E_{x_ε} per $y = 0$, si ha $B = 0$. Occorre inoltre imporre la continuità di E_x per $y = t$, per cui:

$$A = C \sin(k_{y_\varepsilon} t) \quad \implies \quad A - C \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0 \quad (1.30)$$

¹Si noti nella (1.26) che una qualsiasi combinazione di seni e coseni con lo stesso numero d'onda è ancora una sinusoide con tale numero d'onda e l'opportuna aggiunta di una fase iniziale (si ricordi il metodo dei fasori).

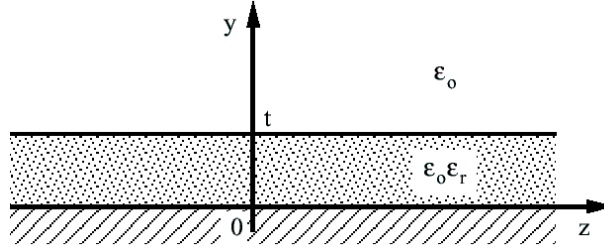


Figura 1.2: sezione longitudinale di uno *slab* dielettrico su piano metallico.

Rimane da esprimere la continuità per $y = t$ anche di H_z , ricavabile dalla (1.14), ossia dalle equazioni delle linee. Assumendo uguali le permeabilità nell'aria e nel dielettrico (ipotesi in genere verificata), si tratta sostanzialmente, come già visto, di imporre la continuità per $\partial E_x / \partial y$, da cui segue:

$$-jk_{y_o} A = C k_{y_\varepsilon} \cos(k_{y_\varepsilon} t) \implies jk_{y_o} A + C k_{y_\varepsilon} \cos(k_{y_\varepsilon} t) = 0 \quad (1.31)$$

Si è dunque ottenuto un sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite A e C . Dalla condizione di annullamento del determinante dei coefficienti, si ha l'equazione di dispersione:

$$k_{y_\varepsilon} \cos(k_{y_\varepsilon} t) + jk_{y_o} \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0 \quad (1.32)$$

Se il determinante dei coefficienti delle (1.30) e (1.31) è nullo, vuol dire che le due equazioni non sono indipendenti, e quindi è la stessa cosa usare l'una o l'altra. Dalla (1.30) si ha allora $C = A / \sin(k_{y_\varepsilon} t)$, per cui dalle (1.25) e (1.26) si ha:

$$E_{x_o} = A e^{-jk_{y_o}(y-t)}$$

$$E_{x_\varepsilon} = \frac{A}{\sin(k_{y_\varepsilon} t)} \sin(k_{y_\varepsilon} y)$$

con evidente continuità per $y = t$.

Per campi TM si procede in maniera analoga in termini della componente H_x , scrivendo per essa delle relazioni identiche alle (1.25) e (1.26). Si noti tuttavia che ora, mentre imporre l'annullamento della componente tangenziale di campo elettrico E_z per $y = 0$ equivale, per la (1.17) ovvero ancora per le equazioni delle linee, ad imporre l'annullamento di $\partial H_x / \partial y$, imporre la continuità di E_z all'interfaccia non equivale ad imporre la continuità di $\partial H_x / \partial y$, in quanto nella (1.17) appare la costante dielettrica (e in caso di perdite anche la conducibilità), che è diversa per i due mezzi. Come pure, per la (1.23) e quindi sempre per le equazioni delle linee, dalla continuità di H_x segue la non continuità per $\partial E_z / \partial y$, come si vede dalle figure successive.

Nella figura 1.3 è mostrato, per i modi indicati (contrassegnati da un solo indice, trattandosi di strutture bidimensionali), l'andamento delle ampiezze del campo elettrico tangenziale (E_x per i TE, E_z per i TM), ottenuto dopo aver risolto numericamente l'equazione

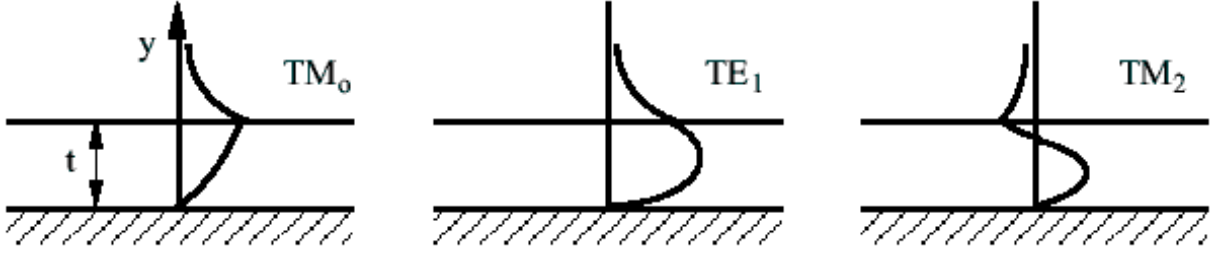


Figura 1.3: alcune configurazioni di campo elettrico tangenziale per i modi dello *slab* dielettrico su piano di massa.

di dispersione e aver ricavato i numeri d'onda nella direzione y . Come si vede, a differenza del caso in cui il dielettrico fosse racchiuso da due pareti metalliche, non si ha un numero intero di semionde all'interno del dielettrico stesso. In particolare si può verificare che l'indice modale m indica che l'argomento $k_{y_\epsilon} t$ delle funzioni armoniche soddisfa la seguente relazione:

$$m \frac{\pi}{2} < k_{y_\epsilon} t < (m + 1) \frac{\pi}{2}$$

ossia all'interno della lunghezza elettrica $k_{y_\epsilon} t$ si hanno più di m quarti d'onda, ma meno di $(m + 1)$.

Si noti infine che, come conseguenza del fatto che i numeri d'onda trasversi (rispetto a z) dipendono in generale dalla frequenza, vi dipende (a differenza del caso delle guide metalliche) la distribuzione trasversale del campo, e si ha che al crescere della frequenza il profilo del campo si concentra sempre più nel dielettrico.

1.5 Risoluzione grafica dell'equazione caratteristica per uno strato dielettrico su un piano metallico

Si consideri nuovamente l'equazione caratteristica nel caso TE, ossia:

$$\begin{aligned} k_{y_\epsilon} \cos(k_{y_\epsilon} t) + j k_{y_o} \sin(k_{y_\epsilon} t) &= 0 & \implies & k_{y_\epsilon} + j k_{y_o} \tan(k_{y_\epsilon} t) = 0 \\ & & \implies & \tan(k_{y_\epsilon} t) = -\frac{k_{y_\epsilon}}{j k_{y_o}} = -\frac{(k_{y_\epsilon} t)}{j k_{y_o} t} \end{aligned}$$

Ponendo ora $k_{y_\epsilon} t = u$ (spessore elettrico dello slab, quantità che risulta reale positiva nell'ipotesi di riflessione totale all'interno dello strato) e $k_o \sqrt{\epsilon_r - 1} t = v$ reale positiva (frequenza normalizzata, che tiene conto sia degli effetti della frequenza che di quelli dello spessore e della costante dielettrica), si ha, dalle relazioni già viste $k_{y_o}^2 = k_o^2 - k_z^2$ e

(nell'ipotesi $\mu_r = 1$) $k_{y_\varepsilon}^2 = k_o^2 \varepsilon_r - k_z^2$, che

$$\begin{aligned} k_{y_o}^2 - k_{y_\varepsilon}^2 &= -k_o^2 (\varepsilon_r - 1) \quad \Rightarrow \quad k_{y_o} = \sqrt{k_{y_\varepsilon}^2 - k_o^2 (\varepsilon_r - 1)} \quad \Rightarrow \\ k_{y_o} t &= \sqrt{(k_{y_\varepsilon} t)^2 - k_o^2 (\varepsilon_r - 1) t^2} = \sqrt{u^2 - v^2} \quad \Rightarrow \\ j k_{y_o} t &= \sqrt{v^2 - u^2} \end{aligned}$$

con $j k_{y_o} t = \alpha_{y_o} t$ quantità reale positiva (essendo $k_{y_o} = -j \alpha_{y_o}$, con $\alpha_{y_o} > 0$ nell'ipotesi ancora di riflessione totale nello slab, e quindi attenuazione esponenziale del campo nell'aria). Dunque risulta $u < v$.

L'equazione caratteristica si può allora scrivere nella forma normalizzata:

$$\tan u = -\frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}}$$

la cui soluzione grafica è rappresentata nella figura 1.4, in cui, per il valore di v riportato, compare un'unica intersezione, corrispondente al primo modo TE.

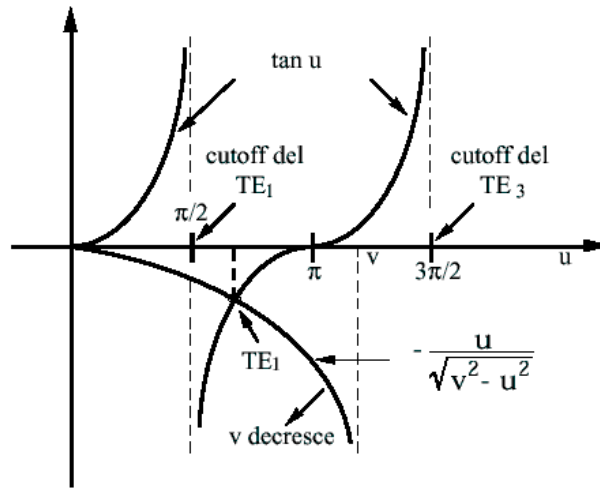


Figura 1.4: risoluzione grafica dell'equazione caratteristica per i modi TE.

Si osservi che, al decrescere di v , la condizione di cutoff dei vari modi TE si ha per $v = v_c = m\pi/2$, m dispari = 1, 3, 5, ..., ed in corrispondenza si ha $u \rightarrow u_c = m\pi/2$ (da destra), cioè $u \rightarrow v$. Per $v < v_c$ l'intersezione considerata svanisce.

All'altro estremo, per $v \rightarrow \infty$ si ha per i vari modi $u \rightarrow (m+1)\pi/2$, quindi $k_{y_\varepsilon} t$ corrisponde a $(m+1)$ quarti d'onda con m dispari, cioè $(m+1)$ è pari, per cui si ha un numero intero $(m+1)/2$ di semionde e la situazione coincide con quella che si avrebbe fra due piatti perfettamente conduttori riempiti di dielettrico. Pertanto in questo caso sarebbe lecito aggiungere nella nostra struttura un altro piatto metallico al di sopra dello strato, poiché non perturberebbe le condizioni al contorno.

Da quanto discusso risulta dunque possibile e utile, come si è già visto, etichettare le varie soluzioni discrete TE proprio con il corrispondente valore di m . Tornando al cutoff, essendo

$$k_{y_\varepsilon} = k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{k_z}{k_o}\right)^2} \quad k_{y_o} = k_o \sqrt{1 - \left(\frac{k_z}{k_o}\right)^2} \quad \alpha_{y_o} = k_o \sqrt{\left(\frac{k_z}{k_o}\right)^2 - 1}$$

(con $k_z/k_o > 1$, dovendo essere k_{y_o} immaginario), se $u \rightarrow v$ significa che

$$k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{k_z}{k_o}\right)^2} t \longrightarrow k_o \sqrt{\varepsilon_r - 1} t$$

cioè

$$\frac{k_z}{k_o} \rightarrow 1 \quad \text{e quindi} \quad k_{y_o}, \alpha_{y_o} \rightarrow 0 \quad (\text{condizioni di cutoff})$$

All'altro estremo, per alti valori di v , si ha $u \rightarrow (m+1)\pi/2$, per cui

$$k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{k_z}{k_o}\right)^2} t \longrightarrow (m+1) \frac{\pi}{2}$$

Se si sta aumentando il rapporto t/λ_o senza variare ε_r (caso realisticamente più interessante), dato che $k_o t \rightarrow \infty$, dovrà anche aversi

$$\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{k_z}{k_o}\right)^2} \longrightarrow 0 \quad \implies \quad \frac{k_z}{k_o} \longrightarrow \sqrt{\varepsilon_r} \quad \text{e} \quad \alpha_{y_o} t \rightarrow \infty \quad (\text{condizioni asintotiche})$$

Si noti peraltro che aumentare o diminuire ε_r oppure t ha lo stesso effetto che aumentare o diminuire la frequenza (del resto aumentando ε_r diminuisce la lunghezza d'onda nel materiale, aumentando t aumenta il volume del materiale).

La soluzione grafica permette agevolmente di visualizzare posizione e spostamenti delle soluzioni, e di separarle. Però in genere è meno precisa di una soluzione numerica, anche se è possibile effettuare anch'essa al calcolatore con facilità e maggiore precisione nel calcolo delle intersezioni.

1.6 Modi di radiazione. Spettro continuo.

Si consideri adesso, ancora per uno strato dielettrico su piano metallico, un'onda piana uniforme proveniente dalla regione d'aria in alto, parzialmente rifratta nel dielettrico (avvicinandosi alla normale), e riflessa totalmente dalla parete metallica. Tale onda viene poi parzialmente rifratta nell'aria, allo stesso angolo di incidenza. Una tale situazione può schematizzare un fenomeno di interferenza.

Nell'espressione del campo nell'aria si deve ora tener conto di entrambi i versi di propagazione nella direzione y , per cui si hanno, per campi TE, le relazioni:

$$\begin{aligned} E_{x_o} &= A e^{-jk_{y_o}(y-t)} + E e^{jk_{y_o}(y-t)} & y > t \\ E_{x_\varepsilon} &= B \cos(k_{y_\varepsilon} y) + C \sin(k_{y_\varepsilon} y) & 0 \leq y \leq t \end{aligned}$$

In questo caso, dalla continuità di E_x ed H_z per $y = t$ si ottiene un sistema omogeneo di due equazioni nelle tre incognite A , C , E ($B = 0$ per via del piano metallico per $y = 0$). Non si giunge allora ad un'equazione caratteristica (annullamento del determinante dei coefficienti), poiché il sistema è sempre compatibile, ed è possibile risolverlo per due delle incognite in funzione della terza, che potrà fissarsi, come già visto, con una opportuna condizione legata alla potenza in ingresso. Viene così determinato completamente il campo elettromagnetico.

Non vengono quindi stabiliti dei valori ben precisi (soddisfacenti l'equazione caratteristica, discreti e finiti, per valori fissati della frequenza e dei parametri geometrici e fisici) per il k_z , il quale potrà assumere uno spettro continuo di valori, ossia tutti i valori compresi fra k_o e zero, corrispondenti a valori reali anche per k_{y_o} (oltre che per k_{y_ε}), compresi fra zero e k_o [cfr. la (1.28)]. Si parla in questo caso di modi di radiazione. Sopra il valore k_o ci sono le curve dei modi guidati superficiali, con k_{y_o} immaginario negativo, come già visto.

I suddetti valori reali per k_{y_o} corrispondono ad una propagazione di energia anche nella direzione y (onda piana uniforme nell'aria), e non ad un'attenuazione, come per i modi guidati (onda superficiale nell'aria). Inoltre nella linea di trasmissione equivalente non si potrà mettere al posto della regione superiore la sua impedenza caratteristica, il che corrisponderebbe a considerare tale regione adattata perché indefinita verso l'alto (cfr. § 2.3).

Del resto ora non deve essere neppure soddisfatta la condizione di congruenza di fase (cfr. § 2.5, Fig. 2.14), e l'angolo θ , che il raggio corrispondente forma con l'asse z , può assumere tutti i valori compresi fra l'angolo limite θ_l e $\pi/2$ e non un insieme finito di valori, fra 0 e θ_l , dipendente dalla frequenza e dai parametri geometrici e fisici. Non si ha infine una risonanza trasversa nella direzione y (cfr. Capitolo 2).

I modi di radiazione, non essendo più evanescenti nella regione d'aria, hanno sicuramente energia infinita, violando la condizione di radiazione all'infinito (il modulo del campo non tende a zero per $y \rightarrow \infty$). Nel caso dello spettro continuo la condizione di normalizzazione (1.29) va quindi opportunamente modificata, e la δ di Kronecker, tipica dei modi a spettro discreto, diventa la δ di Dirac. Ovviamente, trattandosi ora di un insieme continuo di modi, essi saranno etichettati da indici reali μ e ν , e si avrà (sempre per unità di lunghezza lungo x):

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}_\mu \times \underline{H}_\nu^* \cdot \underline{z}_o dy = P_\mu \delta(\mu - \nu) \quad (1.33)$$

Si ricordi peraltro che una sovrapposizione (integrale) di onde singolarmente non fisicamente realizzabili (cfr. principio di indeterminazione di Heisenberg) può dar luogo (ad esempio negli sviluppi in onde piane) ad un campo fisicamente realistico (così come avviene nel dominio del tempo con le onde monocromatiche). Per rappresentare allora il più generale

campo elettromagnetico associato ad uno slab dielettrico, occorre tener conto anche dei modi di radiazione.

Lo spettro continuo in realtà è costituito, oltre che dai modi di radiazione, anche dai cosiddetti modi evanescenti (analoghi a quelli delle guide metalliche sotto cutoff), caratterizzati da valori puramente immaginari negativi di k_z , ossia:

$$-j\infty < k_z < 0$$

corrispondenti a k_{y_o} fra k_o e $+\infty$. Tali modi hanno le stesse configurazioni trasversali (rispetto a z) di campo dei modi di radiazione, ma si attenuano lungo z .

Il contributo al campo più generale da parte dello spettro continuo si può dunque esprimere come un integrale da 0 a $+\infty$ nella variabile reale k_{y_o} . Si tenga presente tuttavia che, dopo una certa distanza longitudinale, i modi evanescenti non danno più un contributo rilevante al campo nella guida.

La rappresentazione integrale citata risulta però complicata e lentamente convergente, per cui in molti casi è più conveniente una rappresentazione approssimata, che fa uso ancora di un insieme discreto di onde dette *leaky*, che risultano soluzioni complesse della stessa equazione caratteristica, prolungamento analitico delle soluzioni per modi guidati.

1.7 Soluzioni complesse dell'equazione caratteristica. Onde “leaky”.

Si considerino ora altre possibili soluzioni dell'equazione caratteristica per una generica struttura guidante planare bidimensionale aperta. In particolare si ipotizzi che k_z possa essere in generale complesso, in presenza di qualche meccanismo di perdita (nei dielettrici, nei conduttori o per radiazione). Il piano $y = 0$ corrisponda inoltre all'interfaccia superiore della struttura aperta considerata con l'aria.

Dalla relazione di separabilità nell'aria (che si suppone con ottima approssimazione assimilabile al vuoto e quindi priva di perdite):

$$k_o^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o = k_{y_o}^2 + k_z^2$$

essendo k_o reale, se k_z è complesso, dev'essere allora k_{y_o} complesso, e si pone:

$$k_z = \beta_z - j\alpha_z$$

$$k_{y_o} = \beta_y - j\alpha_y$$

Per cui:

$$k_o^2 = (\beta_y - j\alpha_y)^2 + (\beta_z - j\alpha_z)^2 = \beta_y^2 - \alpha_y^2 - 2j\beta_y\alpha_y + \beta_z^2 - \alpha_z^2 - 2j\beta_z\alpha_z$$

e, separando parte reale e parte immaginaria:

$$k_o^2 = \beta_y^2 + \beta_z^2 - \alpha_y^2 - \alpha_z^2 \quad (1.34)$$

$$0 = \beta_y\alpha_y + \beta_z\alpha_z \quad (1.35)$$

Definendo i vettori reali (bidimensionali) di fase e di attenuazione, come per le onde piane:

$$\begin{aligned}\underline{\beta} &= \beta_y \underline{y}_o + \beta_z \underline{z}_o & \implies & |\underline{\beta}|^2 = \beta_y^2 + \beta_z^2 \\ \underline{\alpha} &= \alpha_y \underline{y}_o + \alpha_z \underline{z}_o & \implies & |\underline{\alpha}|^2 = \alpha_y^2 + \alpha_z^2\end{aligned}$$

segue dalla (1.34) che:

$$|\underline{\beta}|^2 - |\underline{\alpha}|^2 = k_o^2 \quad (\implies |\underline{\beta}| \neq 0 \text{ e } |\underline{\beta}| > |\underline{\alpha}|)$$

e dalla (1.35) che:

$$\underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = 0$$

Le superfici equifase sono ovviamente i piani ortogonali alla direzione di $\underline{\beta}$ (che è la direzione di propagazione), mentre le superfici equiampiezza sono i piani ortogonali alla direzione di $\underline{\alpha}$. Si ipotizza inoltre, senza perdita di generalità, che sia $\beta_z > 0$ (propagazione nel verso positivo delle z).

Nel caso di assenza di perdite (di qualsiasi genere) si ha $\alpha_z = 0$, per cui dalla (1.35) segue $\beta_y \alpha_y = 0$. Se $\alpha_y = 0$ ($\implies \underline{\alpha} = 0$) si ha un'onda piana uniforme entrante o uscente rispetto al piano di interfaccia aria-dielettrico a seconda del segno di β_y . Si ricordi che in letteratura le onde piane uniformi sono molto spesso chiamate onde piane omogenee.

Se $\beta_y = 0$ ($\implies \underline{\beta} = \beta_z \underline{z}_o$) si ha nell'ipotesi $\alpha_y > 0$ l'onda superficiale confinata (che si chiama così perché è sensibilmente diversa da zero in aria solo nelle vicinanze della superficie), con i vettori nella configurazione di Fig. 1.5a. Una tale onda viene molto spesso chiamata in letteratura onda piana evanescente (nella direzione y).

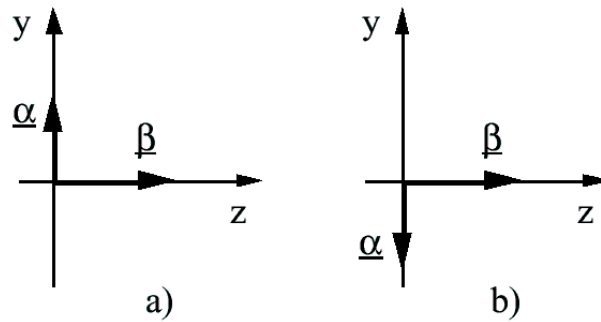


Figura 1.5: onde superficiali propria a) e impropria b).

Invece l'ipotesi $\alpha_y < 0$ (Fig. 1.5b) porta ad un'onda che, anche se possibile soluzione matematica dell'equazione caratteristica, non è fisicamente ammissibile. Tale onda, denominata a volte onda superficiale impropria, presenta un incremento esponenziale per y crescenti, così da violare palesemente la condizione di radiazione all'infinito (l'aggettivo *improprio* indica proprio questa violazione).

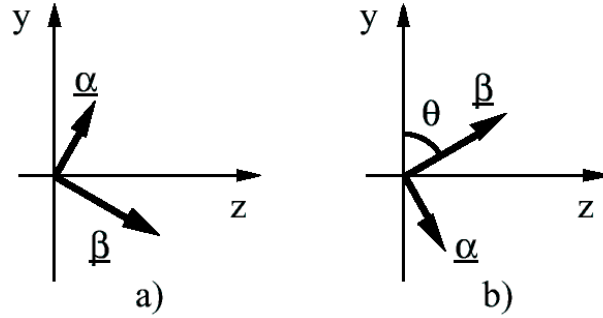


Figura 1.6: onda in mezzi con perdite a) e onda leaky b).

Supponendo ora la presenza di un meccanismo di perdita, si ha $\alpha_z \neq 0$, per cui, essendo per ipotesi $\beta_z \neq 0$, sicuramente $\beta_y \neq 0$ e $\alpha_y \neq 0$. Ad esempio, la configurazione di Fig. 1.6a può corrispondere alla situazione di dielettrico con perdite. In questo caso $\underline{\beta}$, e quindi il flusso di potenza, ha una componente entrante nella struttura, per compensare le perdite all'interno.

L'onda rappresentata in Fig. 1.6b e in Fig. 1.7 viene invece denominata onda “leaky” (dall'inglese “leakage”, che significa perdita, fuga). Una tale onda può esistere anche nel caso di materiali privi di perdite: si hanno in questo caso perdite per radiazione, come si vede dalla direzione del vettore $\underline{\beta}$ in figura, che indica un flusso di potenza uscente dalla struttura. Si vede inoltre che per una tale onda si ha $\alpha_y < 0$, e questo comporta di nuovo un'amplificazione del campo allontanandosi verso l'alto dall'interfaccia, con il non soddisfacimento della condizione di radiazione.

Tuttavia anche una tale onda non fisica, se considerata in una regione di spazio angolarmente limitata verso l'alto, può essere ammissibile e adatta ad esprimere il campo. In effetti un modo intuitivo per giustificare un'onda leaky può essere quello di associarla alle successive riflessioni e rifrazioni di fasci a sezione limitata (vedi Fig. 1.8).

1.8 La regione di transizione fra l'onda leaky e l'onda superficiale

La regione di transizione tra l'onda confinata di tipo superficiale e l'onda leaky presenta delle interessanti peculiarità, che possono essere osservate sulla cosiddetta curva di dispersione, che si ottiene risolvendo (numericamente) l'equazione caratteristica nel piano complesso. Essa fornisce la costante di fase β_z , normalizzata rispetto al numero d'onda nel vuoto k_0 , in funzione della frequenza. Ingrandendo la curva di dispersione nell'intorno della transizione, si ha la situazione di Fig. 1.9

Prima del punto B (ad esempio nel punto A) si ha l'onda leaky in Fig. 1.10a con $\theta = \tan^{-1}(\beta_z/\beta_y)$. Nel punto B si ha la situazione in Fig. 1.10b. Una tale soluzione è evidentemente non accettabile fisicamente.

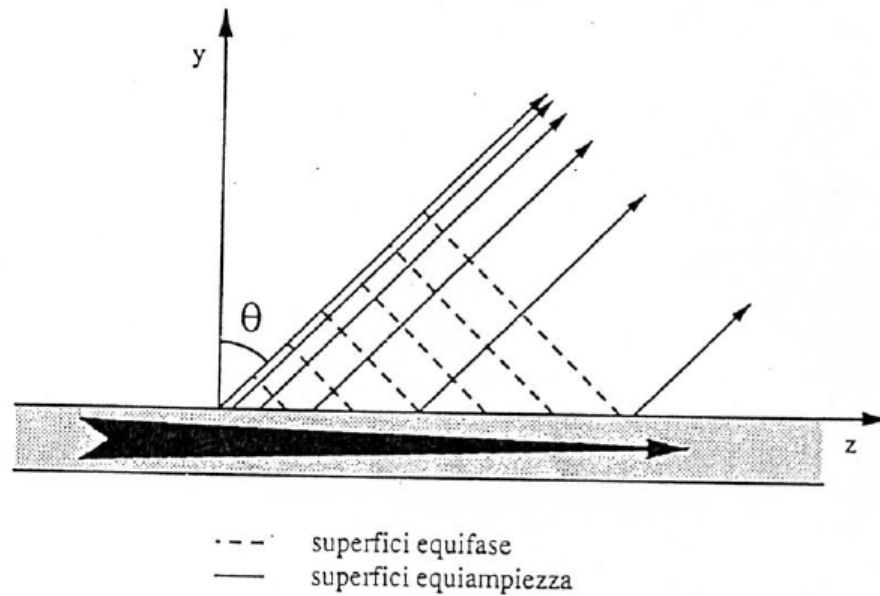


Figura 1.7: rappresentazione delle superfici equifase ed equiampiezza dell'onda leaky.

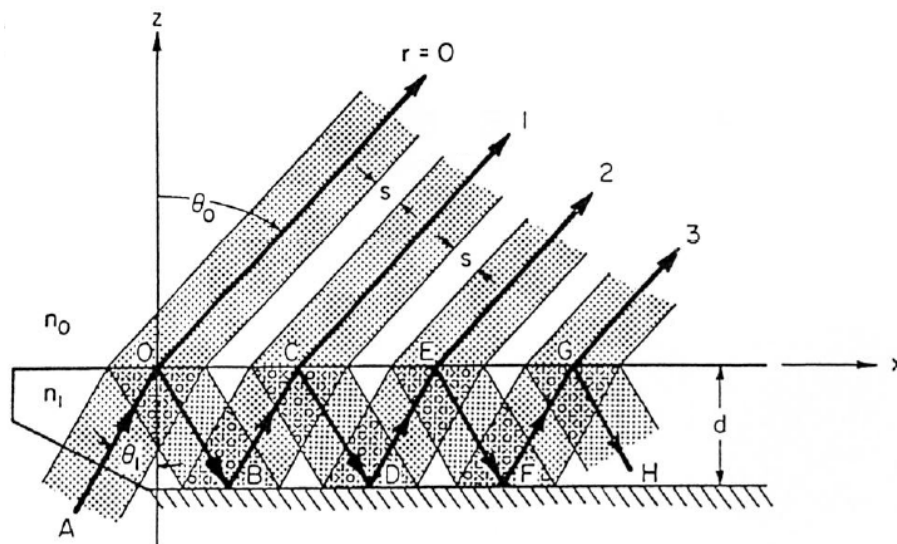


Figura 1.8: giustificazione intuitiva per l'amplificazione verso l'alto nel caso di un fascio a sezione limitata.

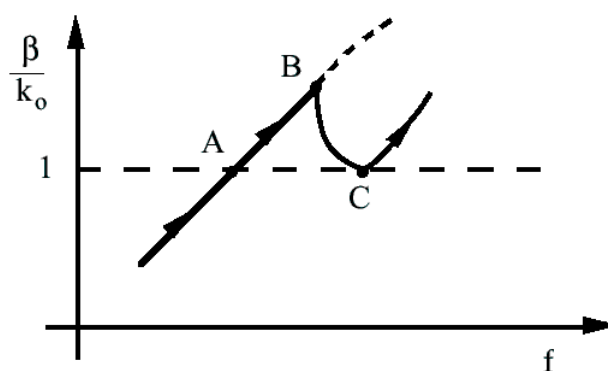


Figura 1.9: curva di dispersione con in evidenza la regione di transizione.

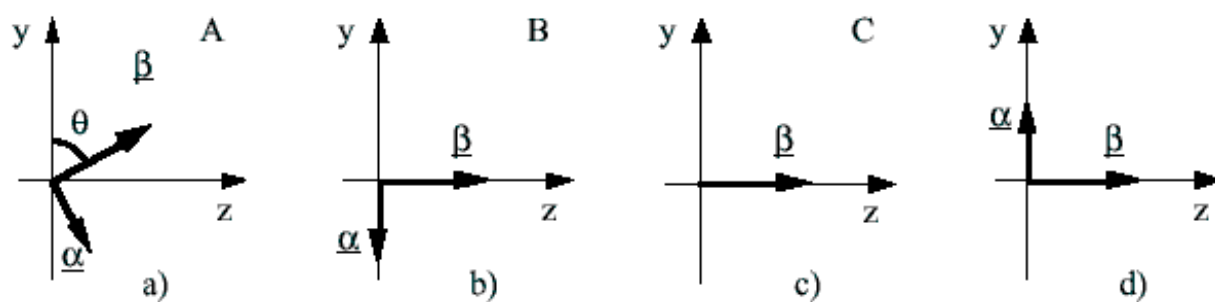


Figura 1.10: diverse fasi della transizione fra onda leaky e onda superficiale.

Il fatto che sia $\theta = 90^\circ$ non per $\beta_z = k_o$, ma per $\beta_z > k_o$, deriva dalla relazione (1.34), che per $\theta = 90^\circ$, ossia $\beta_y = \alpha_z = 0$, diviene: $\beta_z^2 - \alpha_y^2 = k_o^2$, per cui $\beta_z > k_o$.

Oltre il punto B si trovano matematicamente due soluzioni, una (curva tratteggiata) con β_z/k_o che aumenta sempre più, e contemporaneamente aumenta $|\alpha_y|/k_o$. Questa soluzione è evidentemente da rigettare da un punto di vista fisico.

L'altra possibilità invece (curva continua) corrisponde a β_z/k_o che diminuisce, e corrispondentemente diminuisce anche $|\alpha_y|/k_o$, fino ad arrivare alla situazione (punto C) in cui $\beta_z = k_o$ e $\alpha_y = 0$ (Fig. 1.10c).

Da questo punto in poi, sempre al crescere della frequenza, β_z/k_o riprende ad aumentare, e ricompare il vettore di attenuazione lungo y , però diretto in verso opposto (Fig. 1.10d), ossia si è passati all'onda superficiale.

Nella regione tra A e C dunque non si ha nessuna soluzione fisicamente accettabile, ossia il modo in questione non contribuisce al campo totale, non è utile a rappresentarlo.

In alcuni casi (ad esempio per le cosiddette antenne a onda leaky) la regione di transizione può svolgersi in un intervallo estremamente ridotto di frequenze, per cui da un punto di vista numerico risulta quasi invisibile, e si salta direttamente alla zona con l'onda superficiale: occorre un procedimento numerico molto accurato nel risolvere l'equazione caratteristica. In altri casi invece (slab dielettrico) essa si svolge in un intervallo esteso di frequenze.

1.9 Antenne a onda leaky

La motivazione principale dello studio delle onde *leaky* è stata storicamente la loro applicazione alle antenne ad onda leaky a microonde e onde millimetriche, in cui la potenza perduta dalla guida costituisce la potenza irradiata dall'antenna.

Un'antenna a onda leaky è sostanzialmente appunto una guida d'onda con delle aperture oppure completamente aperta, che possieda un meccanismo che provoca una lenta perdita (*leakage*) di potenza lungo la guida, irradiata verso l'esterno, trasformando il modo di propagazione da confinato (modo in guida chiusa oppure onda superficiale) in un modo cosiddetto *leaky*. Pertanto la costante di propagazione longitudinale k_z (determinata dall'equazione di dispersione della guida) diviene complessa: $k_z = \beta - j\alpha$, essendo β la costante di fase e α la costante di attenuazione o di *leakage*, presente anche nel caso ideale di guida priva di perdite. Le quantità β e α sono il prodotto finale dell'analisi di strutture a onda leaky, in quanto sussistono delle relazioni tra tali quantità e le caratteristiche di radiazione dell'antenna, come l'angolo di massima irradiazione e la larghezza del fascio emesso.

Nel caso di un'antenna singola il fascio emesso sarà a forma di ventaglio trasversalmente, mentre sul piano longitudinale la direzione di massima irradiazione formerà con la normale alla superficie dell'apertura (direzione *broadside*) un angolo θ , dipendente dal valore di β/k_o , con k_o numero d'onda nel vuoto (cfr. Figg. 1.6b o Fig. 1.5a), ed esprimibile approssimativamente con la formula:

$$\sin \theta \cong \frac{\beta}{k_o} \quad (1.36)$$

La scansione del fascio emesso può allora essere eseguita ad esempio variando la frequenza, con cui varia β/k_o . Una tale modalità di scansione risulta molto più comoda, da un punto di vista pratico, rispetto a quella ottenuta ruotando meccanicamente l'antenna stessa.

Per quanto riguarda la lunghezza L dell'antenna, in genere viene scelta in modo tale che il 90% della potenza in ingresso sia irradiato, con il rimanente 10% assorbito da un carico adattato posto in uscita. Si può allora ricavare la relazione:

$$\frac{L}{\lambda_o} \cong \frac{0.183}{\alpha/k_o} \quad (1.37)$$

con λ_o lunghezza d'onda nel vuoto.

La larghezza del fascio a 3 dB $\Delta\theta$ è determinata principalmente dalla lunghezza L dell'apertura, ma è anche influenzata dalla distribuzione del campo di apertura. Una semplice relazione approssimata per l'angolo $\Delta\theta$ in radianti è la seguente:

$$\Delta\theta \cong \frac{0.91}{(L/\lambda_o) \cos \theta} \propto \frac{\alpha}{k_o} \quad (1.38)$$

Per quanto concerne i lobi laterali, è noto dalla teoria delle antenne come la distribuzione di apertura dell'antenna debba essere sagomata (*tapered*) opportunamente in modo da soddisfare i requisiti sui lobi laterali. È necessario allo scopo variare la costante di attenuazione α al variare della coordinata longitudinale z , cambiando le dimensioni trasversali lungo la struttura. Facendo questo è importante che la costante di fase β si mantenga costante, in modo che tutte le sezioni dell'antenna irradiano allo stesso angolo θ .

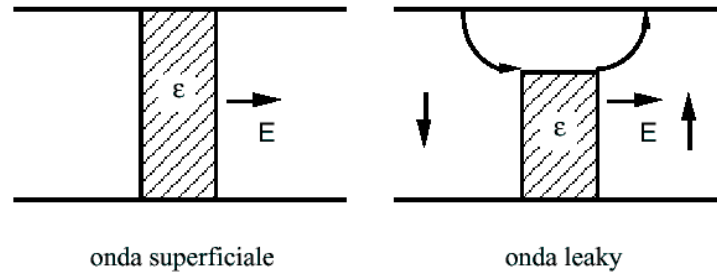


Figura 1.11: guida d'onda NRD (a sinistra) e antenna a onda leaky (a destra).

Riguardo ai meccanismi usati per produrre il leakage, si può pensare di introdurre nella sezione trasversale della guida un'asimmetria geometrica, rispetto appunto a un piano di simmetria, che trasformi un modo confinato in un modo leaky, come indicato in Fig. 1.11. A sinistra è mostrata la sezione trasversale di una guida d'onda denominata NRD (*Non Radiative Dielectric*, guida d'onda dielettrica non radiativa), utilizzata nel campo delle onde millimetriche. A destra è mostrata invece una sua opportuna modificazione, che realizza l'antenna.

La scelta di strutture uniformi longitudinalmente riduce le difficoltà di fabbricazione, fattore critico se si opera nel campo delle onde millimetriche, per le minori dimensioni in gioco.

Alcune delle antenne studiate in letteratura sono state impiegate come sorgenti di linea in un allineamento a variazione di fase (*phased array*), allo scopo di ottenere una scansione bidimensionale di fasci a matita (*pencil beams*). Antenne uguali sono disposte parallelamente e alimentate a un'estremità. La scansione nel piano longitudinale (ossia in elevazione) è ad esempio in frequenza, mentre nel piano trasverso (ossia in azimuth) la scansione è prodotta da sfasatori presenti nella struttura di alimentazione. Nel processo di scansione è importante evitare direzioni cieche (*blind spots*), come pure l'insorgere di lobi secondari (*grating lobes*).

Come si è detto, le difficoltà di fabbricazione, dovute alle minori dimensioni in gioco, sono un elemento importante se si opera nel campo delle onde millimetriche. È molto utile pertanto considerare strutture di semplice configurazione geometrica.

Un altro punto chiave è rappresentato dalle perdite della guida. Questo fattore non è fondamentale per componenti lunghi circa una lunghezza d'onda, per i quali si possono usare anche guide relativamente con perdite (come la *microstrip*). Tuttavia per le antenne che impiegano onde viaggianti le dimensioni in gioco possono essere dell'ordine da 20 a 100 lunghezze d'onda, e le perdite intrinseche (nei conduttori o nel dielettrico) della guida possono competere con le perdite per radiazione (*leakage*), compromettendo il progetto e le prestazioni dell'antenna.

Se si riesce a fare in maniera che il campo elettrico del modo usato si mantenga quasi ovunque in direzione parallela alle pareti della guida, allora le perdite metalliche sono drasticamente ridotte nel campo delle onde millimetriche. Come è noto, infatti, le perdite nelle pareti metalliche diminuiscono al crescere della frequenza se il campo elettrico è parallelo alle pareti, mentre aumentano al crescere della frequenza se il campo elettrico è perpendicolare alle pareti. Due esempi di guide di questo tipo sono la *NRD guide* e la *groove guide*. Quest'ultima, proposta da Nakahara, è mostrata in Fig. 1.12a.

Come si vede, si tratta di una guida a piatti metallici paralleli, in cui la parte centrale è più larga (*groove*). In questo modo i campi in direzione verticale hanno una dipendenza trigonometrica nella regione centrale, mentre decadono esponenzialmente nelle regioni superiore e inferiore. Il campo risulta così confinato e, se i piatti nelle regioni esterne sono di lunghezza sufficiente, i valori del campo sono del tutto trascurabili alle aperture.

Il modo dominante di questa struttura è un modo TE, molto simile al TE_{10} in guida d'onda rettangolare. Rispetto a quest'ultima, l'eliminazione di buona parte delle pareti superiore e inferiore, ortogonali alla direzione del campo elettrico, provoca la desiderata riduzione delle perdite metalliche a frequenze elevate. Uno schizzo delle linee di forza è mostrato in Fig. 1.12b.

In virtù dell'orientazione del campo elettrico per il modo dominante la struttura può essere bisezionata con un piano metallico orizzontale senza turbare la configurazione del campo elettromagnetico. Si ottiene così la geometria di Fig. 1.12c.

Se nella guida di Fig. 1.12c si introduce uno scostamento laterale (*offset*), ovvero un'asimmetria della sezione trasversale rispetto al piano mediano, si ottiene la struttura in

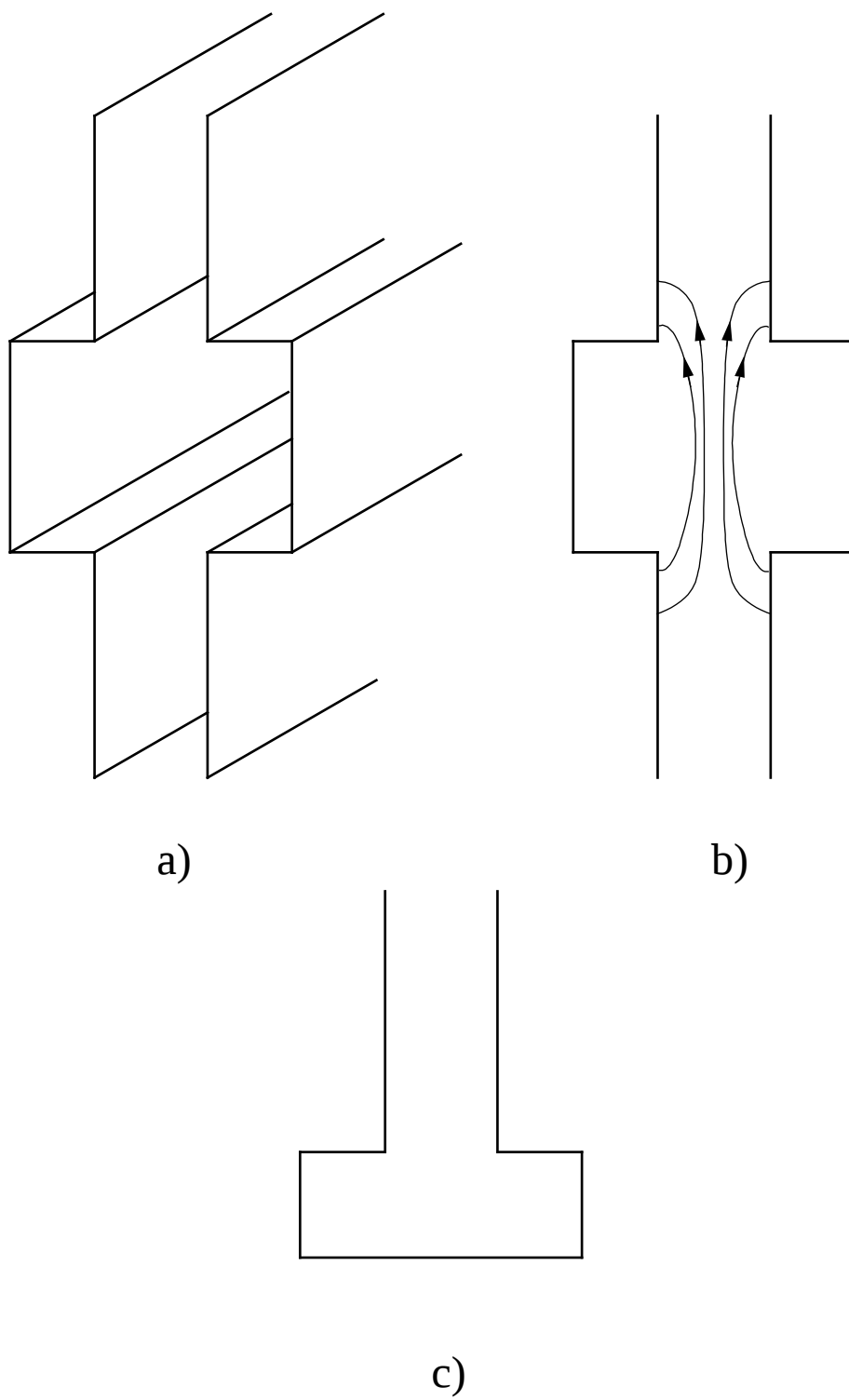


Figura 1.12: guida d'onda a *groove*

Fig. 1.13a, denominata *offset groove guide*. L'asimmetria introdotta trasforma il modo dominante della *groove guide* da modo confinato in un modo leaky, in quanto essa dà luogo a una componente orizzontale netta di campo elettrico nella regione superiore a piatti paralleli (*stub*). In tale regione viene ora eccitato un modo TEM, responsabile del leakage, che si propaga in una direzione del piano longitudinale obliqua rispetto alla normale all'apertura. Tale modo, nell'ipotesi che la larghezza dello stub sia minore di metà lunghezza d'onda nel vuoto, risulta l'unico a potersi propagare fra i piatti, mentre i modi superiori sono attenuati. Dunque se l'altezza c dello stub è sufficiente la componente verticale di campo elettrico sull'apertura risulta trascurabile, e la potenza irradiata possiede una polarizzazione pura orizzontale. La presenza dello stub dunque è molto vantaggiosa per la polarizzazione.

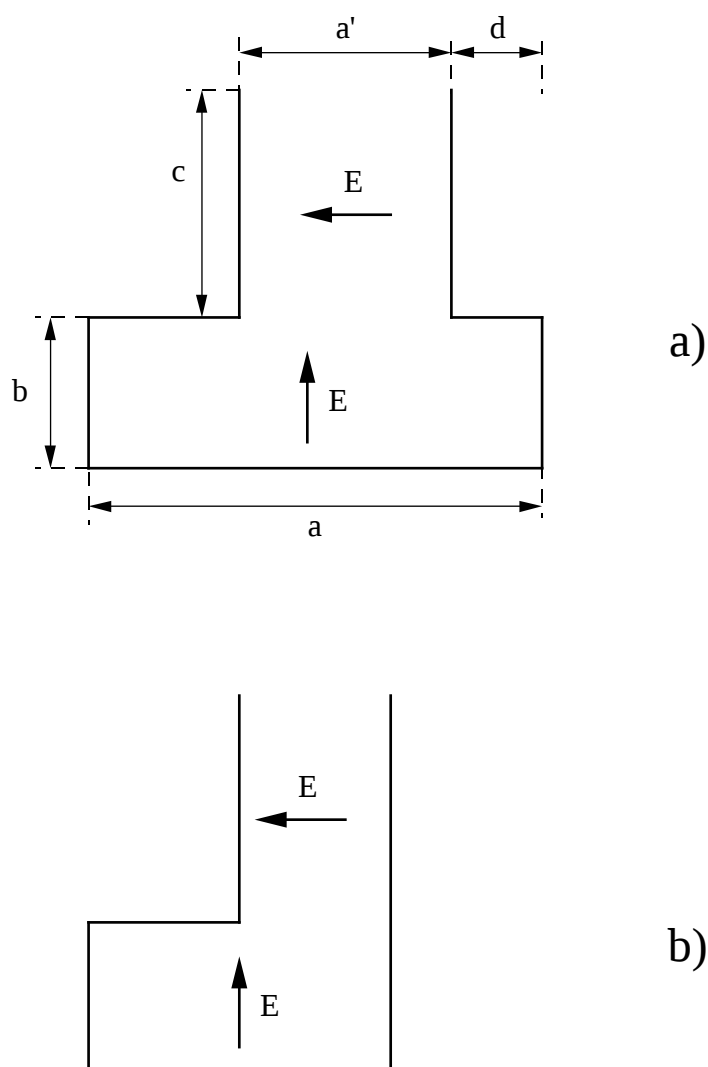


Figura 1.13: guida d'onda *offset groove guide* o *stub loaded*

L'entità del leakage dipenderà dall'entità dell'offset: si è visto che, se lo stub è centrato, la guida, pur essendo aperta, non irradia. Se invece lo stub è spostato completamente a lato (guida a L , vedi Fig. 1.13b) si ha il valore massimo per la costante di leakage e quindi, per quanto detto in precedenza, la massima larghezza del fascio emesso. La struttura consente quindi un controllo della larghezza del fascio emesso.

La *offset groove guide* può anche vedersi come una guida d'onda rettangolare con uno stub decentrato nella parete superiore. Questa osservazione suggerisce anche un modo molto naturale per alimentare la struttura.

La *offset groove guide* è stata analizzata in letteratura derivando un'accurata rete equivalente trasversa, cioè un circuito equivalente a costanti distribuite per la sezione trasversale. A tale rete equivalente è stato poi applicato il metodo della risonanza trasversa, considerando cioè per la rete stessa la condizione di risonanza lungo una direzione trasversale. Questa condizione conduce a un'equazione trascendente che, risolta numericamente, fornisce possibili valori per il numero d'onda trasversale. Sfruttando poi la nota relazione di separabilità, che lega i numeri d'onda nelle varie direzioni e la frequenza, è possibile ricavare i valori per la costante di propagazione longitudinale $k_z = \beta - j\alpha$, in funzione della frequenza e dei parametri geometrici. Si è visto poi come la parte reale e la parte immaginaria di k_z siano legate alle caratteristiche di radiazione dell'antenna.

1.10 Sviluppo in onde piane di fasci a sezione limitata. Riflessione totale di fasci a sezione limitata. Il “Goos-Hänchen shift”.

Un'onda piana ideale è un campo con il fronte d'onda che si estende virtualmente all'infinito, come pure dovrebbe essere infinitamente estesa la sorgente che la emette. Invece un fascio di estensione finita (come realisticamente deve essere) sarà composto da uno spettro angolare (continuo) di più onde piane (ad angoli diversi). Facendo incidere un tale fascio su un'interfaccia piana fra due mezzi, le sue onde piane componenti subiranno in riflessione trattamenti diversi.

È noto infatti che i coefficienti di riflessione (detti di Fresnel) dipendono dal tipo di polarizzazione (orizzontale e verticale rispetto al piano di interfaccia, oppure perpendicolare e parallela rispetto al piano d'incidenza, oppure TE e TM rispetto alla normale all'interfaccia). Da ciò deriva, ad esempio, il fatto che un'onda incidente piana polarizzata circolarmente diventi in riflessione polarizzata ellitticamente. Tali coefficienti dipendono inoltre dall'angolo di incidenza (o in maniera equivalente dalle componenti del vettore d'onda).

Quanto detto può essere non particolarmente significativo nel caso di una singola onda piana (perché c'è un singolo angolo di incidenza), ma può creare strani effetti nel caso (più realistico) in cui il campo non sia un'onda piana pura, ma abbia uno spettro angolare di larghezza finita (non infinitesima). Ad esempio il campo riflesso da un'onda cilindrica o sferica non è più una tale onda, perché si modificano i rapporti fra le onde piane componenti.

Si consideri un fascio a sezione limitata schematizzato da un’onda piana (per semplicità di ampiezza unitaria) propagantesi nella direzione z e troncata in corrispondenza al piano $z = 0$ (detto piano di cintola, *waist plane*).

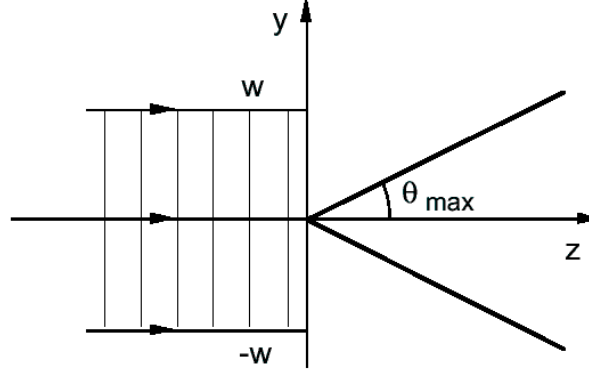


Figura 1.14: allargamento spettrale di un fascio a sezione limitata.

Si tratterà di un problema bidimensionale (indipendenza da x), per cui varranno i risultati del § 1.2. Si consideri in particolare il caso TE. Si ha per il campo elettrico:

$$\underline{E}(y, z) = \underline{x}_o e^{-jkz} W(y)$$

con:

$$W(y) = \begin{cases} 1 & \text{per } |y| < w \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

È noto che la più generale soluzione dell’equazione delle onde si può scrivere sotto forma di uno spettro di onde piane, in questo caso del tipo (regime monocromatico):

$$\underline{E}(y, z) = \underline{x}_o \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_y) e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} dk_y$$

ove con la tilde si è indicata l’operazione di trasformazione di Fourier (rispetto alla variabile y), e si ha:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}$$

Tale spettro è costituito da onde piane uniformi (o omogenee) se $|k_y| < k$, da onde piane evanescenti nella direzione z se $|k_y| > k$.

In particolare per $z = 0$ si ha:

$$E_x(y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_y) e^{-jk_y y} dk_y$$

cioè un’antitrasformata di Fourier. Quindi la $\tilde{E}(k_y)$ (funzione peso dello sviluppo in onde piane) è la trasformata di Fourier della distribuzione di campo (trasversale) per $z = 0$.

D'altra parte deve essere nel nostro caso $E_x(y, 0) = W(y)$, cioè si tratta di una funzione *rect*, per cui:

$$\tilde{E}(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(y, 0) e^{jk_y y} dy = \int_{-w}^w e^{jk_y y} dy = 2w \frac{\sin(k_y w)}{k_y w}$$

Si tratta di una funzione *sinc*, il cui modulo è mostrato in Fig. 1.15: come è noto, più si aumenta w , più tale funzione è alta e stretta.

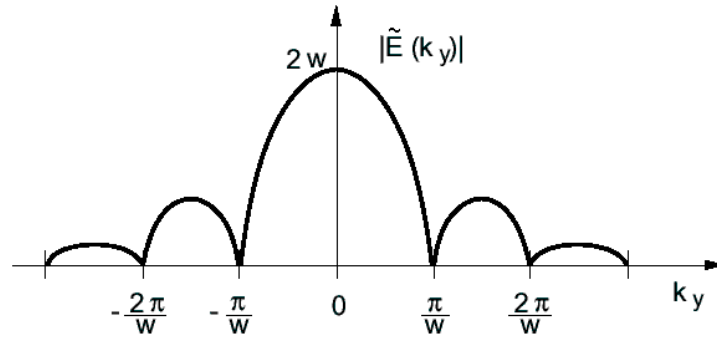


Figura 1.15: modulo dello spettro angolare di un fascio a sezione limitata.

Si può assumere in modo approssimato e convenzionalmente la larghezza di banda (spaziale) come: $|k_y|_{max} \approx \pi/w$ (ovvero si prende in considerazione solo il lobo principale del diagramma). Se il fascio è largo, cioè $2w \gg \lambda$, si ha $|k_y|_{max} \approx \pi/w \ll 2\pi/\lambda = k$; è possibile allora approssimare $k_z \approx k$, e le onde piane che formano il fascio hanno ampiezza significativa solo su uno spicchio angolare dato da (banda spaziale stretta):

$$\tan \theta_{max} = \frac{|k_y|_{max}}{k_z} \approx \frac{\pi/w}{k}$$

quantità che nell'ipotesi predetta sarà $\ll 1$, per cui:

$$\theta_{max} \approx \frac{\pi/w}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2w}$$

espressione peraltro ben nota dalla teoria della diffrazione da una fenditura di dimensione $2w$. Quindi se il fascio alla cintola è largo molte lunghezze d'onda, esso rimarrà ben collimato per grandi distanze; invece più è stretto e più presto si allargherà.

Si consideri ora il fascio a sezione limitata di larghezza $2w$ incidente obliquamente all'interfaccia fra due mezzi (piano $y = 0$), provenendo dal mezzo più denso di costante dielettrica relativa ε_r .

Il campo elettrico incidente della singola onda piana illimitata (w infinita) sarebbe del tipo:

$$\underline{E}_i(y, z) = \underline{x}_o e^{jk_{y_i} y} e^{-jk_{z_i} z}$$

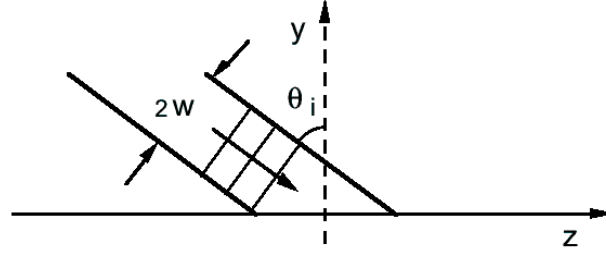


Figura 1.16: incidenza obliqua di un fascio a sezione limitata su un'interfaccia piana.

ove

$$k_{z_i} = \sqrt{k^2 - k_{y_i}^2}$$

con:

$$\begin{aligned} k_{y_i} &= k \cos \theta_i = k_o \sqrt{\varepsilon_r} \cos \theta_i \\ k_{z_i} &= k \sin \theta_i \end{aligned}$$

Si introduca adesso il troncamento oltre la larghezza $2w$. Allora:

$$\underline{E}_i(y, z) = \underline{x}_o e^{jk_{y_i}y} e^{-jk_{z_i}z} W(y, z) \quad (1.39)$$

essendo W una sorta di funzione involuppo (diversa da zero solo sul fascio, dove vale uno).

Un campo siffatto si potrà sempre esprimere, come già visto, attraverso uno spettro di onde piane:

$$\underline{E}_i(y, z) = \underline{x}_o \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_y) e^{jk_y y} e^{-jk_z z} dk_y$$

Inoltre è stato mostrato precedentemente che se $2w \gg \lambda$, allora lo spettro angolare $\tilde{E}(k_y)$ è una funzione *sinc* molto piccata, che sarà centrata, in questo caso di incidenza obliqua, su k_{y_i} . Quindi il contributo principale all'integrale precedente sarà per k_y intorno a k_{y_i} . Si effettui allora nell'integrale la sostituzione:

$$k'_y = k_y - k_{y_i} \quad \implies \quad k_y = k_{y_i} + k'_y$$

in modo da centrare $\tilde{E}(k_{y_i} + k'_y)$ intorno a $k'_y = 0$. D'altra parte per esprimere anche k_z in termini di k'_y , dalla relazione di dispersione si ha:

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{k^2 - k_y^2} = \sqrt{k^2 - (k_{y_i} + k'_y)^2} = \\ &= \sqrt{(k^2 - k_{y_i}^2) - 2k_{y_i}k'_y - k'^2_y} = \sqrt{k_{z_i}^2 - 2k_{y_i}k'_y - k'^2_y} = \\ &= k_{z_i} \sqrt{1 - 2\frac{k_{y_i}}{k_{z_i}}\frac{k'_y}{k_{z_i}} - \left(\frac{k'_y}{k_{z_i}}\right)^2} \end{aligned}$$

Siccome il contributo principale all'integrale è per piccoli valori di k'_y , si ha che, a parte il caso di incidenza quasi normale ($k_{z_i} \approx 0$) (che però non ha grande interesse nelle strutture debolmente guidanti per ottica integrata, dove anzi $\theta_i \approx \pi/2$), il secondo e il terzo addendo sotto la radice sono piccoli. Usando allora la ben nota approssimazione (serie di Mac Laurin troncata al primo ordine):

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

si ha (trascurando completamente il terzo addendo):

$$k_z \approx k_{z_i} \left(1 - \frac{k_{y_i}}{k_{z_i}} \frac{k'_y}{k_{z_i}} \right) = k_{z_i} - \frac{k_{y_i}}{k_{z_i}} k'_y$$

Ponendo:

$$k'_z = -\frac{k_{y_i}}{k_{z_i}} k'_y$$

si ottiene

$$k_z \approx k_{z_i} + k'_z$$

formalmente analoga alla:

$$k_y = k_{y_i} + k'_y$$

Ovviamente si ha però:

$$k_y'^2 + k_z'^2 \neq k^2$$

Si ricava allora per l'integrale spettrale:

$$\underline{E}_i(y, z) = \underline{x}_o e^{jk_{y_i}y} e^{-jk_{z_i}z} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_{y_i} + k'_y) e^{jk'_y y} e^{-jk'_z z} dk'_y$$

Dunque comparando quest'ultima con la (1.39) si conclude che la funzione inviluppo ha la seguente espressione spettrale:

$$W(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_{y_i} + k'_y) e^{jk'_y y} e^{-jk'_z z} dk'_y$$

Per ottenere adesso il campo riflesso, si consideri la generica onda piana elementare dello sviluppo del campo incidente:

$$\underline{x}_o e^{j(k_{y_i} + k'_y)y} e^{-j(k_{z_i} + k'_z)z} \frac{1}{2\pi} \tilde{E}(k_{y_i} + k'_y) dk'_y$$

Essa subirà all'interfaccia una moltiplicazione per $\Gamma^{\text{TE}}(k_y)$ e l'inversione del segno dell'esponentiale lungo y :

$$\underline{x}_o e^{-j(k_{y_i} + k'_y)y} e^{-j(k_{z_i} + k'_z)z} \frac{1}{2\pi} \tilde{E}(k_{y_i} + k'_y) \Gamma^{\text{TE}}(k_{y_i} + k'_y) dk'_y$$

Si ammetta che sia $|\Gamma^{\text{TE}}| = 1$ (riflessione totale) per tutti i valori di k'_y per i quali $\tilde{E}(k_{y_i} + k'_y)$ è apprezzabilmente diversa da zero, cioè in pratica tutte le componenti del fascio incidente siano totalmente riflesse. Per cui:

$$\Gamma^{\text{TE}}(k_{y_i} + k'_y) \approx e^{j\Phi^{\text{TE}}(k_{y_i} + k'_y)}$$

È noto infatti che un'onda totalmente riflessa subisce uno sfasamento all'interfaccia. Essendo inoltre k'_y piccolo nella regione significativa, allora Φ^{TE} , come funzione di k'_y , si può espandere in serie di Mac Laurin e si può troncare lo sviluppo al primo ordine:

$$\Phi^{\text{TE}}(k_{y_i} + k'_y) \approx \Phi^{\text{TE}}(k_{y_i}) + \left. \frac{\partial \Phi^{\text{TE}}(k_{y_i} + k'_y)}{\partial k'_y} \right|_{k'_y=0} k'_y$$

Ponendo:

$$\Delta y = \left. \frac{\partial \Phi^{\text{TE}}(k_{y_i} + k'_y)}{\partial k'_y} \right|_{k'_y=0} = \left. \frac{\partial \Phi^{\text{TE}}(k_y)}{\partial k_y} \right|_{k_y=k_{y_i}}$$

si ha allora per il campo riflesso globale:

$$\underline{E}_r(y, z) = \underline{x}_o e^{-jk_{y_i}y} e^{-jk_{z_i}z} e^{j\Phi^{\text{TE}}(k_{y_i})} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_{y_i} + k'_y) e^{-jk'_y(y-\Delta y)} e^{-jk'_z z} dk'_y$$

Nel caso in cui fosse:

$$\left. \frac{\partial \Phi^{\text{TE}}(k_y)}{\partial k_y} \right|_{k_y=k_{y_i}} = 0$$

si avrebbe $\Delta y = 0$ e il fascio riflesso sarebbe dato da

$$\underline{E}_r(y, z) = \underline{x}_o e^{-jk_{y_i}y} e^{-jk_{z_i}z} e^{j\Phi^{\text{TE}}(k_{y_i})} W(-y, z)$$

Ci sarebbe cioè proprio un ribaltamento del fascio intorno all'asse z . In questo caso il fascio riflesso sarebbe identico in forma a quello incidente, viaggierebbe verso l'alto allontanandosi dall'interfaccia, a partire da dove arriva il fascio incidente; ci sarebbe poi uno sfasamento $\Phi^{\text{TE}}(k_{y_i})$ (come peraltro avviene sempre nella riflessione totale).

Tuttavia in realtà sarà:

$$\left. \frac{\partial \Phi^{\text{TE}}(k_y)}{\partial k_y} \right|_{k_y=k_{y_i}} = \Delta y \neq 0$$

e allora:

$$\underline{E}_r(y, z) = \underline{x}_o e^{-jk_{y_i}y} e^{-jk_{z_i}z} e^{j\Phi^{\text{TE}}(k_{y_i})} W[-(y - \Delta y), z]$$

cosicché il fascio riflesso appare traslato, o *shiftato*, rispetto a y dell'ammontare Δy e poi ribaltato intorno all'asse z (vedi Fig. 1.17).

Lo shift corrispondente lungo z (detto *shift di Goos-Hänchen*) sarà:

$$\Delta z = \Delta y \tan \theta_i$$

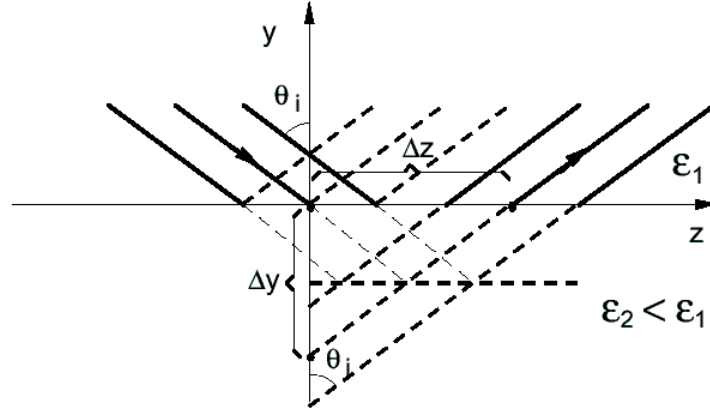


Figura 1.17: rappresentazione grafica del fenomeno dello shift di Goos-Hänchen.

Sebbene esso sia generalmente di piccola entità, gioca un ruolo importante per capire i fenomeni di accoppiamento in guida.

Dalla Fig. 1.17 si vede che si può anche interpretare il fenomeno come una riflessione convenzionale avente luogo però su un'interfaccia virtuale spostata verso il basso di una distanza $d = \Delta y/2$. Utilizzando le espressioni per i coefficienti di Fresnel, si ricava per le due polarizzazioni il risultato:

$$d^{\text{TE}} = 1/\alpha_{y_2} \quad d^{\text{TM}} = q/\alpha_{y_2}$$

con

$$q = \frac{k_{y_1}^2 + \alpha_{y_2}^2}{k_{y_1}^2 + \left(\frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}}\right)^2 \alpha_{y_2}^2} \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}}$$

ove il numero a pedice indica il mezzo. In strutture tipiche dell'ottica integrata si ha, come già visto, $\varepsilon_{r_1} \approx \varepsilon_{r_2}$, per cui $q \approx 1$ e d è circa, essendo pari a $1/\alpha_{y_2}$ per entrambe le polarizzazioni, la profondità di penetrazione a $1/e$ dei campi evanescenti nel mezzo 2. Per cui è come se si abbassasse l'interfaccia della profondità di penetrazione.

Si noti infine l'analogia di questa trattazione con quella per la velocità di gruppo di un pacchetto d'onde (cfr. Campi Elettromagnetici I). Si tratta in entrambi i casi di effetti (in uno sviluppo di Fourier lì temporale, qui spaziale) dovuti alla non idealità dell'onda (non più puramente monocromatica in quel caso, non più puramente piana ora).

1.11 Richiami sull'onda laterale

Come si è visto, un'onda piana non si può considerare come la sorgente di un'onda laterale a causa del suo fronte d'onda infinito. Si consideri allora il caso più semplice dopo l'onda piana: una sorgente di linea (*line source*), ossia un filo indefinito di raggio infinitesimo, che

eccita un'onda cilindrica circolare isotropa. Consideriamo la geometria in Fig. 1.18 (il filo è posto in $z = h$). Nel punto di osservazione P il campo è dato dalla sovrapposizione di tre contributi:

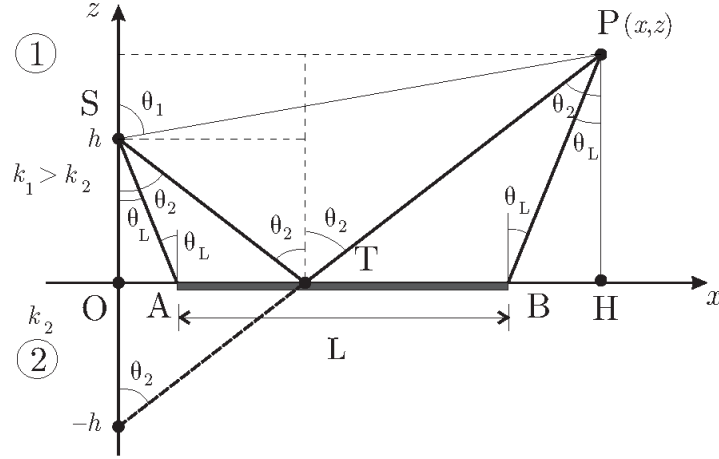


Figura 1.18: percorsi possibili dalla sorgente S al punto di osservazione P

$$\underline{E}_{tot} = \underline{E}_{dir} + \underline{E}_{rifl} + \underline{E}_{lat} \quad (1.40)$$

Le espressioni delle lunghezze elettriche percorse dai raggi diretto e riflesso sono rispettivamente:

$$\phi_{dir} = k_1 \overline{SP} = k_1 \frac{x}{\sin \theta_1} \quad (1.41)$$

$$\phi_{rifl} = k_1 (\overline{ST} + \overline{TP}) = k_1 \frac{x}{\sin \theta_2} \quad (1.42)$$

Poiché è sempre per costruzione $\theta_2 < \theta_1$, si ha $\sin \theta_2 < \sin \theta_1$ e quindi $\phi_{dir} < \phi_{rifl}$.

Per l'onda laterale si ha:

$$\phi_{lat} = k_1 (\overline{SA} + \overline{BP}) + k_2 \overline{AB} = k_1 (\overline{SA} + \overline{BP}) + k_1 \sin \theta_L \overline{AB} \quad (1.43)$$

essendo per la legge di Snell $k_1 \sin \theta^i = k_2 \sin \theta^t$, con, in questo caso, $\theta^i = \theta_L$ e $\theta^t = \pi/2$, per cui $k_1 \sin \theta_L = k_2$. Osservando inoltre che

$$\overline{SA} = \frac{h}{\cos \theta_L}, \quad \overline{BP} = \frac{z}{\cos \theta_L}, \quad \overline{AB} = x - \overline{OA} - \overline{BH}, \quad \overline{OA} = h \tan \theta_L, \quad \overline{BH} = z \tan \theta_L$$

si ha:

$$\begin{aligned} \phi_{lat} &= k_1 \frac{h+z}{\cos \theta_L} + k_1 \sin \theta_L [x - (h+z) \tan \theta_L] = \\ &= k_1 (h+z) \cos \theta_L + k_1 \sin \theta_L x = k_1 x \left[\frac{h+z}{x} \cos \theta_L + \sin \theta_L \right] \end{aligned} \quad (1.44)$$

Si osservi ora che:

$$\begin{aligned}\overline{OT} &= h \tan \theta_2 \\ \overline{TH} &= z \tan \theta_2\end{aligned}$$

D'altra parte si ha:

$$\frac{\cos(\theta_2 - \theta_L)}{\sin \theta_2} = \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_L + \sin \theta_2 \sin \theta_L}{\sin \theta_2} = \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \cos \theta_L + \sin \theta_L$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\overline{OT} + \overline{TH} &= x = (h + z) \tan \theta_2 \implies \frac{h + z}{x} = \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \\ \implies \frac{\cos(\theta_2 - \theta_L)}{\sin \theta_2} &= \frac{h + z}{x} \cos \theta_L + \sin \theta_L\end{aligned}$$

e dunque risulta:

$$\phi_{lat} = k_1 \frac{x}{\sin \theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_L)$$

Confrontando ora ϕ_{lat} e ϕ_{rifl} si ha che valgono le relazioni $\phi_{lat} \leq \phi_{rifl}$ e

$$\phi_{lat} = \phi_{dir} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_L)$$

È evidente dunque che esiste un intervallo di valori di h, x, z (e quindi di θ_1) per cui è anche $\phi_{lat} < \phi_{dir}$. In questo caso l'onda laterale arriva prima sia del raggio diretto sia di quello riflesso. Ciò avviene perché l'onda laterale viaggia in parte all'interno del mezzo meno denso, dove la velocità della luce è maggiore che nel mezzo più denso. Arrivando per prima, l'onda laterale può essere facilmente individuata osservando la risposta nel tempo di un impulso corto emesso dalla sorgente di linea. In particolare, questo è vero nel caso in cui P sia molto prossimo alla superficie di separazione tra i due mezzi. In questo caso si ha $\theta_1 \cong \theta_2$ e perciò $\phi_{lat} < \phi_{dir}$ se θ_2 è sufficientemente maggiore di θ_L .

Nel caso in cui il mezzo 1 sia dissipativo e il mezzo 2 relativamente privo di perdite, risulta che l'onda laterale si attenua nei tratti $\overline{SA}$ e $\overline{BP}$, percorsi nel mezzo 1, mentre nel tratto $\overline{AB}$, percorso nel mezzo 2, essa si propaga senza praticamente attenuarsi. Se allora risulta $\overline{SA} + \overline{BP} \ll \overline{AB}$, sicché $\overline{AB} \cong \overline{ST} + \overline{TP} \cong \overline{SP}$, le tre onde percorrono circa lo stesso tragitto, lungo il quale però soltanto l'onda laterale non subisce attenuazioni: nel punto P il suo contributo al campo risulta dunque dominante ed essa può quindi essere facilmente identificata sperimentalmente.

Nel caso in cui il mezzo 1 rappresenti l'aria e il mezzo 2 la terra, l'onda laterale può essere collegata a fenomeni sismici. Sia l'impulso sismico (il terremoto) originato in un punto della superficie all'istante $t = 0$, causato ad esempio da un'esplosione. L'onda elastica si propaga più velocemente nella terra che nell'aria. Così i fronti d'onda all'istante generico t nell'aria e nella terra sono differenti sulla superficie terrestre. D'altra parte non

ci dovrebbe essere nessuna discontinuità nel fronte d'onda, pertanto è necessario ipotizzare un'onda il cui fronte va dal fronte d'onda nella terra a quello nell'aria. Questo particolare fronte d'onda si propaga esattamente nella stessa direzione dell'onda laterale. Inoltre, sulla terra quest'onda arriva prima e quindi è chiamata anche onda di testa (*head wave*) o onda di terra (*ground wave*) o precursore.

Nel campo della sismologia, la crosta terrestre si comporta come un mezzo più denso in cui la velocità delle onde elastiche è maggiore di quella negli strati più profondi. Quindi, per un rivelatore posto sulla superficie della terra, ogni perturbazione sismica si manifesta prima per mezzo di un'onda laterale, che è poi seguita dalle onde diretta e riflessa.

Tornando ai fenomeni elettromagnetici, l'onda laterale si verifica al confine inferiore della ionosfera (che è un particolare plasma, ossia un gas ionizzato) in cui, al di sopra della pulsazione di plasma ω_p , si ha $n_p = \sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2} < 1$ e quindi tale mezzo risulta meno denso dell'aria. Un altro caso importante dove l'onda laterale gioca un ruolo dominante è il problema della comunicazione tra due punti in un mezzo assorbente come l'oceano, la terra o una foresta.

A causa dell'assorbimento, le onde diretta e riflessa sono quasi completamente attenuate nel mezzo. Ma l'onda laterale si propaga dall'antenna alla superficie soffrendo un po' di attenuazione, poi si propaga nell'aria senza attenuazione per una lunga distanza e poi arriva al ricevitore. Così la comunicazione in questo caso avviene solamente attraverso l'onda laterale. La comunicazione tra due punti in una foresta è spesso fatta attraverso l'onda laterale. Nell'oceano si preferisce la comunicazione acustica (SONAR) o a frequenze *acustiche* (VLF, LF).

Capitolo 2

Metodo della risonanza trasversa

2.1 Introduzione al concetto di risonanza

Il metodo della risonanza trasversa è strettamente legato a un formalismo di tipo circuitale equivalente impiegato per modellare un sistema elettromagnetico. Come è noto, ad esempio, data una generica guida d'onda metallica (supposta uniforme lungo la direzione longitudinale z , cioè tale che tutte le sezioni ortogonali a z siano uguali in forma e dimensioni), è possibile associare a ciascun modo (ad esempio TE o TM) di propagazione lungo z una linea di trasmissione equivalente. Questa possibilità è appunto legata all'uniformità della struttura lungo una certa direzione, che permette di separare le dipendenze trasversa e longitudinale.

Una tale linea equivalente avrà per costante di propagazione il k_z del modo considerato e per impedenza caratteristica la Z_o del modo stesso, in generale complesse, se si include nell'analisi la presenza delle perdite nei conduttori, nei dielettrici, o per radiazione se la guida d'onda è aperta o comunque dotata di aperture. Se tali perdite non sono presenti, allora la costante di propagazione e l'impedenza caratteristica sono reali se il modo in questione può propagarsi (è sopra cutoff), sono puramente immaginarie (nelle guide metalliche chiuse) al di sotto del cutoff. Ovviamente il fatto che un generico modo possa propagarsi non significa che effettivamente si propaghi: deve anche essere eccitato in ingresso, o in corrispondenza di una discontinuità.

Nell'ipotesi di propagazione unimodale (solo il modo dominante sopra cutoff) è possibile, come è noto, considerare una sola linea di trasmissione equivalente. In corrispondenza ad una disuniformità longitudinale (discontinuità) oppure ad una curva, si ha l'eccitazione di modi di ordine superiore, il cui effetto però, trattandosi di modi sotto cutoff (sempre nel caso di guida metallica chiusa), è localizzato, e se ne può tenere conto mediante un'impedenza concentrata. Si può ovviamente avere propagazione unimodale anche con modi diversi dal dominante, ma con opportune cautele nell'eccitazione e con l'eventuale impiego di soppressori di modo, realizzabili per esempio con lamine longitudinali di grafite (materiale che presenta forti perdite) collocate in modo opportuno.

D'altra parte, nella generica linea di trasmissione equivalente devono valere, in una

sezione qualsiasi, le condizioni di continuità sia per la tensione che per la corrente. Tali condizioni infatti discendono dalle condizioni di continuità per le componenti tangenziali del campo elettrico e di quello magnetico che coincidono qui, nell'ipotesi che le caratteristiche del mezzo non varino lungo una sezione trasversale, ma possano variare longitudinalmente, con le componenti trasverse, cui sono legate come è noto la tensione e la corrente della linea equivalente.

Se si considera allora una sezione generica della linea in assenza di generatori, ovvero di grandezze impresse, l'impedenza $\vec{Z}$ (rapporto tra tensione e corrente) che si vede guardando verso destra deve, per la suddetta continuità, essere uguale ed opposta a quella $\overleftarrow{Z}$ che si vede guardando verso sinistra (la differenza di segno è dovuta al verso positivo convenzionale per la corrente). La stessa cosa vale per le ammettenze $\vec{Y}$ e $\overleftarrow{Y}$. In una generica sezione dovrà dunque valere la condizione:

$$\overleftarrow{Z} + \vec{Z} = 0 \quad \text{oppure} \quad \overleftarrow{Y} + \vec{Y} = 0$$

In termini di coefficiente di riflessione (rapporto tra onda riflessa e onda diretta) si ha, tenendo conto dei versi opposti:

$$\overleftarrow{\Gamma} \cdot \vec{\Gamma} = 1$$

Si può vedere che tali condizioni coincidono con le condizioni di risonanza della rete equivalente. La condizione di risonanza corrisponde al verificarsi delle cosiddette oscillazioni libere della rete equivalente, oscillazioni cioè in assenza di eccitazioni (di tensione o di corrente).

Per applicare la condizione di risonanza si può scegliere una sezione qualsiasi della linea. I primi membri delle uguaglianze precedenti saranno in generale funzioni di z , della frequenza e del numero d'onda, oltre che dei parametri geometrici e fisici del mezzo, tuttavia gli zeri di tali espressioni risultano invarianti rispetto alla scelta di z , che quindi può essere fatta nel modo più comodo e semplice per lo sviluppo dei calcoli.

Le considerazioni precedenti sulla condizione di risonanza per una linea di trasmissione nella direzione longitudinale z (risonanza *longitudinale*), possono servire ad esempio a determinare le frequenze di risonanza di un risonatore costituito da una struttura guidante uniforme, chiusa agli estremi da due pareti metalliche perfettamente conduttrici. In questo caso la costante di propagazione longitudinale k_z risulta determinata dalle condizioni al contorno agli estremi, mentre il numero d'onda trasverso k_t risulta determinato dallo studio del corrispondente problema in guida. È possibile allora ricavare la frequenza di risonanza per un generico modo risonante dalla relazione di separabilità, che come è noto discende dalla soluzione dell'equazione di Helmholtz per separazione delle variabili:

$$\omega^2 \mu \varepsilon = k^2 = k_t^2 + k_z^2$$

(con $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$ in coordinate cartesiane, separando ulteriormente le variabili).

Quanto detto finora può essere generalizzato a comprendere il caso dei cosiddetti modi trasversi e della cosiddetta rete equivalente trasversa. Infatti, come è noto, non è detto che la direzione di propagazione dell'energia in una generica guida d'onda coincida con la

direzione lungo la quale si stabilisce una linea di trasmissione equivalente. È possibile, come è già stato visto, stabilire anche in una direzione trasversa, seguendo lo stesso procedimento matematico, una linea di trasmissione equivalente, avente come costante di propagazione il numero d'onda trasverso nella direzione considerata e come impedenza caratteristica quella relativa al tipo di modo scelto. Si parlerà allora di rete equivalente trasversa. In particolare, per disporre delle espressioni per l'impedenza caratteristica, si richiede in genere che manchi una delle sei componenti del campo elettromagnetico, ma non necessariamente quella nella direzione in cui si è stabilita la linea: non si deve cioè trattare necessariamente di modi TE e TM lungo quella direzione.

Come esempio si consideri il caso di una guida d'onda, in cui è nota la frequenza alla quale si lavora, mentre occorre determinare la costante di propagazione longitudinale k_z . L'applicazione della condizione di risonanza ad una direzione trasversa (dove il nome di metodo della risonanza *trasversa*) consente di ottenere la cosiddetta equazione caratteristica, o relazione di dispersione, e quindi di determinare il numero d'onda trasverso k_t , e ricavare poi il k_z , per un generico modo di propagazione, in funzione della frequenza e dei parametri geometrici e fisici del mezzo.

2.2 Applicazioni elementari del metodo della risonanza trasversa a guide metalliche

Si ricaveranno ora col metodo della risonanza trasversa alcuni risultati elementari già noti. Come primo esempio si consideri la guida d'onda a piatti (metallici) paralleli (di larghezza infinita) riempita di dielettrico (Fig. 2.1).

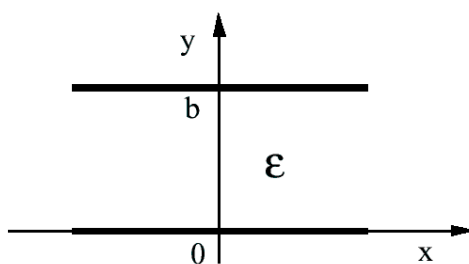


Figura 2.1: guida d'onda a piatti metallici paralleli riempita di dielettrico.

Osservando tale guida trasversalmente lungo la direzione y , essa appare come una porzione di spazio libero (sezione indefinita) limitata da due pareti, supposte perfettamente conduttrici, per $y = 0$ e $y = b$. Tali pareti impongono l'annullarsi del campo elettrico tangenziale (trasverso rispetto ad y). Se si stabilisce una linea di trasmissione equivalente lungo y , con la posizione:

$$\underline{E}_t(x, y, z) = V(y) \underline{e}(x, z)$$

si ha allora l'annullarsi della tensione nella linea equivalente e pertanto una chiusura in corto circuito. Si ha dunque la situazione di Fig. 2.2, ove k_y e Z_o sono la costante di propagazione e l'impedenza caratteristica della linea.

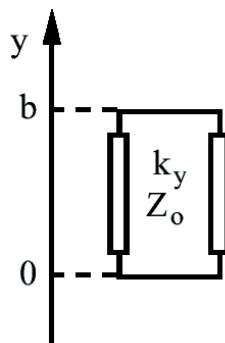


Figura 2.2: rete equivalente trasversale per la guida a piatti piani paralleli.

Applicando ora la condizione di risonanza trasversale, e scegliendo come sezione di riferimento (peraltro, come si è detto, arbitraria) la $y = 0$, si ha:

$$\downarrow Z = 0$$

Ricordando poi l'espressione per l'impedenza d'ingresso di un tratto di linea di trasmissione di lunghezza b chiuso in corto circuito, si ha:

$$\uparrow Z = j Z_o \tan(k_y b)$$

Per cui dalla condizione di risonanza segue:

$$j Z_o \tan(k_y b) = 0 \implies \tan(k_y b) = 0 \implies k_y b = n\pi \implies k_y = \frac{n\pi}{b}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

Si noti che in questo caso semplice non è stato necessario conoscere esplicitamente l'espressione di Z_o : le conclusioni ottenute valgono per tutti i modi.

Si osservi poi come il limitare la struttura guidante nella direzione y ha portato ad una discretizzazione dei valori possibili per il numero d'onda corrispondente k_y . Questo fatto ha un preciso paragone in meccanica quantistica nel problema della particella in una buca di potenziale unidimensionale di altezza infinita, mentre la particella libera (assenza di forze, potenziale meccanico costante) corrisponde allo spazio libero (assenza di discontinuità, indice di rifrazione costante). In particolare esiste infatti una corrispondenza tra l'indice di rifrazione ed il potenziale, e tra l'equazione di Helmholtz (o meglio la sua approssimazione detta equazione d'onda parassiale) e quella di Schrödinger. A una barriera di potenziale di altezza infinita corrisponde un valore infinito dell'indice di rifrazione, attribuibile al conduttore perfetto.

Nella direzione z si avrà un'onda progressiva (dipendenza esponenziale di tipo $e^{-jk_z z}$ se l'onda si propaga nel verso positivo delle z , mentre nella direzione y si ha un'onda stazionaria (risonanza) con dipendenza trigonometrica del tipo $\sin / \cos(n\pi y/b)$ (si ha il seno per il campo elettrico trasverso, che si deve annullare sui piatti).

Si noti inoltre come si sia ottenuta per k_y un'equazione trascendente, anche se risolubile analiticamente. Per strutture appena più complicate, è necessario ricorrere, come già visto, ad una soluzione numerica (o grafica).

Supponendo di limitarsi a considerare campi che non dipendano da x (per cui $\partial/\partial x = 0$, $k_x = 0$) si ha allora per la costante di propagazione longitudinale:

$$k_{zn}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{n \lambda_o}{2b}\right)^2}$$

Si è ottenuta in questo caso una relazione di dispersione in forma esplicita, che in casi appena più complicati non è raggiungibile.

Si consideri ora come esempio successivo quello della guida d'onda (metallica) rettangolare riempita di dielettrico (Fig. 2.3).

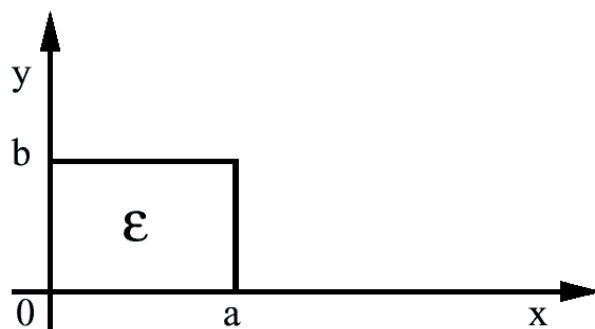


Figura 2.3: guida d'onda metallica rettangolare riempita di dielettrico.

Se si osserva tale struttura trasversalmente, ad esempio lungo la direzione x , essa appare come una guida a piatti paralleli di altezza b chiusa per $x = 0$ e $x = a$ da due pareti perfettamente conduttrici. Se si stabilisce una linea di trasmissione lungo x , con la posizione:

$$\underline{E}_t(x, y, z) = V(x) \underline{e}(y, z)$$

tale linea risulterà chiusa in corto circuito, e si avrà la situazione di Fig. 2.4.

Scegliendo come sezione di riferimento ad esempio la $x = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{Z} &= 0 \\ \overrightarrow{Z} &= j Z_o \tan(k_x a) \end{aligned}$$

Per cui la condizione di risonanza trasversa impone:

$$j Z_o \tan(k_x a) = 0 \implies \tan(k_x a) = 0 \implies k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots$$

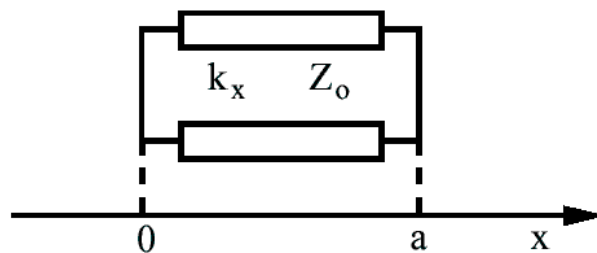


Figura 2.4: rete equivalente trasversa per la guida rettangolare.

Anche in questo caso non è stato necessario conoscere esplicitamente l'espressione di Z_o e le conclusioni valgono sia per modi TE che TM.

L'imporre alla struttura dei limiti anche nella direzione x ha portato ad una discretizzazione per i valori possibili anche di k_x (in questo caso l'analogo quantistico sarebbe la particella in una buca di potenziale bidimensionale di altezza infinita). Lungo la direzione z si ha un'onda progressiva, lungo le direzioni x ed y si hanno onde stazionarie (risonanze). Come è noto, per la costante di propagazione longitudinale si ha:

$$k_{zmn}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{m \lambda_o}{2a}\right)^2 - \left(\frac{n \lambda_o}{2b}\right)^2}$$

Nel caso infine del risonatore parallelepipedo di lunghezza l (guida d'onda rettangolare chiusa da due ulteriori pareti metalliche per $z = 0$ e $z = l$) si ha un'onda stazionaria (dipendenza trigonometrica) anche lungo z (risonanza longitudinale): anche i possibili valori per k_z vengono discretizzati (particella in una scatola con differenza di potenziale infinita rispetto all'esterno), e l'incognita diviene la frequenza di risonanza.

2.3 Onde superficiali guidate da uno strato (*slab*) dielettrico su un piano metallico

Si consideri la propagazione di onde guidate da uno strato dielettrico, di spessore t e costante dielettrica ε . Si supponga inoltre inizialmente che tale strato giaccia su un piano metallico (Fig. 2.5).

Anche in questo caso siamo interessati ad onde che si propaghino nel verso positivo delle z , per cui la dipendenza da z sarà del tipo $e^{-jk_z z}$. Si desidera determinare il k_z in funzione della frequenza e dei parametri geometrici e fisici. Allo scopo si applicherà il metodo della risonanza trasversa ad una linea di trasmissione equivalente stabilita nella direzione y . Si avrà pertanto la situazione di Fig. 2.6.

Ancora una volta la presenza del piano metallico per $y = 0$ corrisponde ad una chiusura della linea in corto circuito. Si noti come in questo caso, per la presenza di due mezzi diversi

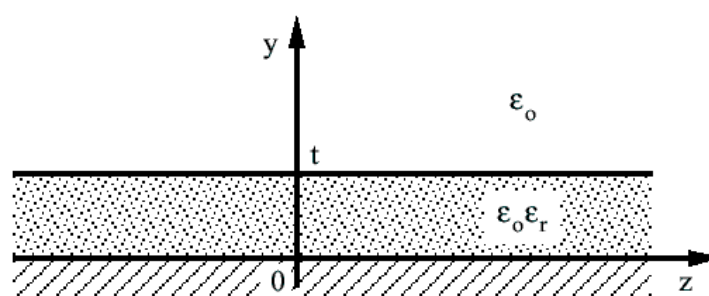


Figura 2.5: sezione longitudinale della guida a *slab* dielettrico su piano di massa.

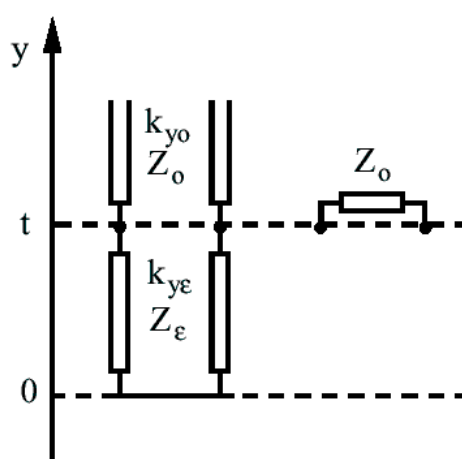


Figura 2.6: rete equivalente trasversale per lo *slab* dielettrico su piano di massa.

per $0 < y < t$ e per $y > t$, le caratteristiche della linea (impedenza caratteristica e costante di propagazione) sono diverse nelle due regioni.

In generale valgono peraltro le relazioni di separabilità. Si ha nell'aria:

$$k_o^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o = \left(\frac{2\pi}{\lambda_o} \right)^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = k_x^2 + k_{y_o}^2 + k_z^2$$

mentre nel dielettrico:

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 = k_o^2 \mu_r \varepsilon_r = k_x^2 + k_{y_\varepsilon}^2 + k_z^2$$

Si noti che i numeri d'onda k_x e k_z (cioè quelli relativi alle direzioni tangenti alla superficie di separazione) devono avere gli stessi valori nelle due regioni. Ciò è conseguenza delle condizioni di continuità, alla superficie di separazione, per le componenti tangenziali di $\underline{E}$ e di $\underline{H}$, continuità che deve valere in ogni punto della superficie stessa. A tale continuità corrisponde, come si è visto, la continuità sia della tensione che della corrente lungo la linea rispettivamente: essa è stata imposta giustapponendo direttamente le due linee diverse.

Inoltre, essendo la struttura indefinita lungo la direzione x , si assumerà per semplicità indipendenza dalla variabile x ($\partial/\partial x = 0$, $k_x = 0$). E supporremo inizialmente assenza di perdite, per cui $k_z = \beta$. Nelle nostre ipotesi si ha, se $\mu_r = 1$ (mezzo non ferromagnetico):

$$\begin{aligned} k_o^2 = k_{y_o}^2 + k_z^2 &\implies k_{y_o} = \sqrt{k_o^2 - k_z^2} = k_o \sqrt{1 - \left(\frac{k_z}{k_o} \right)^2} = \sqrt{k_{y_\varepsilon}^2 - k_o^2 (\varepsilon_r - 1)} \\ k^2 = k_{y_\varepsilon}^2 + k_z^2 &\implies k_{y_\varepsilon} = \sqrt{k_o^2 \varepsilon_r - k_z^2} = k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{k_z}{k_o} \right)^2} = \sqrt{k_{y_o}^2 + k_o^2 (\varepsilon_r - 1)} \end{aligned}$$

Dunque dei tre numeri d'onda in gioco k_z , k_{y_o} e k_{y_ε} , uno soltanto è indipendente. La scelta di quale assumere come variabile nella risoluzione numerica dipende da considerazioni di carattere matematico sui punti di diramazione delle radici quadrate, che richiedono opportune cautele. In particolare è conveniente avere a che fare con funzioni pari rispetto alle radici, in modo che la funzione stessa non venga modificata (e quindi l'equazione non cambi) se cambia la determinazione della radice, cioè il suo segno. Si vedrà che da questo punto di vista nelle equazioni seguenti conviene scegliere k_{y_o} come variabile indipendente.

Infine, poiché la struttura è supposta indefinita per $y > t$ (e quindi assenza di riflessioni dall'alto) la linea si assumerà adattata per $y > t$, e quindi potrà essere chiusa per $y = t$ sull'impedenza caratteristica Z_o . L'ipotesi di considerare la regione superiore indefinita non è poi così irrealistica, a patto che il decadimento del campo a partire dall'interfaccia dielettrica sia abbastanza veloce, poiché il campo elettromagnetico, divenuto praticamente trascurabile ad una certa distanza, “non vede” per così dire cosa c'è oltre. Per $y > t$ si assumerà allora la presenza della sola onda progressiva verso l'alto, e si avranno campi con dipendenza da y nell'aria del tipo $e^{-jk_{y_o}(y-t)}$.

Scegliendo allora come sezione di riferimento quella per $y = t$ si ha:

$$\begin{aligned}\overset{\uparrow}{Z} &= Z_o \\ \overset{\downarrow}{Z} &= j Z_\varepsilon \tan(k_{y_\varepsilon} t)\end{aligned}$$

Per cui la condizione di risonanza impone:

$$Z_o \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j Z_\varepsilon \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

Per procedere oltre è però ora necessario precisare le espressioni per le impedenze caratteristiche. Tali espressioni dipendono dal tipo di modo che si considera. È noto infatti che, ad esempio, per modi TM rispetto ad y si ha:

$$Z_o^{\text{TM}} = \frac{k_{y_o}}{\omega \varepsilon_o} \quad Z_\varepsilon^{\text{TM}} = \frac{k_{y_\varepsilon}}{\omega \varepsilon}$$

mentre per modi TE rispetto a y si ha:

$$Z_o^{\text{TE}} = \frac{\omega \mu_o}{k_{y_o}} \quad Z_\varepsilon^{\text{TE}} = \frac{\omega \mu}{k_{y_\varepsilon}}$$

Considerando il caso TM e sostituendo le espressioni suddette si ha l'equazione caratteristica:

$$\frac{k_{y_o}}{\omega \varepsilon_o} \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j \frac{k_{y_\varepsilon}}{\omega \varepsilon_o \varepsilon_r} \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

e, semplificando:

$$k_{y_o} \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j \frac{k_{y_\varepsilon}}{\varepsilon_r} \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

Nel caso TE si ha invece una diversa equazione caratteristica:

$$\frac{\omega \mu_o}{k_{y_o}} \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j \frac{\omega \mu}{k_{y_\varepsilon}} \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

ossia (ipotesi $\mu_r = 1$):

$$k_{y_\varepsilon} \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j k_{y_o} \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

coincidente con la (1.32) del § 1.4, ricavata imponendo esplicitamente le condizioni al contorno.

In questo senso il metodo della risonanza trasversa si presenta come una procedura che sistematicamente ed in modo abbreviato tiene conto delle condizioni al contorno e di continuità che devono essere considerate in relazione all'equazione di Helmholtz, consentendo di ricavare direttamente l'equazione di dispersione. Il metodo tuttavia non dà informazioni sulla configurazione del campo elettromagnetico, per conoscere la quale è necessario determinare le costanti A e C presenti nelle (1.25) e (1.26) del § 1.4 per il caso TE, mediante l'esplicita imposizione delle condizioni di continuità (1.30) e (1.31) dello stesso paragrafo,

e la risoluzione del sistema omogeneo, il che è equivalente alla risoluzione esplicita delle equazioni delle linee, cioè alla determinazione degli andamenti di tensione e corrente.

Le equazioni trascendenti di cui sopra devono essere risolte numericamente per ottenere la relazione di dispersione, sfruttando le relazioni di separabilità. Si noti che in questo caso, a differenza degli esempi precedenti, i numeri d'onda trasversi dipendono dalla frequenza (oltre che ovviamente dalle dimensioni geometriche). Inoltre la relazione di dispersione $k_z(\omega)$ non si ottiene più in forma esplicita, ma risulta implicitamente dalla risoluzione numerica, ossia per ogni valore di frequenza occorre risolvere l'equazione trascendente. La dipendenza dei numeri d'onda trasversi dalla frequenza ha inoltre come conseguenza il fatto che la distribuzione trasversale del campo cambia con la frequenza, al contrario di quanto accadeva nelle guide con un solo dielettrico. Si noti infine come le equazioni caratteristiche viste siano invarianti rispetto a cambi di segno di k_{y_ε} , mentre variano rispetto al segno di k_{y_o} . Di conseguenza, come già notato, conviene scegliere come incognita del problema k_{y_o} piuttosto che k_{y_ε} , in quanto l'equazione rimane insensibile rispetto alla determinazione scelta per la radice quadrata. Se si prende invece come incognita k_z , come sembrerebbe più naturale, compaiono nell'equazione due radici diverse, aumentando il numero delle possibili determinazioni.

Dalle relazioni di separabilità nell'aria e nel dielettrico si vede che, nell'ipotesi di assenza di perdite (k e k_z reali), k_{y_o} e k_{y_ε} sono o puramente reali o puramente immaginari. Dalle equazioni caratteristiche viste si può escludere che siano entrambi reali. Si può vedere che non possono essere neanche entrambi immaginari. In particolare si considerano qui onde superficiali o evanescenti, ossia onde che si attenuano senza propagarsi allontanandosi verso l'alto dalla superficie $y = t$, e risultano quindi confinate nelle vicinanze della superficie stessa. Dovrà essere allora k_{y_o} puramente immaginario e negativo, ossia $k_{y_o} = -j|k_{y_o}| = -j\alpha_{y_o}$ (con $|k_{y_o}| = \alpha_{y_o} = \sqrt{k_z^2 - k_o^2} = k_o\sqrt{(k_z/k_o)^2 - 1}$), per cui si avrà una dipendenza da y nell'aria del tipo $e^{-\alpha_{y_o}(y-t)}$.

In corrispondenza alla sezione $y = t$ si ha riflessione totale, come anche del resto in corrispondenza al piano metallico inferiore, per cui nel dielettrico si avrà, nella direzione y , un'onda stazionaria, con dipendenza trigonometrica da y e numero d'onda k_{y_ε} reale. Peraltro, una volta imposto k_{y_ε} reale, k_{y_o} deve essere immaginario per poter soddisfare l'equazione caratteristica. Si ricordi inoltre che i modi di radiazione (k_{y_ε} e k_{y_o} reali) non sono tenuti a soddisfare l'equazione caratteristica.

Con queste posizioni l'equazione caratteristica TM diviene:

$$|k_{y_o}| \cos(k_{y_\varepsilon} t) = \frac{k_{y_\varepsilon}}{\varepsilon_r} \sin(k_{y_\varepsilon} t)$$

Una tale equazione è risolubile nel campo reale, e questo rende più semplice una soluzione numerica (o rende possibile una soluzione grafica).

Per illustrare il comportamento dispersivo conviene in genere far riferimento a grandezze normalizzate (adimensionali), in modo che le curve di dispersione risultino di validità più generale. In particolare si considera in ordinata la costante di fase normalizzata β/k_o . Questo rapporto si esprime a volte anche come λ_o/λ_g (con λ_o lunghezza d'onda nel vuoto e λ_g lunghezza d'onda in guida essendo, come è noto, $\lambda_o = 2\pi/k_o$ e $\lambda_g = 2\pi/\beta$); oppure come

c/v_{ph} (con c velocità della luce nel vuoto e v_{ph} velocità di fase, essendo $c = \omega/k_o = \lambda_o f$ e $v_{ph} = \omega/\beta = \lambda_g f$).

La quantità β/k_o viene anche detta *indice di rifrazione efficace* n_{eff} della struttura guidante, ed il suo quadrato β^2/k_o^2 viene detto *costante dielettrica (relativa) efficace* $\varepsilon_{r_{\text{eff}}}$. Questo deriva dall'osservazione che in un mezzo omogeneo (spazio libero) la costante di propagazione k è pari a $k_o n$, oppure, nell'ipotesi $\mu_r = 1$, a $k_o \sqrt{\varepsilon_r}$. Allora la struttura guidante con due mezzi si può pensare in un certo senso come un unico mezzo, di indice di rifrazione n_{eff} e di costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r_{\text{eff}}}$, in quanto si ha appunto per la costante di propagazione:

$$\beta = k_o \left(\frac{\beta}{k_o} \right) = k_o n_{\text{eff}} = k_o \sqrt{\varepsilon_{r_{\text{eff}}}}$$

Ovviamente un tale mezzo avrebbe in un certo senso caratteristiche intermedie fra l'aria ed il dielettrico, per cui dovrà essere:

$$1 < \frac{\beta}{k_o} = n_{\text{eff}} = \sqrt{\varepsilon_{r_{\text{eff}}}} < n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

Per il fatto che $\beta > k_o$ e quindi $v_{ph} < c$ si dice che l'onda in questione è “lenta” (*slow wave*).

In ascissa si considera la lunghezza d'onda normalizzata con lo spessore di dielettrico, ossia $t/\lambda_o \propto t f \propto k_o t$.

In ottica integrata si considerano grandezze ancora più normalizzate:

- includendo nella normalizzazione la costante dielettrica relativa, definendo ad esempio, come si è già visto, una frequenza normalizzata $\nu = k_o \sqrt{\varepsilon_r - 1} t$;
- introducendo, per trattare in modo unitario i casi dello slab simmetrico e di quello asimmetrico, un opportuno fattore di asimmetria (nullo nel caso simmetrico);
- unificando nella trattazione i modi TE e TM, introducendo opportuni fattori, in modo da ottenere formalmente la stessa equazione caratteristica, in particolare nel caso debolmente guidante, di pratico interesse.

Tuttavia con queste normalizzazioni così spinte, le curve di dispersione e le equazioni caratteristiche non sono immediatamente decifrabili, non si scorge più il significato fisico in modo intuitivo.

Si noti che l'equazione di dispersione si può riscrivere in termini esclusivamente di queste quantità normalizzate. Nel caso TM si ha infatti, inserendo le relazioni di separabilità:

$$k_o \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} \cos \left[k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} t \right] + \frac{j k_o}{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} \sin \left[k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} t \right] = 0$$

e, dividendo per k_o :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} \cos \left[2\pi \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} \frac{t}{\lambda_o} \right] + \frac{j}{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} \sin \left[2\pi \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o} \right)^2} \frac{t}{\lambda_o} \right] = 0$$

In modo analogo si può fare nel caso TE. Si ottiene il risultato:

$$\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \cos \left[2\pi \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \frac{t}{\lambda_o} \right] + j \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \sin \left[2\pi \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \frac{t}{\lambda_o} \right] = 0$$

Entrambe le equazioni caratteristiche risultano dunque della forma:

$$f \left(\frac{\beta}{k_o}, \frac{t}{\lambda_o}, \varepsilon_r \right) = 0$$

ove ε_r appare come parametro (adimensionale).

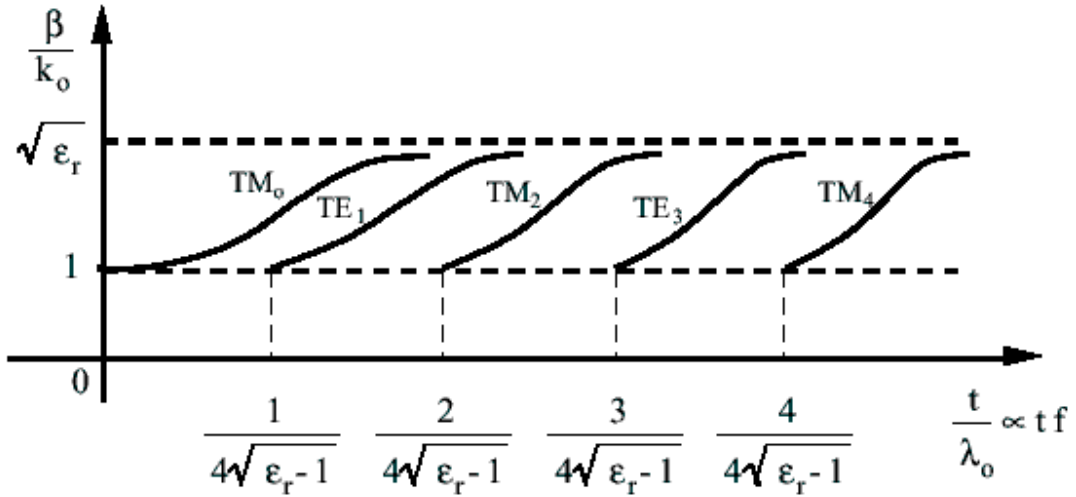


Figura 2.7: curve di dispersione per i modi dello *slab* dielettrico su piano di massa.

Operando una risoluzione numerica delle equazioni caratteristiche, le curve di dispersione risultano del tipo di Fig. 2.7. Si vede che a basse frequenze (o piccoli spessori) per tutti i modi $\beta/k_o \rightarrow 1$ fino a raggiungere tale valore ($k_{y_o} = 0$, $\alpha_{y_o} = 0$). Questo corrisponde fisicamente al fatto che in tali condizioni la maggior parte del campo è nell'aria, avendosi solo una leggera attenuazione. Man mano però che il campo si estende maggiormente nell'aria, esso diventa sempre più debole, supponendo realisticamente che abbia energia finita, fino a perdere significato fisico. È questa la condizione di cutoff del modo guidato, diverso da quello delle guide chiuse. Al di sotto del cutoff la soluzione matematica prolungata diviene complessa, e si hanno le onde *leaky* (cfr. § 1.7), che risultano onde “veloci” (*fast wave*), essendo $\beta < k_o$.

Nel caso invece di alte frequenze (o grandi spessori) si ha per tutti i modi $\beta/k_o \rightarrow \sqrt{\varepsilon_r}$, ed il campo tende ad essere completamente confinato nel dielettrico. Infatti al crescere della frequenza (a spessore costante, è questo ovviamente il caso di maggior interesse pratico) si ha che $\alpha_{y_o} \rightarrow \infty$, e quindi il campo tende ad annullarsi subitaneamente al di fuori del

dielettrico. D'altra parte, se si fa crescere t (a frequenza costante) (e allora $k_{y_\varepsilon} \rightarrow 0$), il dielettrico tende a riempire completamente la regione. Si noti peraltro che la condizione $f \rightarrow \infty$ corrisponde a $\lambda \rightarrow 0$, per cui la dimensione t dello slab è talmente maggiore della lunghezza d'onda da potersi considerare praticamente infinita.

La curva più alta è quella del modo dominante, che risulta di tipo TM (ovviamente la struttura vista non può supportare modi TEM, per la presenza di due mezzi diversi, analogamente a quanto avviene ad esempio nella microstriscia). Tale modo come si vede è privo di cutoff, ossia può propagarsi a frequenze arbitrariamente basse e per spessori del dielettrico arbitrariamente piccoli. Quindi l'assenza del cutoff non è una prerogativa esclusiva dei modi TEM.

Passando ora all'esame dei modi di ordine superiore, si vede che si alternano soluzioni di tipo TM e TE. Inoltre tutti i modi superiori presentano il cutoff. Questo significa che abbassando la frequenza, oppure in alternativa diminuendo lo spessore del dielettrico, ad un certo punto tali modi non possono più propagarsi. È possibile dunque far operare la guida in regime unimodale, con il solo modo dominante TM_o , situazione che risulta la più semplice da trattare.

I valori di t/λ_o al cutoff possono essere facilmente ottenuti dall'equazione di dispersione, ponendo in essa $\beta/k_o = 1$ (ossia $k_{y_o} = 0$). Nel caso TM si ha, dalla forma normalizzata:

$$\frac{j}{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_r - 1} \sin \left(2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o} = n\pi = m \frac{\pi}{2}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ ed m pari $= 0, 2, 4, \dots$. Da cui:

$$\frac{t}{\lambda_o} = \frac{n}{2\sqrt{\varepsilon_r - 1}} = \frac{m}{4\sqrt{\varepsilon_r - 1}}$$

In base a questo indice m i modi possono essere etichettati come è stato già fatto in precedenza. Infatti di per sé la soluzione numerica non permette di riconoscere i modi l'uno dall'altro, se non dalla loro frequenza di cutoff. Si noti che la condizione precedente corrisponde, come già rilevato in precedenza, allo spessore elettrico:

$$k_{y_\varepsilon} t \Big|_{k_{y_o}=0} = n\pi = m \frac{\pi}{2} \quad \text{con } m \text{ pari} = 0, 2, 4, \dots$$

Nel caso TE si ha invece:

$$\sqrt{\varepsilon_r - 1} \cos \left(2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} = m \frac{\pi}{2}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ ed m dispari $= 1, 3, 5, \dots$. Da cui:

$$\frac{t}{\lambda_o} = \frac{2n + 1}{4\sqrt{\varepsilon_r - 1}} = \frac{m}{4\sqrt{\varepsilon_r - 1}}$$

Tale condizione corrisponde per lo spessore elettrico a:

$$k_{y_\varepsilon} t \Big|_{k_{y_o}=0} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} = m \frac{\pi}{2} \quad \text{con } m \text{ dispari} = 1, 3, 5, \dots$$

Al cutoff si hanno quindi esattamente m quarti d'onda all'interno del dielettrico, mentre al di sopra, come già visto nel § 1.4, se ne hanno più di m , ma meno di $m + 1$.

Per valori assegnati della frequenza e dello spessore del dielettrico, il numero di onde superficiali in grado di propagarsi risulta finito. Esse costituiscono quello che si dice lo spettro discreto dei modi guidati. Si tenga presente però che nel caso di strutture aperte come questa, allo spettro discreto dei modi guidati occorre aggiungere uno spettro continuo di modi di radiazione (e di modi evanescenti) (cfr. § 1.6). Tali modi possono essere più o meno eccitati a seconda del tipo di sorgente.

2.4 Guida d'onda a *slab* simmetrico. Simmetrie e bisezioni.

Si consideri ora uno strato dielettrico (*slab*) di spessore $2t$ circondato di aria da ambo i lati (*slab* simmetrico).

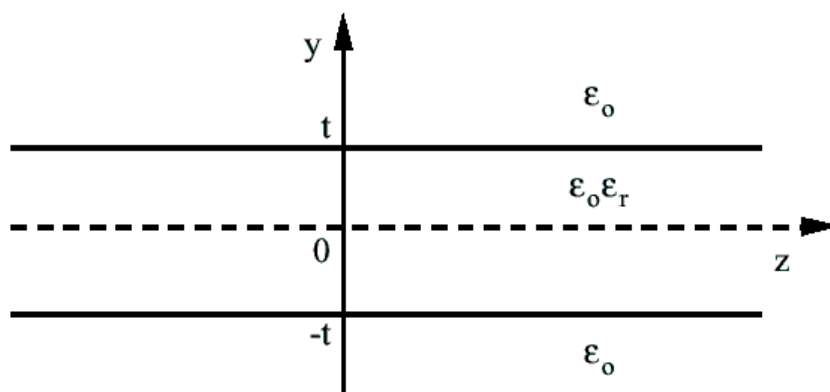


Figura 2.8: sezione longitudinale della guida a *slab* dielettrico simmetrico.

Anche in questo caso interessa la propagazione nel verso positivo di z (dipendenza del tipo $e^{-jk_z z}$), e si supporrà $k_x = 0$ (problema bidimensionale).

Come si vede, la struttura risulta simmetrica rispetto al piano mediano orizzontale $y = 0$. A causa allora della simmetria, si può vedere (cfr. teorema di Bartlett in teoria dei circuiti) che in corrispondenza a tale piano deve annullarsi o la componente tangenziale del campo elettrico o quella del campo magnetico. Nel primo caso quindi un piano fisico perfettamente conduttore può sostituire il piano mediano geometrico, non alterando la configurazione di campo, poiché non altera le condizioni al contorno. Nel secondo caso si userà la cosiddetta parete magnetica perfetta. Da un punto di vista circuitale si ha, rispettivamente, la chiusura della linea in corto circuito o in circuito aperto.

Con riferimento alla componente tangenziale del campo elettrico (qui E_x per i TE, E_z per i TM), il primo caso corrisponde a modi dispari rispetto al piano mediano (annullamento della suddetta componente), il secondo caso a modi pari (massimo o minimo per la

suddetta componente, cioè annullamento della derivata, e quindi della componente tangenziale del campo magnetico (qui H_z per i TE, H_x per i TM), e dunque modi dispari rispetto al campo magnetico). Si può anche dire allora che la simmetria della struttura impone ai modi di essere o pari o dispari rispetto al piano di simmetria.

La struttura è dunque bisezionabile (e quindi semplificabile) in queste due maniere, e si avranno pertanto quattro tipi di soluzioni modali:

1. modi TM con bisezione in corto circuito;
2. modi TE con bisezione in corto circuito;
3. modi TM con bisezione in circuito aperto;
4. modi TE con bisezione in circuito aperto.

È chiaro che le situazioni 1) e 2) corrispondono al problema esaminato nel paragrafo precedente. Nel caso (duale) di bisezione in circuito aperto il modo dominante (privo di cutoff) risulta di tipo TE. Un grafico qualitativo globale delle curve di dispersione è riportato in Fig. 2.9.

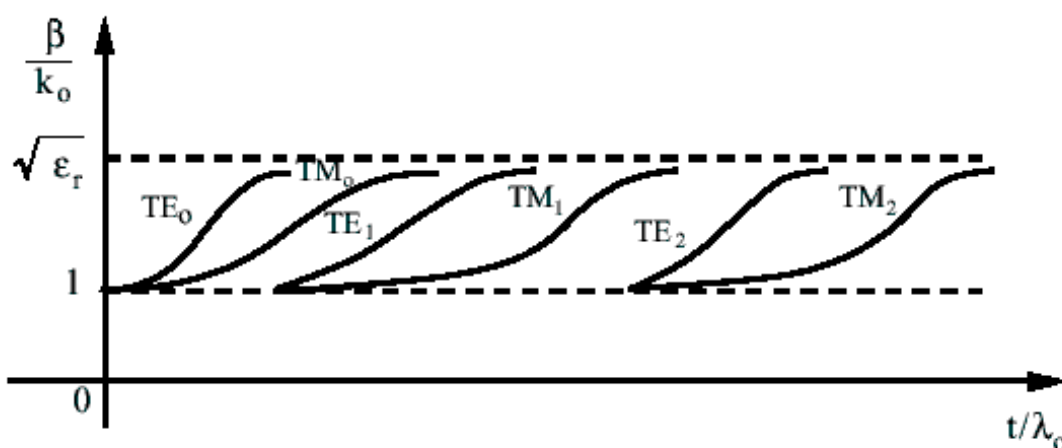


Figura 2.9: curve di dispersione per i modi dello *slab* dielettrico simmetrico.

Si noti che i modi TE e TM con lo stesso indice hanno lo stesso valore di taglio. I valori al taglio sono quelli già visti precedentemente.

L'indice pari indica che il modo TE o TM è pari (con riferimento però ad $\underline{E}$ e ad $\underline{H}$ rispettivamente, è dispari rispetto all'altro campo). Analogamente per l'indice dispari. Per le configurazioni modali (ampiezze del campo elettrico tangenziale) si ha la situazione di Fig. 2.10.

In questo caso l'indice modale m indica che la componente principale di campo (E_x per i TE, H_x per i TM) ha $(m + 1)$ estremali all'interno dello slab. Si noti la coincidenza della metà superiore delle sagome del campo del TM_0 e del TE_1 con gli andamenti visti per lo *slab* su piano di massa nel paragrafo 1.4. Questo deriva dalle proprietà di simmetria.

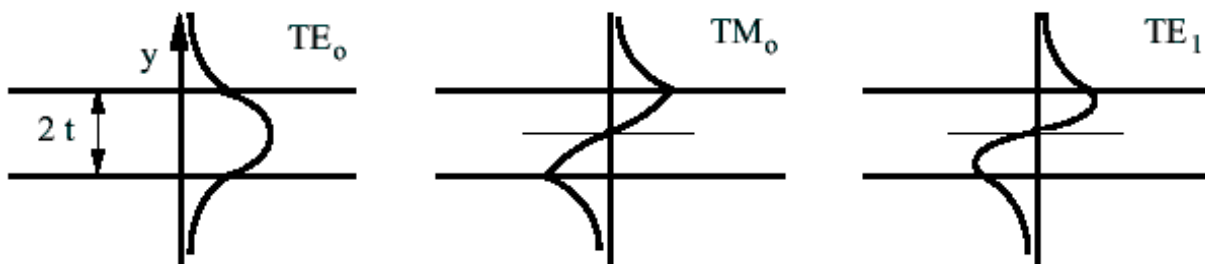


Figura 2.10: alcune configurazioni di campo elettrico tangenziale per i modi dello *slab* dielettrico simmetrico.

2.4.1 Slab simmetrico, metodo della risonanza trasversa

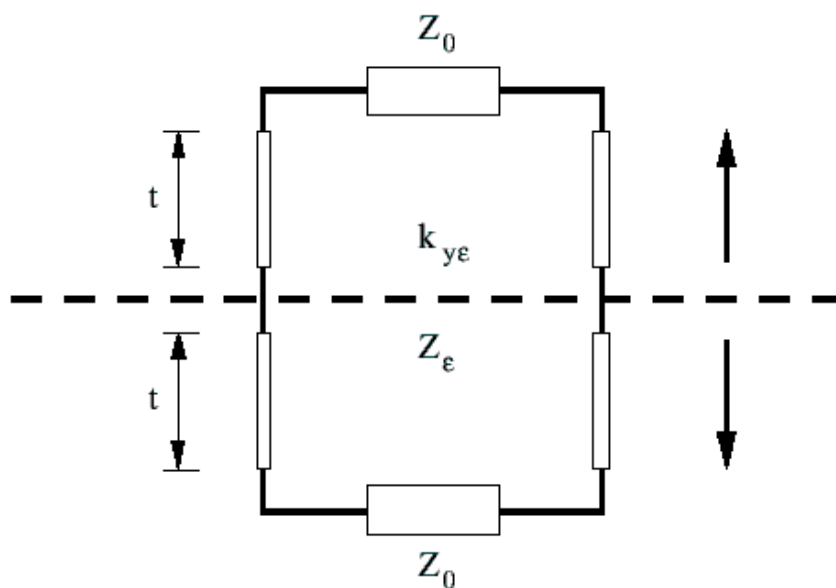


Figura 2.11: rete equivalente trasversa per lo *slab* dielettrico simmetrico.

Si ponga il riferimento esattamente al centro, come mostrato in Fig. 2.11. In questo caso, vista la simmetria, si ha $\overset{\uparrow}{Z} = \overset{\downarrow}{Z}$, per cui dalla $\overset{\uparrow}{Z} + \overset{\downarrow}{Z} = 0$ segue $2\overset{\uparrow}{Z} = 0$ e quindi $\overset{\uparrow}{Z} = 0$, con:

$$\overset{\uparrow}{Z} = Z_\epsilon \frac{Z_o \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_\epsilon \sin(k_{y_\epsilon} t)}{Z_\epsilon \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_o \sin(k_{y_\epsilon} t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_o \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_\epsilon \sin(k_{y_\epsilon} t) = 0$$

L'equazione ottenuta coincide esattamente con quella relativa ad uno slab dielettrico di spessore t su un piano metallico.

Dove sono finite allora le soluzioni per il caso di bisezione con parete magnetica perfetta? Per capirlo bisogna ricordare che stavolta le due forme della condizione di risonanza trasversa (con le impedenze e con le ammettenze) non sono più fra loro dipendenti. Infatti dalla

$$\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = 0$$

segue in genere

$$\frac{1}{\overleftarrow{Y}} + \frac{1}{\overrightarrow{Y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overrightarrow{Y} + \overleftarrow{Y}}{\overleftarrow{Y} \overrightarrow{Y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = 0$$

e viceversa, tranne però il caso (ed è proprio questo) in cui sia $\overleftarrow{Y} = 0$ o $\overrightarrow{Y} = 0$, oppure viceversa $\overleftarrow{Z} = 0$ o $\overrightarrow{Z} = 0$. E allora, non essendo più dipendenti, si devono imporre separatamente, se si vogliono avere tutte le soluzioni possibili.

Se si applica la condizione per le ammettenze, si ottiene:

$$Y_o \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Y_\epsilon \sin(k_{y_\epsilon} t) = 0$$

che fra l'altro coincide evidentemente (visto che $\overset{\uparrow}{Y} = 1/\overset{\uparrow}{Z}$) con la condizione di annullamento del denominatore della frazione che esprimeva $\overset{\uparrow}{Z}$, ossia:

$$Z_\epsilon \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_o \sin(k_{y_\epsilon} t) = 0$$

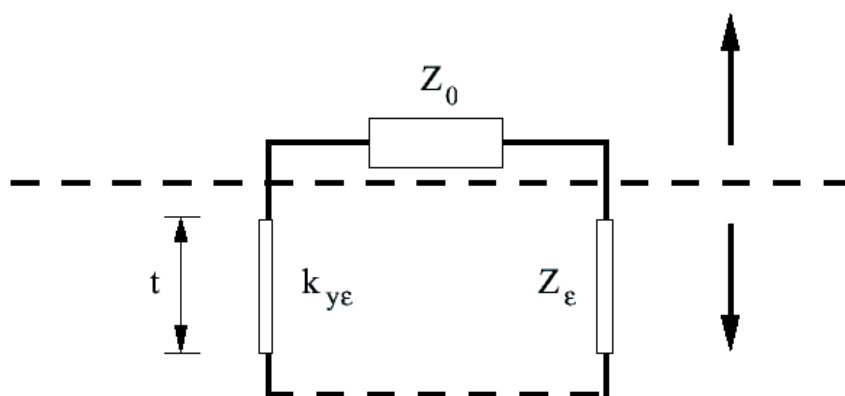


Figura 2.12: rete equivalente trasversa per la guida a *slab* dielettrica bisezionata con una parete magnetica perfetta.

Controlliamo ora che queste ultime equazioni corrispondano a considerare una bisezione in circuito aperto, indicato in Fig. 2.12 convenzionalmente con un tratteggio. Applicando la condizione con riferimento alla sezione in alto della linea di trasmissione rappresentata in figura, si ha:

$$\overset{\uparrow}{Z} = Z_o \quad \overset{\downarrow}{Z} = -j Z_\epsilon \cot(k_{y_\epsilon} t)$$

come si vede dalla formula generale per l'impedenza d'ingresso di un tratto di linea chiuso su un carico, mandando all'infinito l'impedenza di carico (circuito aperto). Si noti che ora è possibile lavorare di nuovo con le impedenze, poiché questa struttura bisezionata non è più simmetrica, e le due forme della condizione di risonanza sono nuovamente dipendenti ed equivalenti. Per cui risulta:

$$Z_o - j Z_\epsilon \cot(k_{y_\epsilon} t) = 0$$

e moltiplicando per $j \sin(k_{y_\epsilon} t)$ segue:

$$Z_\epsilon \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_o \sin(k_{y_\epsilon} t) = 0$$

come volevasi dimostrare.

Nel caso in cui si applica la condizione direttamente su un corto circuito, si ha $Z = 0$ ed $Y = \infty$, per cui la condizione per le ammettenze perde di significato e non si impone. Dualmente per il circuito aperto dove invece $Y = 0$ e $Z = \infty$, la condizione con le impedenze perde di significato. Però se, ad esempio in quest'ultimo caso, non si sceglie la sezione di riferimento direttamente sul circuito aperto, ma da un'altra parte, si può ancora, come del resto è stato appena fatto, lavorare con le impedenze.

Infine si osservi che se si prende la sezione di riferimento, anche nel caso della struttura simmetrica (struttura completa), non più al centro, ma ad esempio in corrispondenza a una delle interfacce (per cui $\overset{\uparrow}{Z} \neq \overset{\downarrow}{Z}$), tutto va ancora bene, ossia si trovano di nuovo tutte le soluzioni.

2.5 Approccio di ottica geometrica, condizione di congruenza di fase

Può essere utile a questo punto illustrare i legami fra il metodo della risonanza trasversa, finora applicato, e l'approccio seguito in ottica geometrica (teoria dei raggi). Tale approccio, che in generale risulta esatto solo asintoticamente (per $\lambda/t \rightarrow 0$, con t dimensione dell'ostacolo, ad esempio fessura di diffrazione: dunque, a parità di dimensioni, è sempre più preciso al crescere della frequenza), è invece rigoroso nel nostro caso di geometria piana e di mezzi omogenei a tratti. I raggi possono essere in questo caso associati ad onde piane uniformi che si propagano nella direzione dei raggi stessi, e che subiscono riflessione totale alle interfacce dielettriche. Si hanno precisamente, come si vede in Fig. 2.13, con riferimento ad uno *slab* dielettrico simmetrico, due onde piane uniformi.

Dall'orientazione del vettore d'onda seguono le relazioni:

$$\begin{aligned} \beta = k \cos \theta = k_o \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta &\implies \frac{\beta}{k_o} = \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta \implies \frac{\beta}{k_o} \leq \sqrt{\epsilon_r} \\ k_{y_\epsilon} = k \sin \theta & \end{aligned}$$

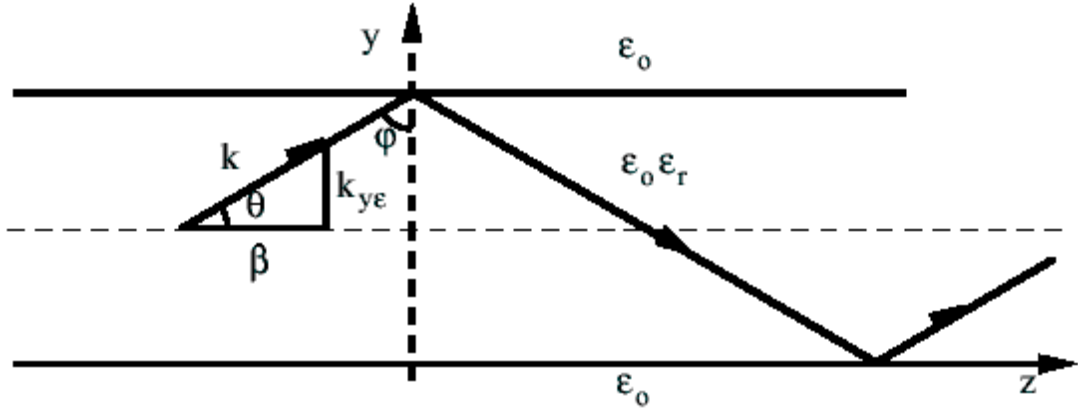


Figura 2.13: propagazione di onde piane uniformi all'interno di uno *slab* dielettrico simmetrico.

L'angolo limite per la riflessione totale φ_l è dato dalla: $\sin \varphi_l = n_o/n = 1/n = 1/\sqrt{\varepsilon_r}$, e dev'essere $\varphi > \varphi_l = \arcsin(1/\sqrt{\varepsilon_r})$. Ovviamente interessano per costruzione angoli compresi fra 0 e $\pi/2$, per cui il coseno è sempre decrescente ed il seno sempre crescente. Ne segue che deve essere:

$$\begin{aligned} \sin \varphi > \sin \varphi_l &\implies \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \implies \\ \cos \theta > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} &\left[\implies \theta < \theta_l = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\right) \right] \implies \frac{\beta}{k_o} > 1 \end{aligned}$$

e si ritrovano allora i limiti già visti per β/k_o nelle curve di dispersione.

Per $\beta/k_o < 1$ non si ha più riflessione totale, ma si ha perdita per radiazione verso l'esterno (rifrazione). La condizione di cutoff ($\beta/k_o = 1$) corrisponde allora all'incidenza con l'angolo limite.

È chiaro che se il dielettrico fosse limitato superiormente ed inferiormente da due piatti metallici (guida a piatti piani paralleli riempita di dielettrico), la riflessione totale avverrebbe per angoli qualsiasi e ci si potrebbe spingere fino a $\theta = \pi/2$ (per cui $\beta = 0$ e $k_{y\varepsilon} \equiv k$). In tale situazione non ci sarebbe più un flusso di energia lungo z , e si avrebbe soltanto una risonanza in direzione verticale (risonatore a piatti paralleli). La condizione di cutoff in una guida metallica corrisponde pertanto ad una pura risonanza trasversale.

Il modo dominante, che ha il valore massimo di β/k_o , ha anche allora il minimo valore di θ , per un certo valore di $t/\lambda \propto t f$, ossia è il più vicino alla direzione dell'asse z . Per avere proprio la direzione dell'asse z ($\theta = 0$, $k_{y\varepsilon} = 0$, $\beta \equiv k$, $\beta/k_o = \sqrt{\varepsilon_r}$) si dovrebbe trattare di un modo TEM^(z), che qui non può esistere (e che ci sarebbe invece in presenza dei due piatti metallici). Tuttavia, per un modo generico, al crescere di $t f$, l'angolo θ diminuisce, tendendo a zero per $t f \rightarrow \infty$. Si tende cioè proprio ad una configurazione TEM (onda piana uniforme lungo z) all'interno del dielettrico. Invece al diminuire di $t f$ (cioè avvicinandosi al cutoff) l'angolo θ aumenta, fino al valore massimo visto $\arccos(1/\sqrt{\varepsilon_r})$.

Si consideri ora la nota condizione di congruenza di fase per i raggi, che porta ad un insieme discreto per i valori dell'angolo θ . Si esamini la situazione in Fig. 2.14, con riferimento al caso più generale di *slab* asimmetrico.

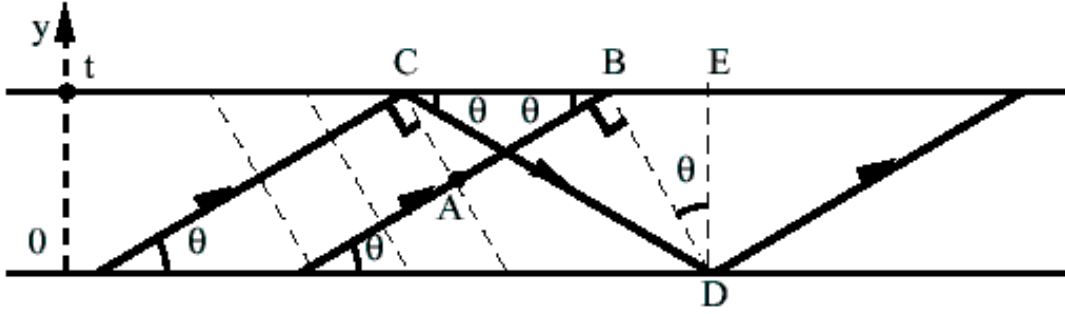


Figura 2.14: costruzione geometrica per illustrare la condizione di congruenza di fase per uno *slab* dielettrico generalmente asimmetrico.

La condizione di congruenza impone che, poiché le coppie di punti A,C e B,D si trovano sullo stesso fronte d'onda, e allora C precede la riflessione e D la segue, la fase accumulata (distribuita) nel percorso AB deve uguagliare, a meno di multipli di 2π , quella relativa al percorso CD:

$$-k_o \sqrt{\varepsilon_r} \overline{AB} + 2m\pi = -k_o \sqrt{\varepsilon_r} \overline{CD} + \Phi_C + \Phi_D$$

essendo Φ_C e Φ_D le variazioni (concentrate) di fase subite nelle riflessioni in C e in D rispettivamente, ossia le fasi dei corrispondenti coefficienti di riflessione (dipendenti come è noto da θ e dalla polarizzazione, TE o TM, e in generale diverse fra loro nel caso di *slab* asimmetrico); i segni negativi davanti alle lunghezze elettriche sono dovuti alla convenzione adottata per la fase delle onde piane. Si tratta, come si vedrà, di un'equazione nella variabile θ , che determina i valori possibili per l'angolo, corrispondenti ai valori possibili per β/k_o .

Infatti dalla geometria si vede che:

$$\overline{AB} = \overline{CB} \cos \theta; \quad \overline{CB} = \overline{CE} - \overline{BE}; \quad \overline{CE} = \frac{t}{\tan \theta}; \quad \overline{BE} = t \tan \theta;$$

per cui:

$$\begin{aligned} \overline{CB} &= \frac{t}{\tan \theta} - t \tan \theta = t \left(\frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta \right) \implies \\ \overline{AB} &= t \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \cos \theta = t \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \cos \theta = \\ &= t \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Si ha inoltre:

$$\overline{CD} = \frac{t}{\sin \theta}$$

Dalle relazioni geometriche scritte risulta:

$$\begin{aligned} -k(\overline{CD} - \overline{AB}) &= -k \left(\frac{t}{\sin \theta} - t \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right) = \\ &= -k t \frac{1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta} = -k t 2 \sin \theta (= -2 k_{y_\varepsilon} t) \end{aligned}$$

Per cui si ottiene la cercata equazione:

$$-k t 2 \sin \theta + \Phi_C(\theta) + \Phi_D(\theta) = 2 m \pi$$

ove il primo membro rappresenta la fase accumulata in un percorso di andata e ritorno lungo l'asse y (*round trip*) dal punto 0, comprese le riflessioni.

Tale relazione si può vedere come una condizione di risonanza trasversa, nella forma

$$\Gamma^\uparrow \cdot \Gamma^\downarrow = 1 \quad \Longrightarrow \quad \angle \Gamma^\uparrow + \angle \Gamma^\downarrow = 2 m \pi$$

Infatti, applicando quest'ultima alla sezione di riferimento $y = 0$, si ha [essendo, come è noto dalla teoria delle linee di trasmissione, $\Gamma(y) = \Gamma(0) e^{2jk_{y_\varepsilon} y}$, per cui $\Gamma(0) = \Gamma(t) e^{-2jk_{y_\varepsilon} t}$]:

$$\begin{aligned} \angle \Gamma^\uparrow &= -2k_{y_\varepsilon} t + \angle \Gamma(y = t) \\ \angle \Gamma^\downarrow &= \angle \Gamma(y = 0) \end{aligned}$$

con:

$$\angle \Gamma(y = t) = \Phi_C \quad \angle \Gamma(y = 0) = \Phi_D$$

Si ha infine:

$$-2k_{y_\varepsilon} t + \Phi_C + \Phi_D = 2m\pi$$

ossia proprio la condizione precedente. Come già detto, Φ_C e Φ_D sono diverse per modi TE e TM, per cui si hanno due equazioni caratteristiche diverse. La condizione nella forma $\overset{\uparrow}{Z} + \overset{\downarrow}{Z} = 0$ si ottiene prendendo la tangente dei due membri. In questo modo sparisce il termine con l'indice m . Per cui nell'equazione caratteristica di tipo $\overset{\uparrow}{Z} + \overset{\downarrow}{Z} = 0$ (oppure $\overset{\uparrow}{Y} + \overset{\downarrow}{Y} = 0$) i modi sono tutti mescolati (nella risoluzione numerica), mentre con la forma $\overset{\uparrow}{\Gamma} \cdot \overset{\downarrow}{\Gamma} = 1$ si riesce a tenerli separati. È possibile quindi seguire con certezza una ben precisa soluzione, evitando salti di modo.

Da un punto di vista matematico, quindi, la presenza di più modi si può semplicemente vedere legata al fatto che la fase del numero complesso 1 sia definita a meno di multipli di 2π .

2.6 Guida d'onda a slab asimmetrico

Si prenda ora in esame la guida d'onda a slab asimmetrico di Fig. 2.15 di spessore t .

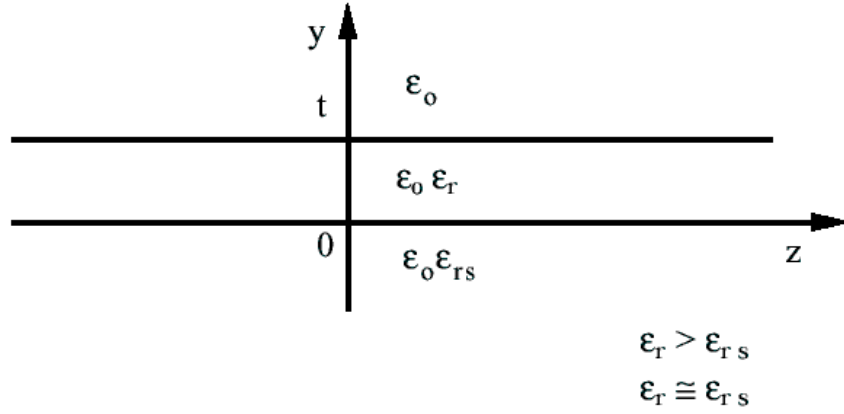


Figura 2.15: sezione longitudinale di una guida dielettrica a *slab* asimmetrico.

A differenza della situazione con lo slab in aria, la struttura non è più simmetrica (con modi pari e modi dispari), e si vedrà che ciò ha la conseguenza di non avere più soluzioni prive di cutoff. Inoltre i modi TM e TE di uguale indice non hanno più lo stesso valore di taglio.

In questo caso si hanno, come si è visto, tre diverse relazioni di separabilità. Nell'ipotesi consueta di indipendenza da x si ha:

$$\begin{aligned} k_{y_o} &= k_o \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \\ k_{y_\varepsilon} &= k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \\ k_{y_s} &= k_o \sqrt{\varepsilon_{rs} - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \end{aligned}$$

Nell'intervallo $1 < \sqrt{\varepsilon_{rs}} < \beta/k_o < \sqrt{\varepsilon_r}$ si ha k_{y_ε} reale (onda stazionaria nel film), k_{y_o} e k_{y_s} immaginari (attenuazione esponenziale nell'aria e nel substrato).

La condizione di cutoff ($\beta/k_o = \sqrt{\varepsilon_{rs}}$, $k_{y_s} = 0$) corrisponde ad un'incidenza con l'angolo limite (rispetto alla normale) $\varphi_l = \arcsin(n_s/n)$ all'interfaccia film-substrato. Andare oltre (angoli φ minori) corrisponderebbe ad una rifrazione nel substrato, ed il modo non sarebbe più guidato. Angoli minori anche del valore $\arcsin(1/n)$ corrisponderebbero a rifrazione sia nel substrato, che nell'aria. Le curve di dispersione sono del tipo di Fig. 2.16.

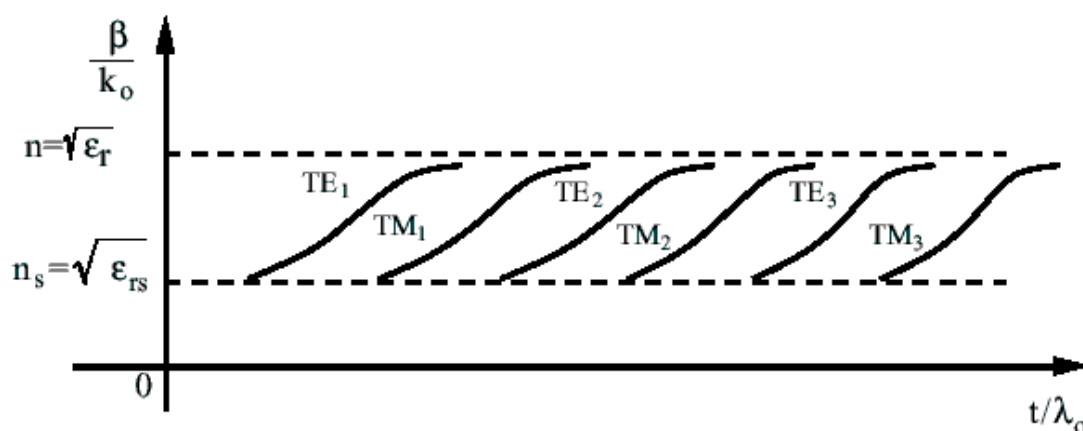


Figura 2.16: curve di dispersione per i modi della guida a *slab* dielettrico asimmetrico.

2.6.1 Slab asimmetrico, metodo della risonanza trasversa

La linea di trasmissione equivalente è del tipo di Fig. 2.17. Come caso particolare si ha lo slab simmetrico per $Z_s \equiv Z_o$. Scegliendo come sezione di riferimento quella per $y = 0$, si ha:

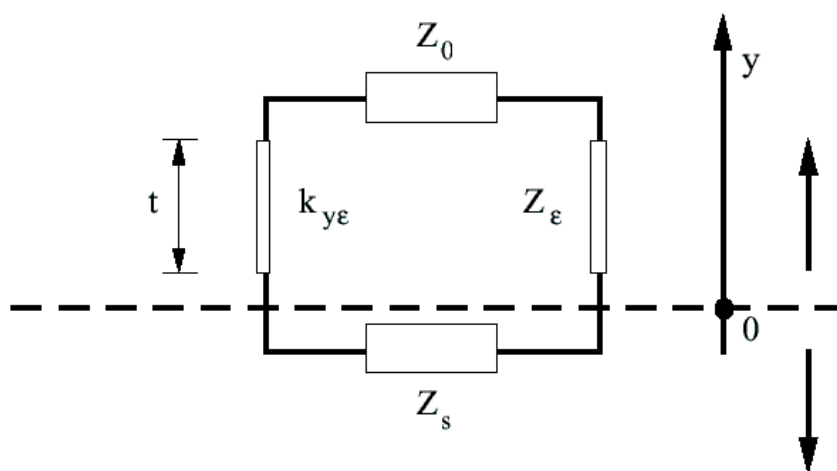


Figura 2.17: rete equivalente trasversa per la guida a *slab* dielettrico asimmetrico.

$$\downarrow Z = Z_s \quad \uparrow Z = Z_\epsilon \frac{Z_o \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_\epsilon \sin(k_{y_\epsilon} t)}{Z_\epsilon \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_o \sin(k_{y_\epsilon} t)}$$

per cui la condizione di risonanza impone:

$$Z_s \left[Z_\epsilon \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_o \sin(k_{y_\epsilon} t) \right] + Z_\epsilon \left[Z_o \cos(k_{y_\epsilon} t) + j Z_\epsilon \sin(k_{y_\epsilon} t) \right] = 0$$

Consideriamo in particolare la situazione di cutoff:

$$\frac{\beta}{k_o} = \sqrt{\varepsilon_{rs}} \quad k_{ys} = 0$$

Nel caso TM si ha

$$Z_s = \frac{k_{ys}}{\omega \varepsilon_o \varepsilon_{rs}} \quad \Longrightarrow \quad Z_s = 0$$

per cui rimane:

$$Z_o \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j Z_\varepsilon \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

equazione identica a quella dello slab su piano metallico, da particolarizzare al cutoff, con $\beta/k_o = \sqrt{\varepsilon_{rs}}$. Inserendo le espressioni per le impedenze si aveva:

$$k_{y_o} \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j \frac{k_{y_\varepsilon}}{\varepsilon_r} \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

Nel caso TE, invece, con $Z_s = \omega \mu / k_{ys}$, si può portare k_{ys} al numeratore del secondo addendo e poi azzerare. L'equazione restante è la:

$$Z_\varepsilon \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j Z_o \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

che inserendo le espressioni per le impedenze diventa:

$$k_{y_o} \cos(k_{y_\varepsilon} t) + j k_{y_\varepsilon} \sin(k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

da particolarizzare al cutoff. Essa differisce da quella appena vista del caso TM per l'assenza, a denominatore del secondo addendo, del termine ε_r .

Tornando al caso TM, ponendo $\beta/k_o = \sqrt{\varepsilon_{rs}}$ si ha l'equazione:

$$k_o \sqrt{1 - \varepsilon_{rs}} \cos(k_o \sqrt{\varepsilon_r - \varepsilon_{rs}} t) + j \frac{k_o \sqrt{\varepsilon_r - \varepsilon_{rs}}}{\varepsilon_r} \sin(k_o \sqrt{\varepsilon_r - \varepsilon_{rs}} t) = 0$$

Dividendo per k_o e per il coseno, e scrivendo $\sqrt{1 - \varepsilon_{rs}} = -j \sqrt{\varepsilon_{rs} - 1}$ (tenendo conto del fatto che nell'aria si ha attenuazione), si ottiene:

$$\tan \left(2\pi \sqrt{\varepsilon_r - \varepsilon_{rs}} \frac{t}{\lambda_o} \right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_{rs} - 1}}{\sqrt{\varepsilon_r - \varepsilon_{rs}}} \varepsilon_r > 0$$

Il secondo membro è una quantità positiva, quindi non ci può essere un modo TM privo di cutoff. Questo rimane vero anche nel caso TE, ove peraltro il valore di cutoff è più piccolo, non essendoci il fattore moltiplicativo ε_r . Per cui si spiegano i diagrammi di dispersione.

Volendo ritrovare il caso particolare di slab simmetrico si ha anche $\varepsilon_{rs} = 1$ (per cui anche $k_{y_o} = 0$ al cutoff, come già si sapeva), il secondo membro è nullo e si riottiene:

$$\sin \left(2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{t}{\lambda_o} = \frac{n}{2 \sqrt{\varepsilon_r - 1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sia per modi TE che TM. Ponendo $t \rightarrow 2t$ si riottengono i valori già visti.

2.7 Guida a piatti paralleli parzialmente riempita di dielettrico

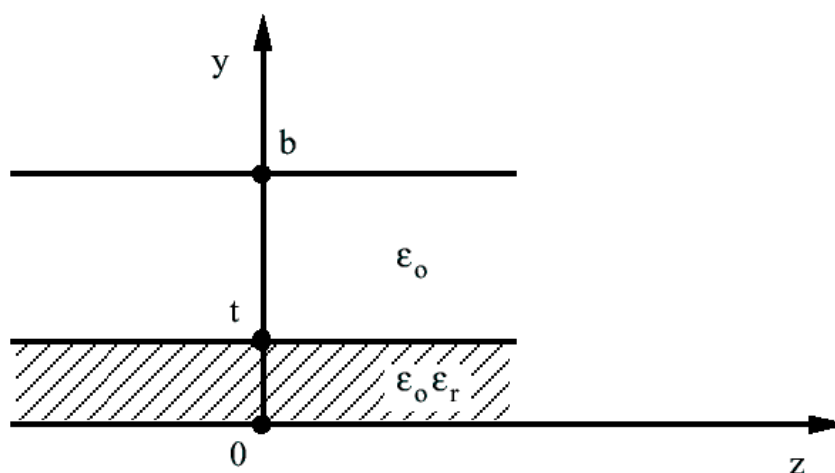


Figura 2.18: sezione longitudinale della guida a piatti piani paralleli parzialmente riempita di dielettrico.

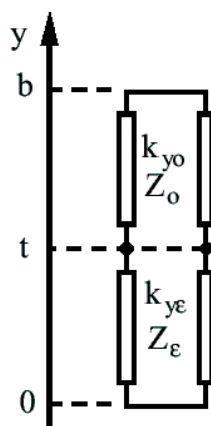


Figura 2.19: rete equivalente trasversa per la guida a piatti piani paralleli parzialmente riempita di dielettrico.

Si consideri ora una guida d'onda a piatti piani paralleli, parzialmente riempita di un dielettrico di spessore t (Fig. 2.18). Si fa nuovamente l'ipotesi $\partial/\partial x = 0$. Stabilendo una linea di trasmissione nella direzione y , si ha la rete equivalente trasversa di Fig. 2.19.

Scegliendo come sezione di riferimento l'interfaccia aria-dielettrico si ha:

$$\begin{aligned}\overset{\uparrow}{Z} &= j Z_o \tan [k_{y_o}(b-t)] \\ \overset{\downarrow}{Z} &= j Z_\varepsilon \tan (k_{y_\varepsilon} t)\end{aligned}$$

da cui l'equazione caratteristica:

$$Z_o \tan [k_{y_o}(b-t)] + Z_\varepsilon \tan (k_{y_\varepsilon} t) = 0$$

Le relazioni di separabilità sono le stesse del caso dello slab dielettrico su un piano di massa, per cui k_{y_o} e k_{y_ε} risultano o reali o immaginari in assenza di perdite (si noti che ora le perdite per radiazione non sono ovviamente possibili). Anche in questo caso si possono avere onde superficiali, con k_{y_ε} reale e k_{y_o} immaginario negativo, come si può verificare esaminando l'equazione caratteristica e tenendo conto delle proprietà della tangente: $\tan(-jz) = -j \tanh(z)$. Tuttavia adesso il decadimento del campo, allontanandosi dall'interfaccia, non sarà più esattamente esponenziale, perché la presenza del piatto metallico superiore impone l'annullamento esatto del campo elettrico tangenziale in corrispondenza ad esso. Per alte frequenze, peraltro, (campo più concentrato nel dielettrico) la differenza tra i due andamenti tende ad essere trascurabile.

Ponendo esplicitamente $k_{y_o} = -j\alpha_{y_o}$ si ha:

$$\begin{aligned}\overset{\uparrow}{Z} &= j Z_o \tan [-j\alpha_{y_o}(b-t)] = j Z_o (-j) \tanh [\alpha_{y_o}(b-t)] = Z_o \tanh [\alpha_{y_o}(b-t)] = \\ &= Z_o \tanh \left[k_o \sqrt{\left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2 - 1} (b-t) \right] = Z_o \tanh \left[2\pi \sqrt{\left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2 - 1} \left(\frac{b}{\lambda_o} - \frac{t}{\lambda_o} \right) \right]\end{aligned}$$

Si vede che nel limite $b \rightarrow \infty$ la $\tanh$ tende a 1, e si ha $\overset{\uparrow}{Z} \rightarrow Z_o$, ritrovando il caso dello slab sul piano conduttore. Lo stesso limite si ottiene, per fissate dimensioni, aumentando la frequenza, in quanto aumenta k_o e quindi α_{y_o} , cioè l'entità dell'attenuazione nell'aria.

Dalle relazioni di separabilità si vede che se l'onda è superficiale (k_{y_ε} reale e k_{y_o} immaginario negativo), si ha ancora $1 < \beta/k_o < \sqrt{\varepsilon_r}$ (in accordo con la nozione di indice di rifrazione efficace). Tuttavia essendo ora la struttura limitata superiormente (a differenza del caso dello slab su piano conduttore, in cui la struttura è aperta) si può anche assumere che siano reali entrambi i numeri d'onda k_{y_o} e k_{y_ε} (il che adesso è compatibile con l'equazione caratteristica, a differenza dal caso dello slab sul piano di massa). Infatti ora un'energia finita si distribuisce su una regione anch'essa finita, e si ha un'onda stazionaria anche nella regione d'aria superiore. Si tratta di un modo guidato non superficiale: in questo caso β/k_o diviene minore di 1, fino ad annullarsi con la condizione di cutoff tipica delle guide metalliche chiuse.

I diagrammi di dispersione ricavati numericamente sono del tipo di Fig. 2.20. Come si vede, il modo dominante TM_o risulta sempre di tipo superficiale, per qualsiasi valore della frequenza e delle dimensioni.

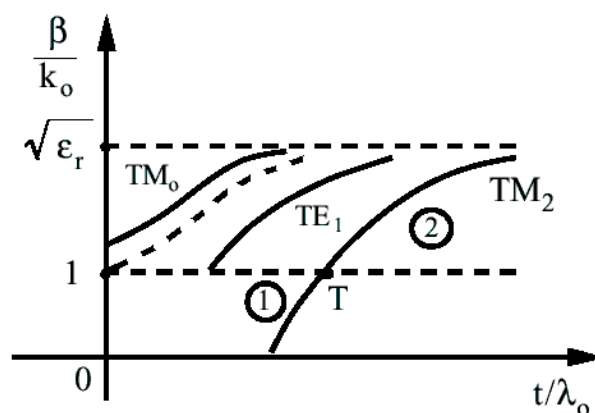


Figura 2.20: curve di dispersione dei modi della guida a piatti piani paralleli parzialmente riempita di dielettrico.

Si noti che l'equazione caratteristica per questa struttura si può porre nella forma normalizzata:

$$f\left(\frac{\beta}{k_o}, \frac{t}{\lambda_o}, \frac{b}{\lambda_o}, \epsilon_r\right) = 0$$

Per un valore fissato della distanza b tra i piatti, le curve continue in Fig. 2.20 sono state ottenute variando la frequenza e fissando anche t (situazione più significativa in pratica, poiché la struttura viene in genere costruita una volta per tutte). In questo caso la curva del modo dominante non raggiunge mai il valore $\beta/k_o = 1$, poiché c'è pur sempre uno spessore di dielettrico, che sarebbe trascurabile rispetto ad una regione indefinita di aria (come nel caso della struttura aperta), ma non lo è più rispetto ad uno strato d'aria di spessore finito, come si ha ora. Se si assume invece una frequenza costante e si varia t , ovviamente il valore 1 può essere raggiunto per $t \rightarrow 0$ (curva tratteggiata in figura). Si osservi che, sempre in questo caso, la curva del TM_0 arriva a toccare la retta $\beta/k_o = \sqrt{\epsilon_r}$ per $t/\lambda_o = b/\lambda_o$.

2.7.1 Calcolo del valore di $\frac{\beta}{k_o}$ al tendere a zero della frequenza con t costante, per il modo TM_0

Dall'equazione caratteristica:

$$Z_o \tan[k_{y_o}(b - t)] + Z_\epsilon \tan(k_{y_\epsilon} t) = 0$$

nel caso TM si ottiene, sostituendo le espressioni per le impedenze caratteristiche:

$$\frac{k_{y_o}}{\omega \epsilon_o} \tan[k_{y_o}(b - t)] + \frac{k_{y_\epsilon}}{\omega \epsilon_o \epsilon_r} \tan(k_{y_\epsilon} t) = 0$$

Sostituendo anche le espressioni per i numeri d'onda si ha, semplificando un fattore k_o :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \tan \left[k_o \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} (b - t) \right] + \frac{1}{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \tan \left[k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} t \right] = 0$$

Per $k_o \rightarrow 0$ si può applicare la formula di Mac Laurin sostituendo le tangenti con gli argomenti:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \left[k_o \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} (b - t) \right] + \frac{1}{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \left[k_o \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} t \right] &= 0 \\ \left[1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2 \right] (b - t) + \frac{1}{\varepsilon_r} \left[\varepsilon_r - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2 \right] t &= 0 \\ (b - t) - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2 (b - t) + t - \frac{t}{\varepsilon_r} \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2 \left(b - t + \frac{t}{\varepsilon_r} \right) &= b \\ \frac{\beta}{k_o} = \sqrt{\frac{b}{b - t \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{t}{b} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right)}} > 1 \end{aligned}$$

β/k_o sarebbe pari a 1 per $t = 0$, $b \rightarrow \infty$ o $\varepsilon_r = 1$.

2.7.2 Calcolo dei valori di $\frac{t}{\lambda_o}$ quando $\frac{\beta}{k_o} = 1$ per i modi superiori

Se $\beta/k_o = 1$, cioè $k_{y_o} = 0$ (si rammenti che non si tratta più ora di una condizione di cutoff), nel caso TM [$Z_o = k_{y_o}/(\omega\varepsilon_o)$] l'equazione caratteristica si riduce a:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon \tan(k_{y_\varepsilon} t) = 0 &\implies \tan(k_o \sqrt{\varepsilon_r - 1} t) = 0 \implies 2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o} = n\pi = m \frac{\pi}{2} \quad (m \text{ pari}) \\ \frac{t}{\lambda_o} &= \frac{m}{4\sqrt{\varepsilon_r - 1}} \quad m = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

ossia si ritrovano gli stessi valori ottenuti nel caso dello *slab* su piano metallico, in assenza del piatto superiore. Anche adesso per $\beta/k_o = 1$ si hanno m quarti d'onda.

Invece nel caso TE l'equazione si può scrivere nella forma:

$$(b - t) \frac{\tan[k_{y_o}(b - t)]}{k_{y_o}(b - t)} + \frac{\tan(k_{y_\varepsilon} t)}{k_{y_\varepsilon}} = 0$$

Il primo addendo è una forma indeterminata per $k_{y_o} \rightarrow 0$. Però si ricordi che (applicando il teorema di De L'Hospital, che vale anche sui complessi per funzioni olomorfe):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tan z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{1} = 1$$

per cui l'equazione diventa, ponendo $\beta/k_o = 1$:

$$(b - t) + \frac{\tan(k_o \sqrt{\varepsilon_r - 1} t)}{k_o \sqrt{\varepsilon_r - 1}} = 0$$

$$\tan\left(2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o}\right) = -2\pi \left(\frac{b}{\lambda_o} - \frac{t}{\lambda_o}\right) \sqrt{\varepsilon_r - 1}$$

e bisogna in questo caso risolverla numericamente per trovare i valori di t/λ_o . Non è più vero ora che per $\beta/k_o = 1$ si hanno m quarti d'onda. Tuttavia nel caso in cui $b \rightarrow \infty$, il secondo membro dell'equazione precedente tende a $-\infty$, per cui

$$2\pi \sqrt{\varepsilon_r - 1} \frac{t}{\lambda_o} \longrightarrow (2n + 1) \frac{\pi}{2} = m \frac{\pi}{2}$$

con m dispari.

Diversamente dal modo dominante TM_o , i modi superiori possono essere onde superficiali (k_{y_o} immaginario negativo), come avviene nella zona 2 in Fig. 2.20 (ad esempio per il modo TM_2), ma possono essere anche non superficiali (k_{y_o} reale, zona 1 nella figura). Nel punto T di transizione si ha il valore $k_{y_o} = 0$. In Fig. 2.21 è mostrato il corrispondente andamento per l'ampiezza del campo elettrico trasverso (rispetto a y) E_z .

2.8 La guida d'onda dielettrica non radiativa (NRD)

La guida d'onda NRD è stata introdotta da Yoneyama e Nishida nel 1981. Si tratta, come si può vedere in Fig. 2.22, di una barretta di materiale dielettrico, di sezione rettangolare, di altezza a e larghezza b , interposta fra due piatti metallici paralleli, di opportuna larghezza. La struttura è identica a quella della cosiddetta guida d'onda ad H, proposta da Tischer nel 1953 per lunghi collegamenti (telecomunicazioni), prima dell'avvento delle fibre ottiche.

L'inserimento della barretta dielettrica fra i due piatti consente di confinare il campo elettromagnetico nelle vicinanze della regione dielettrica stessa, mentre all'esterno si ha un decadimento esponenziale del campo stesso. Pertanto, se i piatti metallici sono di larghezza sufficiente, il campo risulta praticamente trascurabile al termine dei piatti, e quindi la situazione non differisce sensibilmente dal caso ideale di piatti che si estendano all'infinito, in quanto si può pensare che il campo “non veda” la terminazione. Si fa pertanto l'ipotesi di trascurare le perdite per radiazione dovute al fatto che, in realtà, i piatti metallici sono di larghezza finita.

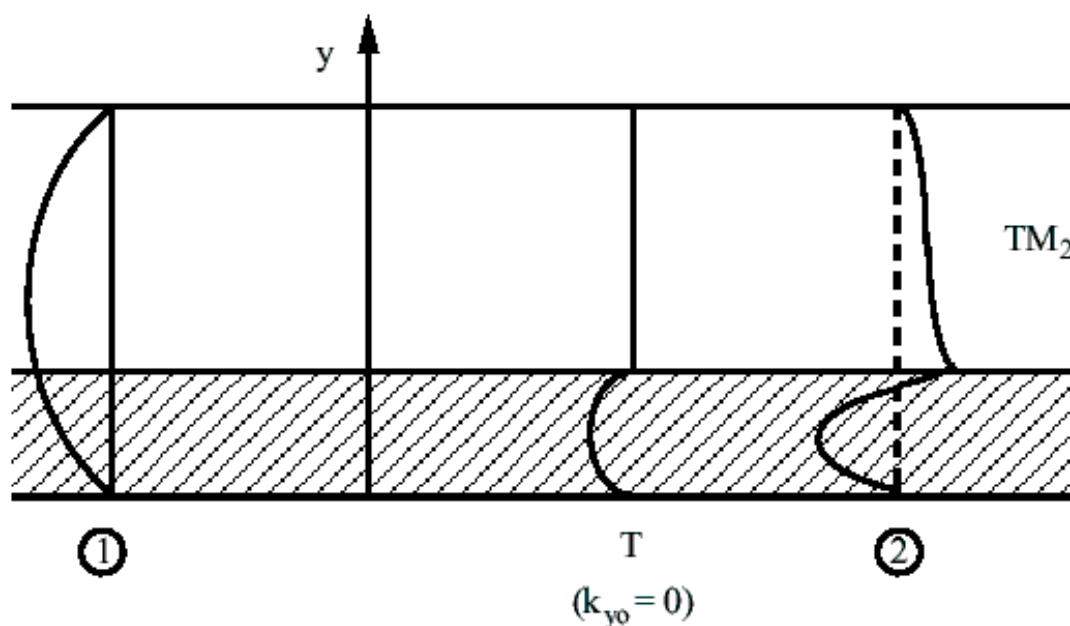


Figura 2.21: configurazioni della componente tangenziale di campo elettrico per il modo TM_2 nelle varie zone della curva di dispersione.

La polarizzazione del campo elettrico per il modo desiderato risulta prevalentemente parallela alle pareti conduttrici (orizzontale). Come è noto, se il campo elettrico risulta parallelo alle pareti, le perdite per conduzione nelle pareti metalliche diminuiscono al crescere della frequenza, mentre, se il campo risulta perpendicolare alle pareti, le perdite crescono al crescere della frequenza. Dal momento che la guida d'onda NRD è stata ideata per l'impiego ad alte frequenze, nel campo delle onde millimetriche, la polarizzazione prescelta minimizza le perdite ohmiche nelle pareti metalliche.

La differenza essenziale fra la guida ad H e la guida NRD sta nel fatto che in quest'ultima la spaziatura fra i piatti metallici è minore di metà lunghezza d'onda nel vuoto, mentre nel caso della guida d'onda ad H tale spaziatura era maggiore. Infatti si potrebbe vedere che le perdite per conduzione nei piatti metallici diminuiscono al crescere della spaziatura stessa. Pertanto, nella guida d'onda ad H, prevista come mezzo trasmissivo per lunghi percorsi, tale distanza era maggiore. La guida d'onda NRD, invece, è stata pensata per applicazioni nei circuiti integrati a onde millimetriche, per i quali sono utilizzati collegamenti molto brevi: non ha dunque troppa importanza l'aumento delle perdite.

La scelta di una piccola spaziatura fra i piatti metallici ha, invece, la fondamentale conseguenza che il modo desiderato risulta sotto cutoff nelle regioni d'aria esterne. In questo modo una qualsiasi discontinuità, come una curva o una giunzione, diviene puramente reattiva. Ciò permette di minimizzare problemi di radiazione (dove il nome di guida non radiativa) e di interferenza, caratteristiche queste di vitale importanza nelle applicazioni per circuiti integrati. Nel caso invece della guida d'onda ad H le discontinuità suddette

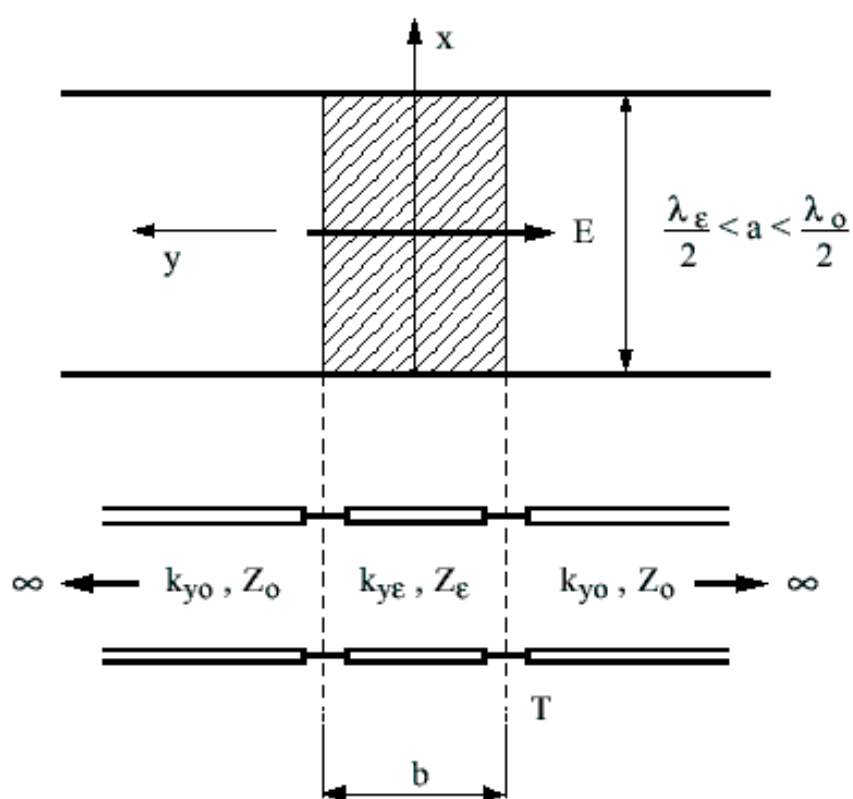


Figura 2.22: sezione trasversa della guida d'onda NRD (sopra) e sua rete equivalente trasversa (sotto).

provocavano fenomeni di radiazione ed interferenza, poiché il modo desiderato, essendo sopra cutoff, poteva propagarsi verso l'esterno.

Occorre comunque prestare attenzione al fatto che, se tali discontinuità modificano la simmetria della struttura rispetto al piano mediano orizzontale, si ha comunque irradiazione, sotto forma del modo TEM della guida a piatti metallici paralleli, modo che risulta sempre sopra cutoff, per quanto piccola sia la distanza fra i piatti stessi, e quindi una volta eccitato inevitabilmente si propaga. Questo perché in generale una qualsiasi asimmetria nella sezione trasversale trasforma un modo confinato in un modo leaky. Questo aspetto va comunque considerato nel progetto dei vari componenti e giunzioni, come pure va prestata attenzione all'aderenza fra le pareti metalliche e la barretta dielettrica, poiché possono generarsi i suddetti fenomeni di perdita.

Si può assumere per la struttura la rete equivalente trasversa, nella direzione y , mostrata in Fig. 2.22. La presenza dei piatti metallici, supposti perfettamente conduttori, impone i valori possibili per il numero d'onda nella direzione x : $k_x = m\pi/a$, con $m = 0, 1, 2, \dots$ ($m = 0$ solo per i TE). Tali valori sono gli stessi sia nell'aria che nel dielettrico, e possono essere ottenuti applicando il metodo della risonanza trasversa nella direzione x .

I numeri d'onda sono, come è noto, legati dalle relazioni di separabilità. Nell'aria, assimilandola al vuoto, si ha:

$$k_o^2 = k_x^2 + k_{y_o}^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \alpha_{y_o}^2 + \beta^2$$

Si è posto $k_z = \beta$ essendo la struttura non irradiante e supposta priva di perdite, ed inoltre $k_{y_o} = -j\alpha_{y_o}$, dovendo il campo essere evanescente nelle regioni d'aria. Nella regione dielettrica si ha invece:

$$k^2 = k_o^2 \varepsilon_r = k_x^2 + k_{y_\varepsilon}^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_{y_\varepsilon}^2 + \beta^2$$

Come è noto, i numeri d'onda k_x e k_z , tangenziali all'interfaccia aria-dielettrico, sono uguali nelle due regioni.

La struttura si può vedere come uno slab limitato nella direzione x , e quindi non è più una struttura bidimensionale ed i campi non si possono più assumere indipendenti da x . In questo caso però la limitazione non crea complicazioni analitiche, in quanto è possibile applicare il metodo della risonanza trasversa nella direzione y , ed il numero d'onda nella direzione x è determinato semplicemente, come già visto.

Si noti che l'equazione caratteristica che si ottiene risulta identica a quella per lo slab simmetrico ($k_x = 0$): la rete equivalente trasversa è infatti la stessa, a patto di poter considerare i piatti metallici virtualmente infiniti. I valori ottenuti per i numeri d'onda nella direzione y sono quindi gli stessi. Ovviamente quando poi da essi si calcola il k_z , sfruttando le relazioni fra i numeri d'onda, occorre introdurre il k_x , e si ha:

$$k_{z_{NRD}} = \sqrt{k_o^2 - k_{y_o}^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{k^2 - k_{y_\varepsilon}^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{k_{z_{SLAB}}^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

Ad ogni modo dello slab corrispondono dunque infiniti modi per la NRD, al variare dell'indice m . Il modo desiderato presenta il valore $m = 1$, poiché questo rende la struttura

facilmente alimentabile mediante una guida rettangolare standard (ruotata di 90°) operante nel suo modo dominante TE_{10} .

Passando ora in rassegna i possibili modi trasversi, si ha che nelle regioni d'aria, essendo $a < \lambda_o/2$, si può propagare lungo y solo il modo con $m = 0$, che è un TEM viaggiante obliquamente nel piano yz , con le tre componenti di campo E_x , H_y , H_z . Peraltro, se la struttura è simmetrica, non si eccitano modi con polarizzazioni diverse da quella del campo in ingresso (campo elettrico orizzontale).

Nella regione dielettrica si ha, come è noto, $\lambda = \lambda_o/\sqrt{\varepsilon_r}$, per cui $a/\lambda = \sqrt{\varepsilon_r} a/\lambda_o$. Affinché il modo con indice m sia sopra cutoff deve essere $a > m\lambda/2$. Scegliendo ad esempio $\varepsilon_r = 2.56$ (polistirene), $a = 2.7$ mm, frequenza $f = 50$ GHz (per cui $\lambda_o = 6$ mm e $a/\lambda_o = 0.45 < 1/2$), ne segue che nella regione dielettrica sono sopra cutoff i modi con $m = 1$. Infatti si ha $0.45 \times \sqrt{2.56} = 0.72$, che è maggiore di $1/2$, ma minore di 1 , per cui i modi con $m = 2$ sono invece sotto cutoff.

Nella guida d'onda NRD, così come nella guida d'onda ad H, la presenza della striscia dielettrica ha come conseguenza che le condizioni al contorno e di continuità non possono essere soddisfatte non soltanto da modi TEM, ma neanche da TM o TE (questi ultimi se $m \neq 0$) rispetto alla direzione longitudinale z . I modi della struttura saranno perciò modi ibridi, ossia con entrambe le componenti longitudinali diverse da zero. È noto tuttavia che, come si è anche visto nel § 1.1, un modo di propagazione all'interno di una struttura guidante può essere sempre espresso come sovrapposizione di un campo TM e di uno TE rispetto a z , in modo da riuscire a soddisfare le condizioni al contorno e di continuità. Si noti che tali campi devono avere lo stesso k_z , in maniera appunto da costituire un solo modo. Si arriva alla solita equazione per l'annullamento di un determinante, la quale ci fornisce tutti i modi che si propagano lungo z .

I suddetti modi però risultano trasversi (magnetici o elettrici) rispetto alla direzione trasversale y , e quindi dotati in realtà di 5 componenti. Essi sono chiamati in letteratura $TM^{(y)}$ e $TE^{(y)}$, oppure tipo-TM e tipo-TE, oppure $LSM^{(z)}$ ed $LSE^{(z)}$ (Longitudinal-Section Magnetic e Longitudinal-Section Electric). In particolare il modo desiderato, con la opportuna polarizzazione del campo elettrico, risulta essere il secondo modo, di tipo $TM^{(y)}$ o LSM, in particolare il modo LSM_{10} (chiamato più spesso LSM_{01} se, come normalmente avviene, si invertono i ruoli della x e della y). Il modo dominante invece è il suo duale, di tipo $TE^{(y)}$ o LSE, in particolare il modo LSE_{10} (o LSE_{01} per quanto detto sopra), con le linee di forza del campo elettrico orientate prevalentemente perpendicolarmente alle pareti metalliche e quindi maggiori perdite nei conduttori.

Occorre dunque una particolare cautela a non eccitare tale modo con più bassa frequenza di taglio, il quale inoltre risulta anch'esso non radiativo. L'accoppiamento fra questi primi due modi deve essere tenuto in conto nello studio di tratti curvi, che sono discontinuità pressoché ineliminabili nei circuiti integrati.

La rete equivalente trasversa in Fig. 2.22 è ulteriormente semplificabile facendo uso della simmetria geometrica della struttura rispetto al piano mediano verticale $y = 0$, e tenendo conto della polarizzazione del campo elettrico per il modo desiderato $TM^{(y)}$, campo che risulta ortogonale al piano mediano stesso. In tal caso è possibile bisezionare la struttura con un piano metallico verticale senza con ciò mutare le condizioni al contorno e quindi la

configurazione del campo elettromagnetico all'interno. A questo corrisponde, nella linea di trasmissione equivalente, una bisezione in corto circuito. Per inciso si osservi che una tale bisezione può risultare realmente utile nelle applicazioni per antenne ad onda leaky, per ottenere una struttura che irradia da una parte sola.

Nel caso $TE^{(y)}$ invece è il campo magnetico che risulta ortogonale rispetto al piano mediano $y = 0$. In questo caso è possibile bisezionare la struttura con una parete magnetica perfetta, il che equivale nella linea equivalente ad una bisezione con un circuito aperto.

La frequenza di taglio f_c per i primi due modi è ottenibile al solito risolvendo l'equazione di dispersione in cui si ponga $\beta = 0$ e si assuma come incognita la frequenza, contenuta in $k_o = 2\pi f/c$. È opportuno osservare che, a causa della presenza di due dielettrici, il problema risulta dipendente dalla frequenza, cioè non è possibile, dalla conoscenza della frequenza di taglio per certi valori dei parametri geometrici, risalire immediatamente al valore di β per una frequenza qualsiasi. Nelle guide metalliche chiuse, riempite da un solo mezzo di costante dielettrica e permeabilità ε e μ , si avrebbe:

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \omega_c^2 \mu \varepsilon}$$

Nel nostro caso invece occorre, per ciascun valore della frequenza, risolvere di nuovo l'equazione di dispersione, con un maggior onere computazionale.

Si noti infine che non per tutti i modi di propagazione si ha un effetto di cutoff di tipo classico: possono ad esempio presentarsi regioni di transizione come quelle viste nel § 1.8. Ciò è dovuto alla natura di questa struttura, che riunisce caratteristiche delle guide metalliche chiuse e di quelle dielettriche aperte.

2.9 Guide d'onda dielettriche tridimensionali: il metodo della costante dielettrica efficace

Le strutture dielettriche planari indefinite considerate in precedenza (problemi bidimensionali) sono molto utili per comprendere in modo semplice le caratteristiche fondamentali della propagazione in guide dielettriche reali (problemi tridimensionali). In effetti una guida reale presenterà un confinamento della struttura e del campo non solo nella direzione verticale y , ma anche nella direzione orizzontale x , e si avrà una guida cosiddetta “a striscia” o “a canale” ove, a seconda del campo di frequenze utilizzato (microonde e onde millimetriche, oppure ottica), si avranno come supporti piani metallici o substrati dielettrici.

In questo caso non è agevole ottenere soluzioni esatte (non è più possibile fare l'ipotesi semplificatrice $\partial/\partial x = 0$), e si procede con metodi approssimati, sia di tipo analitico che di tipo numerico. Tuttavia la guida planare bidimensionale costituisce una buona approssimazione, nell'ipotesi che lo spessore t sia molto minore delle altre due dimensioni.

Nel caso di strutture dielettriche tridimensionali, ossia guide limitate, ma non con pareti metalliche (come avveniva per la guida NRD), lungo la direzione trasversale x (così da poter disporre più componenti uno vicino all'altro sullo stesso *wafers*), un metodo analitico

approssimato molto semplice, ma che fornisce tuttavia risultati sorprendentemente in ottimo accordo con più onerose procedure numeriche, è il metodo della costante dielettrica (relativa) efficace, ovvero (come si dice più spesso in ottica) dell'indice di rifrazione efficace.

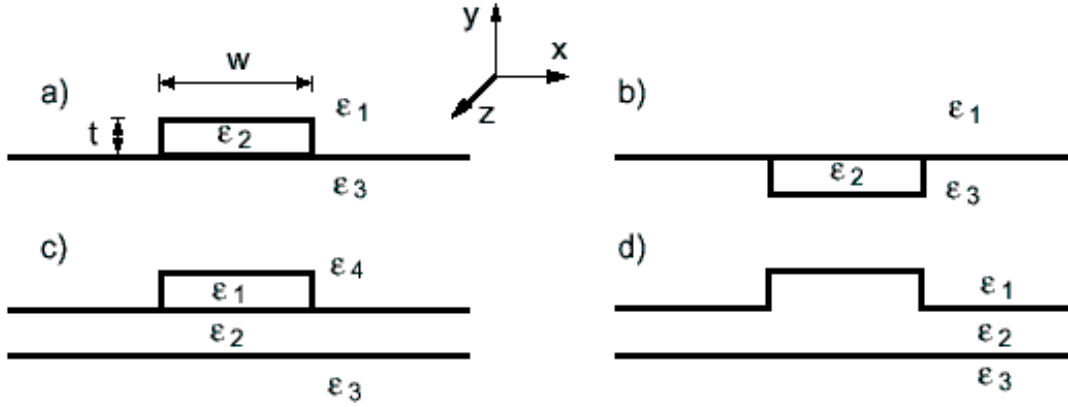


Figura 2.23: sezioni trasverse di alcune guide in uso in ottica integrata.

In Fig. 2.23 sono rappresentate le sezioni trasverse di alcune strutture in uso in ottica integrata. Per le guide in a), b) e d) si ha $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_1$; in c) si ha $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4$. Il fatto che si possa avere un effetto guidante nella regione centrale di larghezza w , forse meno evidente nei casi c) e d), è comprensibile se si pensa che la costante dielettrica, mediata nella direzione verticale y , è maggiore in tale regione che nelle regioni laterali.

Per illustrare il metodo, si consideri in particolare la guida d'onda a *embedded strip* di altezza t e larghezza w [caso b) in Fig. 2.23]. La procedura è descritta in Fig. 2.24. Se si opera una sezione nel piano mediano longitudinale yz , la struttura appare come uno slab asimmetrico di altezza t . Si può allora pensare di risolvere il problema per tale struttura, supposta (approssimativamente) indefinita lungo x , applicando ad esempio il metodo della risonanza trasversa, ed ottenere, per certi valori della frequenza, dello spessore t e dei parametri fisici, e per un certo modo, il valore della costante dielettrica (relativa) efficace $\varepsilon_{\text{eff}} = (\beta/k_o)^2$. Da questa struttura si ricaveranno anche il numero d'onda (reale) k_{y2} nella regione centrale, e le costanti di attenuazione nelle regioni superiore e inferiore, α_{y1} e α_{y3} .

Facendo a questo punto uso del concetto di costante dielettrica efficace, si consideri una struttura a slab simmetrico, indefinito nella direzione y e di larghezza w , in cui al centro è presente uno strato di materiale efficace di costante dielettrica relativa pari a ε_{eff} , mentre ai lati la costante dielettrica è pari a ε_3 . Si risolve ora il problema per questa struttura e si ricava il valore finale (approssimato) di k_z per un dato modo, che sarà individuato da due indici. Contemporaneamente si ricavano anche il numero d'onda reale k_{x2} e l'attenuazione laterale α_{x3} . Si può vedere che l'accordo migliora lontano dal cutoff (e quindi quando i modi si propagano principalmente lungo z).

Si consideri successivamente la guida a *rib* [caso d) in Fig. 2.23]. In questa situazione

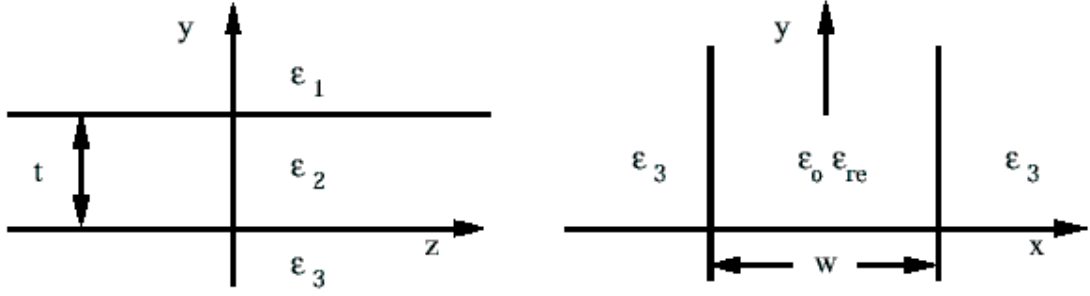


Figura 2.24: applicazione del metodo della costante dielettrica efficace alla guida d'onda a *embedded strip*.

si avrà anche ai lati uno slab asimmetrico, di spessore minore di quello al centro. Anche ai lati si avranno perciò, nella struttura finale, delle costanti dielettriche efficaci.

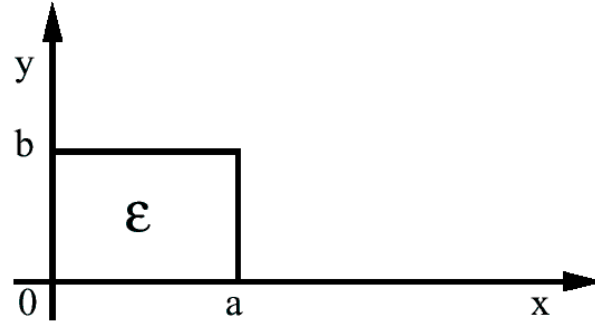


Figura 2.25: sezione trasversa della guida d'onda dielettrica rettangolare.

Si esamini infine la guida d'onda dielettrica a sezione rettangolare immersa in aria di Fig. 2.25. Essa è stata studiata “rigorosamente” attraverso ingombranti sviluppi in serie di funzioni circolari seno e coseno in coordinate cilindriche (metodo di Goell). Può essere invece studiata con sforzo di calcolo molto minore con il metodo approssimato della costante dielettrica efficace.

La procedura è illustrata in Fig. 2.26. Si considera dapprima uno slab simmetrico indefinito (approssimativamente) lungo la direzione x , di altezza b . In questa situazione si assume $k_x = 0$ e analizzando la struttura lungo la direzione y si può ricavare il k_{y_ϵ} (reale) nel dielettrico e l'attenuazione verticale α_{y_o} nell'aria, nonché la costante dielettrica relativa efficace $\epsilon_{r_{\text{eff}}}^{(y)}$ data dalla (sfruttando le relazioni di separabilità):

$$\epsilon_{r_{\text{eff}}}^{(y)} = \left(\frac{k_z}{k_o} \right)^2 = \epsilon_r - \left(\frac{k_{y_\epsilon}}{k_o} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha_{y_o}}{k_o} \right)^2$$

Successivamente si considera uno slab simmetrico indefinito nella direzione y , di larghezza a e costituito da un materiale efficace di costante dielettrica relativa pari a $\epsilon_{r_{\text{eff}}}^{(y)}$, e si

analizza nella direzione x per ricavare la costante di propagazione longitudinale della struttura complessiva. Si otterrà anche il k_{x_ε} (reale) nel dielettrico e l'attenuazione orizzontale α_{x_o} nell'aria.

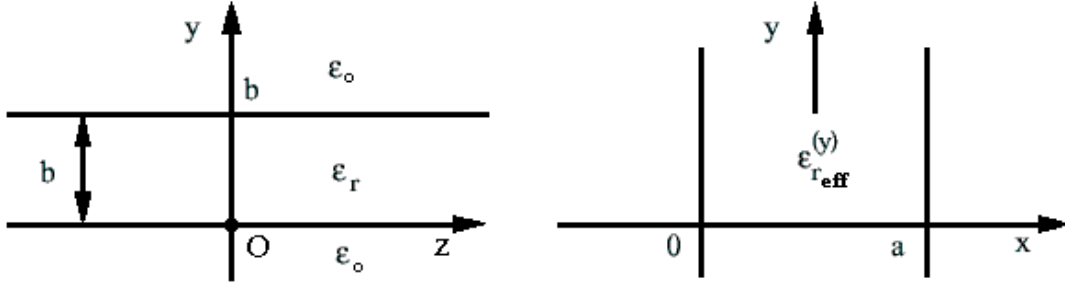


Figura 2.26: applicazione del metodo della costante dielettrica efficace alla guida d'onda dielettrica rettangolare.

Ovviamente si può procedere anche all'inverso, considerando dapprima uno slab simmetrico indefinito (approssimativamente) nella direzione y , di larghezza a , ottenendo k_{x_ε} e α_{x_o} , e ricavando la costante dielettrica relativa efficace $\varepsilon_{r\text{eff}}^{(x)}$ data da:

$$\varepsilon_{r\text{eff}}^{(x)} = \left(\frac{k_z}{k_o} \right)^2 = \varepsilon_r - \left(\frac{k_{x_\varepsilon}}{k_o} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha_{x_o}}{k_o} \right)^2$$

Successivamente si considera uno slab simmetrico indefinito nella direzione x , di altezza b e costituito da un materiale efficace di costante dielettrica relativa pari a $\varepsilon_{r\text{eff}}^{(x)}$, e si risolve nella direzione y per la costante di propagazione longitudinale della struttura complessiva, ottenendo anche k_{y_ε} e α_{y_o} .

I risultati finali nei due casi, pur essendo entrambi delle buone approssimazioni, non coincidono esattamente fra loro (a parte ovviamente il caso di guida dielettrica quadrata): ciò accade comunemente quando si ha a che fare con metodi approssimati.

Si è pensato infine di introdurre una generalizzazione del metodo, attraverso una procedura iterativa. Dopo aver ottenuto nel modo suddetto delle stime iniziali di k_{y_ε} e k_{x_ε} dette $k_{y_\varepsilon 1}$ e $k_{x_\varepsilon 1}$, nonché dei valori $\varepsilon_{r\text{eff}1}^{(y)}$ e $\varepsilon_{r\text{eff}1}^{(x)}$, si ripete la procedura con $\varepsilon_{r\text{eff}1}^{(x)}$ in luogo di ε_r per ottenere una nuova stima di k_{y_ε} detta $k_{y_\varepsilon 2}$, ed un nuovo valore $\varepsilon_{r\text{eff}2}^{(y)}$, nonché con $\varepsilon_{r\text{eff}1}^{(y)}$ in luogo di ε_r per ricavare una nuova stima di k_{x_ε} detta $k_{x_\varepsilon 2}$, ed un nuovo valore $\varepsilon_{r\text{eff}2}^{(x)}$, e così via iterativamente. Dopo poche iterazioni il procedimento generalmente converge a dei valori (considerati finali) per k_{y_ε} e k_{x_ε} , dai quali è poi possibile ricavare il valore finale approssimato per k_z con la relazione di separabilità:

$$k_z = \sqrt{k_o^2 \varepsilon_r - k_{x_\varepsilon}^2 - k_{y_\varepsilon}^2}$$

2.10 La *slot line*

La linea fessurata (*slot line*), la cui sezione trasversale è rappresentata in Fig. 2.27, è costituita da uno strato dielettrico di altezza h , sul quale è deposto un film metallico, con una fessura centrale di larghezza w . Tale struttura si presenta come alternativa e insieme complementare alla microstriscia (*microstrip line*) per l'uso in circuiti integrati a microonde (MIC, Microwave Integrated Circuits; MMIC, Monolithic Microwave Integrated Circuits), permettendo fra l'altro la realizzazione di componenti a tecnologia mista, ad esempio accoppiatori, sulle due facce dello stesso strato dielettrico.

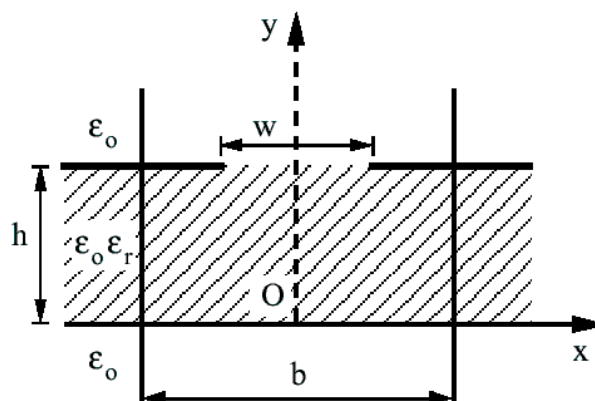


Figura 2.27: sezione trasversale della guida d'onda *slot line*.

Le perdite per radiazione vengono minimizzate con l'uso di un dielettrico di elevata ϵ_r ($10 \div 30$), che ha l'effetto di confinare i campi nelle vicinanze della fessura.

Una prima formula approssimata (ordine zero) per la costante di fase normalizzata β/k_o della slot line è la seguente:

$$\frac{\beta}{k_o} = \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}}$$

Tale espressione è indipendente dalla frequenza, se assumiamo ϵ_r costante, e corrisponde ad assumere una costante dielettrica relativa efficace:

$$\epsilon_{r_{\text{eff}}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2}$$

media aritmetica fra quella dell'aria e quella del dielettrico. La formula può fornire sorprendentemente risultati corretti entro il 10%.

In una successiva approssimazione si introducono nella geometria delle opportune pareti metalliche, per trasformare la situazione da un problema in coordinate cilindriche (con analogia alla diffrazione da una fenditura), che coinvolgerebbe le funzioni di Bessel e di Hankel, in un problema in guida d'onda rettangolare, in modo da lavorare con funzioni modali più semplici, di tipo circolare.

Si supponga inizialmente che nella slot line sia presente nella direzione longitudinale z non più un'onda puramente progressiva, ma un'onda puramente stazionaria. In questo caso è noto (cfr. rapporto d'onda stazionaria) che sono presenti lungo z degli zeri (nodi) del campo elettrico trasverso (rispetto a z), distanti tra loro $\lambda_g/2$. È possibile allora in corrispondenza a tali sezioni immaginare di porre dei piani fisici perfettamente conduttori, a distanza $a = \lambda_g/2$, senza alterare il problema di valori al contorno, e quindi la distribuzione del campo elettromagnetico fra i piani stessi. Si noti tuttavia che, essendo $\lambda_g = 2\pi/\beta$, la distanza a è in realtà un'incognita del problema.

Inoltre, supponendo realisticamente che il campo sia ben confinato nelle vicinanze della fessura, la presenza di ulteriori pareti metalliche per $x = \pm b/2$ (vedi Fig. 2.27), purché sufficientemente lontane, avrà effetti trascurabili, poiché il campo non arriva a “vederle”.

A questo punto allora ci si è ricondotti ad una geometria rettangolare, semplificando notevolmente l'analisi. Si ha infatti la situazione di un'iride capacitiva in una guida metallica rettangolare, avente per asse la direzione trasversa y , in presenza di uno strato dielettrico.

Si noti ora che, dovendo essere per un modo guidato $\beta/k_o > 1$, ossia $\lambda_g/\lambda_o < 1$, si ha che

$$a = \frac{\lambda_g}{2} = \frac{\lambda_g}{\lambda_o} \frac{\lambda_o}{2} < \frac{\lambda_o}{2}$$

In base a questa condizione, allora, nelle regioni d'aria superiore ed inferiore tutti i modi (compreso il dominante TE_{10}) risultano sotto cutoff (attenuazione esponenziale del campo, come desiderato). Invece nella regione dielettrica sarà $a > \lambda/2$, dovendo sempre essere $\beta/k_o < \sqrt{\epsilon_r}$, per cui $\lambda_g/\lambda_o > 1/\sqrt{\epsilon_r}$ e $a > \lambda_o/(2\sqrt{\epsilon_r}) = \lambda/2$, e quindi il modo dominante sarà certamente sopra cutoff.

In corrispondenza dell'iride capacitiva si avrà in generale eccitazione dei modi di ordine superiore, e se ne dovrà tener conto per mezzo di una suscettanza concentrata, che risulta appunto di tipo capacitivo.

È possibile a questo punto, conoscendo un'espressione analitica di tale suscettanza, applicare il metodo della risonanza trasversa nella direzione verticale y ed ottenere l'equazione di dispersione, che fornisce β/k_o (contenuto anche in a/λ_o) in funzione della frequenza, di ϵ_r , dei parametri geometrici w e h (dimensioni tipiche dell'ordine dei mm), e della distanza b tra i piatti laterali. È chiaro che b dev'essere presa a posteriori sufficientemente grande, tanto che le curve di dispersione ottenute non dipendano più da essa.

Capitolo 3

Il metodo dello *spectral domain*

3.1 Introduzione

Il metodo dello *spectral domain* è una tecnica molto generale, applicabile ad una varietà di strutture di tipo planare (microstriscia, guida coplanare, slot line, strutture stampate stratificate, ecc.), in cui si possa trascurare lo spessore della metallizzazione.

Come si è visto nel § 1.1, un generico campo elettromagnetico viaggiante nella direzione (longitudinale) z (a parte il caso particolare dei campi TEM, in genere esclusi dalla presenza di più dielettrici) può essere rappresentato in termini di due funzioni potenziale scalare delle variabili trasverse x, y .

Il metodo dello *spectral domain* si caratterizza appunto perché si lavora nel dominio spettrale, ossia nel dominio della trasformata di Fourier, in questo caso rispetto alle variabili spaziali. Si ha allora, trasformando rispetto alla variabile x la generica funzione potenziale $\phi(x, y)$, sia nel caso TE che nel caso TM:

$$\phi(k_x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{jk_x x} dx$$

con la trasformata inversa:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_x, y) e^{-jk_x x} dk_x$$

Per le derivate si ha al solito:

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow -jk_x$$

Si noti che k_x deve essere reale, essendo la variabile trasformata secondo Fourier (cfr. Campi Elettromagnetici I: spettro di onde piane). Questo pone delle limitazioni alla diretta applicabilità del metodo nel caso di valori complessi dei numeri d'onda (presenza dei vari meccanismi di perdita). In tal caso occorrerà svolgere delle integrazioni nel piano complesso (si veda ad esempio la Parte II del presente testo). Nel seguito supporremo l'assenza di fenomeni di perdita.

Si ricordi ora che la funzione ϕ deve soddisfare l'equazione di Helmholtz bidimensionale, che nel dominio trasformato diviene un'equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{aligned} -k_x^2 \phi(k_x, y) + \frac{\partial^2 \phi(k_x, y)}{\partial y^2} + k_t^2 \phi(k_x, y) &= 0 & (k_t^2 = k^2 - k_z^2) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y^2 \right) \phi(k_x, y) &= 0 & (k_y^2 = k_t^2 - k_x^2) \end{aligned}$$

il cui integrale generale può essere posto, come è noto, nella forma (le costanti rispetto ad y saranno in generale delle funzioni di k_x):

$$\phi(k_x, y) = A(k_x) e^{-jk_y y} + D(k_x) e^{jk_y y}$$

oppure come:

$$\phi(k_x, y) = B(k_x) \cos(k_y y) + C(k_x) \sin(k_y y)$$

3.2 Applicazione del metodo alla *slot line*

Si procederà ora all'applicazione di tale metodo alla slot line di Fig. 3.1.

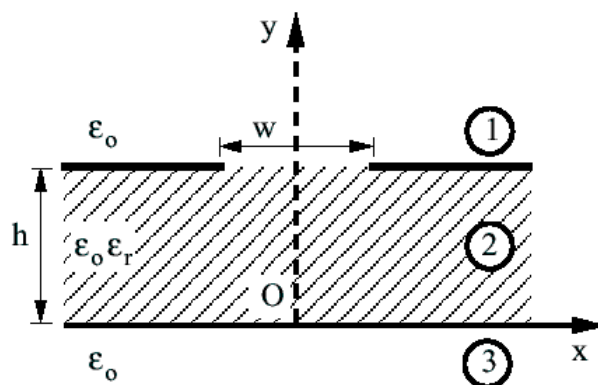


Figura 3.1: sezione trasversale della *slot line*, con indicate le tre regioni di spazio considerate.

Si sceglierà per maggiore naturalezza, come di consueto, la prima forma dell'integrale generale nelle regioni d'aria 1 e 3 in figura, dove il campo si deve attenuare esponenzialmente nella direzione verticale y , e la seconda forma all'interno del dielettrico (regione 2). L'espressione della soluzione nelle varie regioni sarà pertanto:

$$\phi_1^{\text{TM/TE}}(k_x, y) = A^{\text{TM/TE}}(k_x) e^{-jk_{y0}(y-h)} \quad (3.1)$$

$$\phi_2^{\text{TM/TE}}(k_x, y) = B^{\text{TM/TE}}(k_x) \cos(k_{y\epsilon} y) + C^{\text{TM/TE}}(k_x) \sin(k_{y\epsilon} y) \quad (3.2)$$

$$\phi_3^{\text{TM/TE}}(k_x, y) = D^{\text{TM/TE}}(k_x) e^{jk_{y0} y} \quad (3.3)$$

con $k_{y_o} = \sqrt{k_o^2 - k_x^2 - k_z^2}$, $k_{y_\varepsilon} = \sqrt{k_o^2 \varepsilon_r - k_x^2 - k_z^2}$, essendo k_x e k_z gli stessi nelle tre regioni.

Occorre ora imporre le quattro condizioni di continuità per $y = 0$ (confine fra la regione 2 e la 3) delle componenti tangenziali del campo elettromagnetico, ossia di E_x , E_z , H_x , H_z . Esprimendo tali componenti in termini delle funzioni $\phi_2^{\text{TM/TE}}(x, y)$ e $\phi_3^{\text{TM/TE}}(x, y)$, e trasformando rispetto a x ambo i membri delle predette condizioni, si ottengono nel dominio spettrale quattro equazioni omogenee nelle sei funzioni incognite B^{TM} , B^{TE} , C^{TM} , C^{TE} , D^{TM} e D^{TE} . Si possono utilizzare tali equazioni per esprimere quattro delle funzioni incognite, ad esempio B^{TM} , B^{TE} , D^{TM} e D^{TE} , in funzione delle altre due, ad esempio C^{TM} e C^{TE} .

Occorre poi imporre le condizioni di continuità, per $y = h$ (confine fra la regione 1 e la 2) e $-w/2 \leq x \leq w/2$, delle due componenti tangenziali del campo elettrico E_z , E_x , nonché l'annullamento di tali componenti per $x \leq -w/2$ e $x \geq w/2$ (avendo supposto il metallo perfettamente conduttore). Poiché tale annullamento si deve ovviamente verificare provenendo sia dalla regione 1 che dalla regione 2, è possibile imporre la continuità di tali componenti per ogni x (per $y = h$), e poi il loro annullamento da una parte per $|x| \geq w/2$.

Imponendo la prima condizione, ossia le due equazioni:

$$E_{1_z} = E_{2_z}, \quad E_{1_x} = E_{2_x} \quad \text{per } y = h$$

nel dominio trasformato, si possono esprimere anche le funzioni incognite A^{TM} , A^{TE} in termini di C^{TM} e C^{TE} .

Applicando poi la seconda condizione, dalla parte per esempio della regione 1, si potrà porre:

$$\begin{aligned} E_{1_z}(x, h) &= f(x) \\ E_{1_x}(x, h) &= g(x) \end{aligned} \quad \text{con } f(x), g(x) \equiv 0 \text{ per } |x| \geq w/2$$

essendo $f(x)$ e $g(x)$ funzioni incognite. Passando nel dominio trasformato si otterranno due equazioni in cui compaiono A^{TM} , A^{TE} (esprimibili come si è visto in termini di C^{TM} e C^{TE}), nonché le funzioni incognite $F(k_x)$ e $G(k_x)$, trasformate delle $f(x)$ e $g(x)$.

Rimangono ancora da imporre le condizioni per le componenti tangenziali del campo magnetico per $y = h$. Si ha continuità per $|x| \leq w/2$; in corrispondenza del conduttore perfetto c'è invece una discontinuità, dovuta alla presenza di correnti elettriche superficiali, espresse dalla formula:

$$\begin{aligned} \underline{J}_S &= \underline{n} \times (\underline{H}_1 - \underline{H}_2) = \\ &= \underline{y}_o \times \left[\left(H_{1_x} \underline{x}_o + H_{1_z} \underline{z}_o \right) - \left(H_{2_x} \underline{x}_o + H_{2_z} \underline{z}_o \right) \right] = \\ &= -H_{1_x} \underline{z}_o + H_{1_z} \underline{x}_o + H_{2_x} \underline{z}_o - H_{2_z} \underline{x}_o \end{aligned}$$

ove $\underline{n}$ è il versore normale alla superficie di separazione, orientato dalla regione 2 alla 1 (quindi $\underline{n} \equiv \underline{y}_o$).

Si può allora porre:

$$\begin{aligned} J_x(x) &= H_{1_z}(x, h) - H_{2_z}(x, h) = s(x) \\ J_z(x) &= H_{2_x}(x, h) - H_{1_x}(x, h) = w(x) \end{aligned} \quad \text{con } s(x), w(x) \equiv 0 \text{ per } |x| \leq w/2$$

essendo $s(x)$ e $w(x)$ funzioni incognite. Passando nel dominio trasformato si hanno altre due equazioni in cui compaiono A^{TM} , A^{TE} , B^{TM} e B^{TE} (esprimibili in termini di C^{TM} e C^{TE}), C^{TM} , C^{TE} , nonché le funzioni incognite $S(k_x)$ e $W(k_x)$, trasformate di $s(x)$ e $w(x)$.

Si hanno allora in totale quattro equazioni lineari in termini di C^{TM} , C^{TE} , F , G , S e W . Se ne possono utilizzare due per eliminare anche C^{TM} e C^{TE} dai calcoli. Nelle altre due si possono esprimere S e W come combinazione lineare di F e G , ottenendo infine le relazioni:

$$\begin{aligned} S(k_x) &= \Gamma_1(k_x, k_z) F(k_x) + \Gamma_2(k_x, k_z) G(k_x) \\ W(k_x) &= \Gamma_3(k_x, k_z) F(k_x) + \Gamma_4(k_x, k_z) G(k_x) \end{aligned}$$

con Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 e Γ_4 funzioni note, ricavabili svolgendo esplicitamente i passaggi algebrici fin qui delineati. La dipendenza da k_x e k_z delle funzioni Γ deriva dalla presenza nei calcoli dei numeri d'onda k_{y_o} e k_{y_ε} .

3.3 Soluzione con il metodo dei momenti

Si procede ora all'applicazione del metodo di Galerkin (caso particolare del cosiddetto metodo dei momenti, di cui si tratterà più estesamente nel capitolo 9), che è anch'esso una tecnica molto generale, utile sia per problemi di propagazione guidata, come questo, sia per problemi di irradiazione e scattering.

Nel nostro caso occorre inizialmente sviluppare le funzioni incognite $f(x)$ e $g(x)$, associate, come si è visto, alle componenti tangenziali del campo elettrico E_z ed E_x rispettivamente, in serie di funzioni note $\{f_n(x)\}$ e $\{g_n(x)\}$, dette funzioni di base, che costituiscano un insieme completo. Tali funzioni ovviamente risulteranno, come $f(x)$ e $g(x)$, diverse da zero per $|x| \leq w/2$ e nulle altrove. Si pone allora:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n(x)$$

e trasformando (omettendo per brevità nel seguito il campo di variabilità dell'indice n):

$$F(k_x) = \sum_n c_n F_n(k_x) \qquad G(k_x) = \sum_n d_n G_n(k_x)$$

Sostituendo le serie nelle espressioni per S e W , si ha:

$$\begin{aligned} S(k_x) &= \sum_n c_n \Gamma_1(k_x, k_z) F_n(k_x) + \sum_n d_n \Gamma_2(k_x, k_z) G_n(k_x) \\ W(k_x) &= \sum_n c_n \Gamma_3(k_x, k_z) F_n(k_x) + \sum_n d_n \Gamma_4(k_x, k_z) G_n(k_x) \end{aligned}$$

Si moltiplichi ora la prima equazione per $G_m(k_x)$ (con $m = 1, 2, 3, \dots$) e si integri poi in k_x fra $-\infty$ e $+\infty$ (calcolando i cosiddetti momenti), ottenendo (si assume di poter scambiare le serie a secondo membro con gli integrali):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} S(k_x) G_m(k_x) dk_x &= \sum_n c_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(k_x, k_z) F_n(k_x) G_m(k_x) dk_x + \\ &+ \sum_n d_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_2(k_x, k_z) G_n(k_x) G_m(k_x) dk_x \end{aligned}$$

Ponendo ora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(k_x, k_z) G_m(k_x) F_n(k_x) dk_x &= P_{mn}(k_z) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_2(k_x, k_z) G_m(k_x) G_n(k_x) dk_x &= Q_{mn}(k_z) \end{aligned}$$

($m, n = 1, 2, 3, \dots$), risultano definite le matrici $[P]$ e $[Q]$, ad infinite dimensioni, e si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(k_x) G_m(k_x) dk_x = \sum_n P_{mn}(k_z) c_n + \sum_n Q_{mn}(k_z) d_n \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

In modo analogo, moltiplicando l'equazione di $W(k_x)$ per $F_m(k_x)$ (con $m = 1, 2, 3, \dots$) ed integrando in k_x fra $-\infty$ e $+\infty$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} W(k_x) F_m(k_x) dk_x &= \sum_n c_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_3(k_x, k_z) F_n(k_x) F_m(k_x) dk_x + \\ &+ \sum_n d_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_4(k_x, k_z) G_n(k_x) F_m(k_x) dk_x \end{aligned}$$

Ponendo ora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_3(k_x, k_z) F_m(k_x) F_n(k_x) dk_x &= R_{mn}(k_z) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_4(k_x, k_z) F_m(k_x) G_n(k_x) dk_x &= T_{mn}(k_z) \end{aligned}$$

($m, n = 1, 2, 3, \dots$), risultano definite le matrici $[R]$ e $[T]$, ad infinite dimensioni, e si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(k_x) F_m(k_x) dk_x = \sum_n R_{mn}(k_z) c_n + \sum_n T_{mn}(k_z) d_n \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Un passaggio chiave, suggerito dalla natura (a circuito stampato) della struttura che si sta studiando, è l'applicazione del teorema di Parseval (caso particolare del teorema della

convoluzione), il quale afferma che se $X(f)$ e $Y(f)$ sono le trasformate delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$, si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(-t) dt$$

Nel nostro caso risulta dunque (se si integra rispetto al numero d'onda, occorre al solito premettere un fattore $1/2\pi$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(k_x) G_m(k_x) dk_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) g_m(-x) dx \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(k_x) F_m(k_x) dk_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) f_m(-x) dx \end{aligned}$$

Si osservi ora che i secondi membri delle espressioni precedenti sono nulli poiché $f_m(x)$, $g_m(x)$, essendo legate alle componenti tangenziali del campo elettrico, sono nulle per $|x| \geq w/2$, e quindi lo sono anche $f_m(-x)$ e $g_m(-x)$, mentre $w(x)$ e $s(x)$, essendo legate alle correnti superficiali, sono nulle per $|x| \leq w/2$. Gli integrali con le funzioni incognite $S(k_x)$ e $W(k_x)$ sono stati allora eliminati dai calcoli, per cui rimane:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}(k_z) c_n + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(k_z) d_n &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}(k_z) c_n + \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(k_z) d_n &= 0 \end{aligned} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Si è dunque ottenuto un sistema omogeneo di infinite equazioni in infinite incognite. In forma compatta si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} P_{mn}(k_z) & Q_{mn}(k_z) \\ R_{mn}(k_z) & T_{mn}(k_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = 0$$

Si ha soluzione non nulla se e solo se il determinante dei coefficienti si annulla. Naturalmente in pratica, per procedere alla valutazione numerica, le dimensioni delle matrici dovranno essere finite, quindi si dovrà operare un troncamento. A questo proposito si noti che, mentre da un punto di vista puramente matematico gli insiemi di funzioni di base $\{f_n(x)\}$ e $\{g_n(x)\}$ sono arbitrari (a patto di essere completi), da un punto di vista numerico (e pratico) tali insiemi vanno scelti in modo che le relative serie siano il più possibile rapidamente convergenti, così da poterle troncare a pochi termini pur ottenendo un'approssimazione sufficientemente accurata.

In particolare, con una scelta oculata, ci si può fermare persino ad una sola funzione di base per ciascun insieme, sicché occorre valutare (numericamente) i quattro integrali:

$$\begin{aligned} P(k_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(k_x, k_z) G(k_x) F(k_x) dk_x & Q(k_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_2(k_x, k_z) G^2(k_x) dk_x \\ R(k_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_3(k_x, k_z) F^2(k_x) dk_x & T(k_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_4(k_x, k_z) F(k_x) G(k_x) dk_x \end{aligned}$$

Il sistema omogeneo diviene dunque:

$$\begin{cases} P(k_z) c + Q(k_z) d = 0 \\ R(k_z) c + T(k_z) d = 0 \end{cases}$$

La condizione di annullamento del determinante è:

$$P(k_z) T(k_z) - Q(k_z) R(k_z) = 0$$

le cui soluzioni danno i valori possibili (per i vari modi) della costante di propagazione longitudinale k_z .

Per ottenere una più rapida convergenza è opportuno scegliere le funzioni $\{f_n(x)\}$ e $\{g_n(x)\}$ in modo da imitare il più possibile quello che si presume (o si sa per altre vie) essere l'andamento reale delle componenti E_z ed E_x rispettivamente, specialmente in prossimità della fessura, avendo cura di rispettare le cosiddette condizioni ai bordi (*edge conditions*). Si può scegliere ad esempio un solo termine per ciascun insieme, del tipo

$$f(x) = \begin{cases} x \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 - x^2} & \text{per } |x| \leq w/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 - x^2}} & \text{per } |x| \leq w/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

le cui trasformate di Fourier risultano espresse in termini delle funzioni di Bessel del primo tipo:

$$F(k_x) = -\frac{j\pi(w/2)^2}{k_x} J_2\left(\frac{w|k_x|}{2}\right)$$

$$G(k_x) = \pi J_0\left(\frac{w|k_x|}{2}\right)$$

Una soluzione ancora più approssimata e semplice si può ottenere ponendo addirittura $f(x) \equiv 0$, ossia $F(k_x) \equiv 0$. Infatti si può verificare che la componente E_z , espressa dalla $f(x)$, è circa un decimo di E_x , espressa da $g(x)$. In questo caso resta da risolvere numericamente il solo integrale $Q(k_z)$ e, dovendo essere $Q(k_z) d = 0$, con d non banalmente nulla, l'equazione di dispersione si riduce a $Q(k_z) = 0$.

Si osservi infine che una semplificazione nella valutazione numerica degli integrali visti si ottiene sfruttando le proprietà di simmetria delle funzioni integrande, che risultano, dai calcoli espliciti, essere funzioni pari rispetto a k_x , dimezzando così il dominio effettivo di integrazione.

3.4 Analisi di strutture planari stratificate generiche

3.4.1 Introduzione

La classe delle strutture guidanti planari raccoglie una larga casistica di differenti configurazioni, che sono state proposte e studiate in letteratura. Esse sono generalmente costituite da un sistema di conduttori disposti su piani paralleli, inseriti in una struttura di supporto dielettrica a strati. I conduttori hanno di solito spessore trascurabile, rispetto alle dimensioni trasversali, e vengono depositi sul substrato dielettrico con le tecniche dei circuiti stampati: per questo motivo le guide planari vengono spesso indicate come linee di trasmissione stampate. La Fig. 3.2 mostra alcuni esempi di sezioni trasversali di linee stampate.

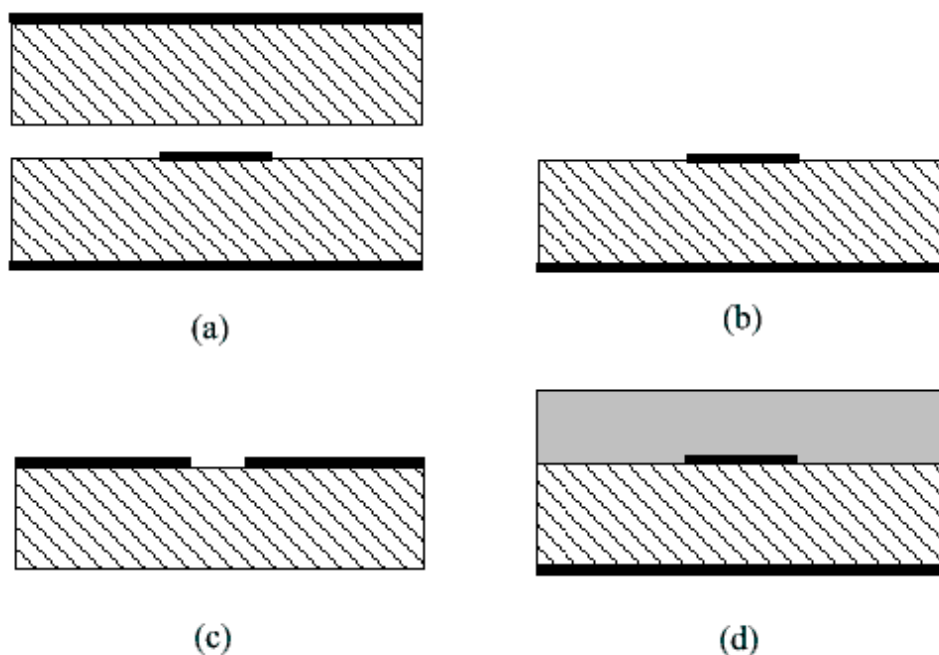


Figura 3.2: esempi di guide planari. (a) *Stripline* con uno strato di aria, (b) *Microstriscia*, (c) *Slotline*, (d) *Microstriscia* con strato di copertura.

Gli strati dielettrici inferiore e superiore possono essere limitati da un piano conduttore o essere illimitati. Nel caso siano presenti entrambe le pareti conduttrici inferiore e superiore la struttura viene detta *chiusa* o, più precisamente, *con copertura*; se una delle due pareti manca, la linea si dice *aperta*. Sebbene le linee di trasmissione stampate che sono state studiate e vengono utilizzate nella realizzazione dei circuiti siano tra loro molto differenti per geometria e caratteristiche elettromagnetiche, esse possono essere tutte analizzate con un'unica metodologia, che trae vantaggio dalla uniformità *della struttura dielettrica di supporto* nei piani perpendicolari alla direzione di stratificazione. Ciò suggerisce di esprimere il

campo tramite uno sviluppo in onde piane ed utilizzare quindi una rappresentazione spettrale. I modi della struttura vengono determinati risolvendo equazioni integrali formulate imponendo le opportune condizioni al contorno sui conduttori [245].

I paragrafi successivi descrivono in dettaglio i fondamenti analitici del metodo dello *spectral domain*. Il primo passo consiste nel ricavare il legame tra il campo elettromagnetico nella struttura stratificata e le correnti presenti, attraverso la determinazione di opportune funzioni di Green. Quindi si mostrerà come si possa ricavare un'equazione integrale le cui autosoluzioni altro non sono che i modi guidati dalla struttura considerata.

3.4.2 Rappresentazione del campo elettromagnetico nel dominio spettrale

Si consideri una struttura costituita da uno o più strati piani di materiali differenti lineari, isotropi e omogenei, di spessore arbitrario (*la presenza dei conduttori sarà tenuta in conto dalle correnti e successivamente nell'imposizione delle condizioni al contorno*). Si scelga, come indicato in Fig. 3.3, un sistema di riferimento in modo tale che i piani di separazione tra i diversi strati siano paralleli al piano xy . La direzione definita dall'asse z verrà indicata come *direzione di stratificazione*.

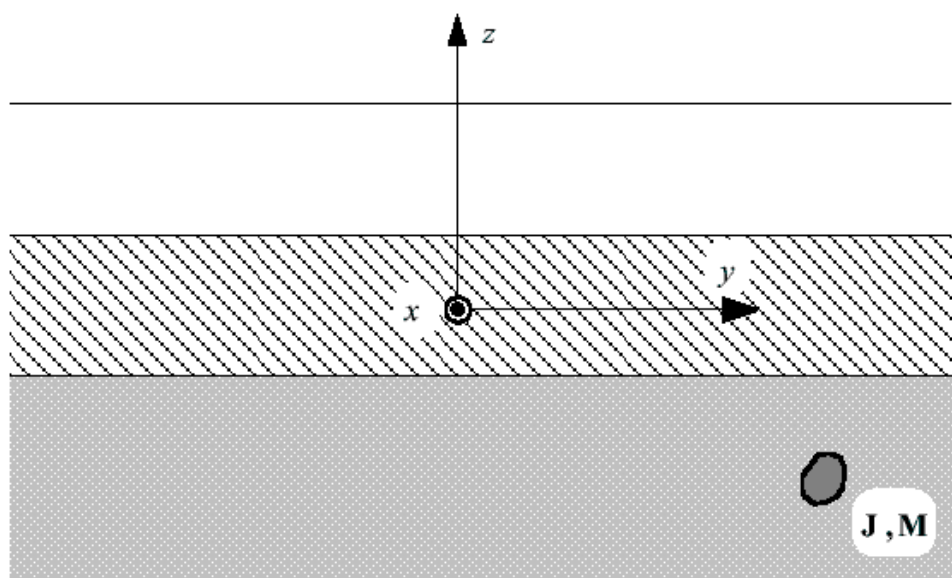


Figura 3.3: generica struttura a strati piani, ortogonali a z , in presenza di sorgenti.

Si supponga che in un certo volume V' siano presenti correnti impresse elettriche $\underline{J}$ e magnetiche $\underline{M}$. La linearità del problema consente di affermare che il campo elettromagnetico, utilizzando la sovrapposizione degli effetti, può essere espresso nel seguente modo [222] (con $\underline{r}$ sarà indicato il punto cosiddetto di osservazione, con $\underline{r}'$ il punto cosiddetto di sorgente):

$$\begin{aligned}
\underline{E}(\underline{r}) &= \int_{V'} \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV' + \int_{V'} \underline{G}_{eh}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{M}(\underline{r}') dV' \\
\underline{H}(\underline{r}) &= \int_{V'} \underline{G}_{he}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV' + \int_{V'} \underline{G}_{hh}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{M}(\underline{r}') dV'
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Se si richiede ora che le precedenti espressioni siano soluzioni delle equazioni di Maxwell, si considerano separatamente i contributi delle correnti impresse elettriche e di quelle magnetiche, e si sfrutta l'arbitrarietà delle correnti stesse, si ottiene che le funzioni di Green diadiche $\underline{G}_{ee}$, $\underline{G}_{he}$, $\underline{G}_{eh}$ e $\underline{G}_{hh}$ devono soddisfare le seguenti equazioni (si noti l'analogia con le equazioni di Maxwell):

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') &= -j\omega\mu \underline{G}_{he}(\underline{r}, \underline{r}') \\
\nabla \times \underline{G}_{he}(\underline{r}, \underline{r}') &= \underline{I} \delta(\underline{r} - \underline{r}') + j\omega\varepsilon \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}')
\end{aligned} \tag{3.5a}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{G}_{eh}(\underline{r}, \underline{r}') &= -\underline{I} \delta(\underline{r} - \underline{r}') - j\omega\mu \underline{G}_{hh}(\underline{r}, \underline{r}') \\
\nabla \times \underline{G}_{hh}(\underline{r}, \underline{r}') &= j\omega\varepsilon \underline{G}_{eh}(\underline{r}, \underline{r}')
\end{aligned} \tag{3.5b}$$

ove $\underline{I}$ è la diade identica. Inoltre per la definizione del rotore di una diade, si veda il successivo paragrafo 4.2.

Supponiamo infatti che sia $\underline{M} \equiv 0$, per cui nelle espressioni (3.4) di $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ sopravvivono solo i primi integrali a secondo membro. Dalla prima equazione di Maxwell $\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H}$ segue (visto che il ∇ non opera sulle coordinate con apice):

$$\int_{V'} [\nabla \times \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}')] \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV' = -j\omega\mu \int_{V'} \underline{G}_{he}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV'$$

Tale uguaglianza dev'essere verificata per ogni scelta di V' (e quindi devono coincidere gli integrandi) e per ogni scelta di $\underline{J}$. Ne segue la prima delle (3.5a).

Partendo invece dalla seconda equazione di Maxwell $\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + j\omega\varepsilon \underline{E}$ segue:

$$\begin{aligned}
&\int_{V'} [\nabla \times \underline{G}_{he}(\underline{r}, \underline{r}')] \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV' = \underline{J}(\underline{r}) + j\omega\varepsilon \int_{V'} \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV' = \\
&= \int_{V'} \delta(\underline{r} - \underline{r}') \underline{I} \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV' + j\omega\varepsilon \int_{V'} \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}(\underline{r}') dV'
\end{aligned}$$

e ancora dall'arbitrarietà di V' e $\underline{J}$ segue la seconda delle (3.5a). In modo analogo, supponendo ora $\underline{J} \equiv 0$ e sfruttando l'arbitrarietà di V' e di $\underline{M}$ si ottengono le (3.5b).

Eliminando $\underline{G}_{he}$ e $\underline{G}_{eh}$ dalle relazioni scritte, si ottiene che $\underline{G}_{ee}$ e $\underline{G}_{hh}$ devono soddisfare anche le seguenti equazioni, analoghe all'equazione delle onde (nella solita ipotesi di mezzo omogeneo):

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') - k^2 \underline{G}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') &= -j\omega\mu \underline{I} \delta(\underline{r} - \underline{r}') \\
\nabla \times \nabla \times \underline{G}_{hh}(\underline{r}, \underline{r}') - k^2 \underline{G}_{hh}(\underline{r}, \underline{r}') &= -j\omega\varepsilon \underline{I} \delta(\underline{r} - \underline{r}')
\end{aligned} \tag{3.6a}$$

con

$$\begin{aligned}\underline{\underline{G}}_{he}(\underline{r}, \underline{r}') &= -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \underline{\underline{G}}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') \\ \underline{\underline{G}}_{eh}(\underline{r}, \underline{r}') &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \underline{\underline{G}}_{hh}(\underline{r}, \underline{r}')\end{aligned}\quad (3.6b)$$

Di queste funzioni di Green non si riesce a dare un'espressione in forma chiusa nel dominio spaziale, mentre ciò è possibile nel dominio spettrale, come si vedrà.

Poiché si è interessati allo studio di strutture planari, è conveniente avvalersi delle proprietà peculiari della loro geometria. Per l'ipotesi di uniformità sul piano xy (si ricordi che le metallizzazioni vengono considerate a parte) è possibile affermare che le diadi definite godono della proprietà di invarianza per traslazione lungo le direzioni x ed y . Ciò significa che per $\underline{\underline{G}}_{ee}$, e analogamente per le altre tre funzioni diadiche, si può scrivere:

$$\underline{\underline{G}}_{ee}(\underline{r}, \underline{r}') = \underline{\underline{G}}_{ee}(x, y, z; x', y', z') = \underline{\underline{G}}_{ee}(x - x', y - y'; z, z') \quad (3.7)$$

Quindi gli integrali rispetto a x' ed y' in (3.4) sono nel nostro caso integrali di convoluzione, visto anche che si possono estendere all'infinito senza cambiarne il valore.

Convienne a questo punto introdurre una trasformata di Fourier bidimensionale rispetto alle coordinate x ed y , definita al solito dalla seguente coppia di relazioni:

$$\tilde{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.8)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.9)$$

In particolare, per la trasformata di Fourier della generica funzione di Green, si ha la relazione (le variabili differenza $x - x'$ e $y - y'$ si indicano ora con ξ ed η):

$$\tilde{\underline{\underline{G}}}(k_x, k_y; z, z') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{G}}(\xi, \eta; z, z') e^{j(k_x \xi + k_y \eta)} d\xi d\eta \quad (3.10)$$

Se si applica la trasformazione bidimensionale di Fourier alle espressioni dei campi (3.4) e si tiene conto del teorema di convoluzione, si ricava il seguente legame tra le trasformate dei campi e delle correnti:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, z) &= \int_{V'_z} \tilde{\underline{\underline{G}}}_{ee}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{J}}(k_x, k_y, z') dz' + \int_{V'_z} \tilde{\underline{\underline{G}}}_{eh}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{M}}(k_x, k_y, z') dz' \\ \tilde{\underline{H}}(k_x, k_y, z) &= \int_{V'_z} \tilde{\underline{\underline{G}}}_{he}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{J}}(k_x, k_y, z') dz' + \int_{V'_z} \tilde{\underline{\underline{G}}}_{hh}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{M}}(k_x, k_y, z') dz'\end{aligned}\quad (3.11)$$

ove si è indicata con V'_z la proiezione del volume V' sull'asse z .

Se si considera ora il caso (che si verifica nelle nostre strutture) in cui le correnti siano da considerarsi superficiali $\underline{J}_S$ ed $\underline{M}_S$, localizzate su piani paralleli al piano xy (conduttori perfetti di spessore infinitesimo) le (3.11) si semplificano ulteriormente, in quanto la

dipendenza da z' nella $\underline{J}$ e nella $\underline{M}$ è espressa da una delta di Dirac centrata su tali piani. L'integrazione rispetto a z' è dunque immediata ed il legame tra campo e correnti diventa puramente algebrico:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, z) &= \tilde{\underline{\underline{G}}}_{ee}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{J}}_S(k_x, k_y) + \tilde{\underline{\underline{G}}}_{eh}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{M}}_S(k_x, k_y) \\ \tilde{\underline{H}}(k_x, k_y, z) &= \tilde{\underline{\underline{G}}}_{he}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{J}}_S(k_x, k_y) + \tilde{\underline{\underline{G}}}_{hh}(k_x, k_y; z, z') \cdot \tilde{\underline{M}}_S(k_x, k_y)\end{aligned}\quad (3.12)$$

ove si è indicata ancora con z' la quota ove è presente la generica corrente superficiale.

Le precedenti relazioni pongono in evidenza che il calcolo delle funzioni di Green, per il tipo di strutture considerate, può essere ricondotto alla soluzione di un problema monodimensionale nella direzione z . In questo caso l'approccio più conveniente per la determinazione dell'espressione delle diadi di Green non è quello di risolvere direttamente le (3.6a) con le opportune condizioni al contorno (come sarà fatto nel paragrafo 7.1.1), ma consiste nel rendere esplicito il legame tra campi e correnti nel dominio trasformato, permettendo così di ricavare a vista l'espressione delle funzioni di Green che compaiono nella (3.12). Ciò si ottiene utilizzando direttamente le equazioni di Maxwell e stabilendo una linea di trasmissione equivalente nella direzione verticale z , in cui compariranno dei generatori in corrispondenza delle correnti.

3.4.3 Costruzione delle funzioni di Green spettrali per strutture planari stratificate

Si considerino le seguenti equazioni di Marcuvitz-Schwinger che saranno ricavate in § 4.3 per un mezzo trasversalmente omogeneo in termini dei campi e delle correnti trasversi e longitudinali rispetto alla direzione z :

$$-\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu \left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right) \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o) + \underline{M}_{te} \times \underline{z}_o \quad (3.13)$$

$$-\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right) \cdot (\underline{z}_o \times \underline{E}_t) + \underline{z}_o \times \underline{J}_{te} \quad (3.14)$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left[\nabla_t \cdot (\underline{z}_o \times \underline{E}_t) - M_z \right] \quad (3.15)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o) - J_z \right] \quad (3.16)$$

ove si sono introdotte le correnti equivalenti trasverse così definite:

$$\underline{M}_{te} = \underline{M}_t + \underline{z}_o \times \frac{\nabla_t J_z}{j\omega\varepsilon} \quad (3.17)$$

$$\underline{J}_{te} = \underline{J}_t + \frac{\nabla_t M_z}{j\omega\mu} \times \underline{z}_o \quad (3.18)$$

Si consideri ora la trasformata di Fourier bidimensionale definita nel paragrafo 3.4.2 dalle (3.8) (3.9). L'operatore differenziale ∇_t diventa, grazie alle proprietà della trasformata di Fourier, l'operatore algebrico $-jk_t = -jk_x \underline{x}_o - jk_y \underline{y}_o$ e le derivate rispetto a z sono da considerarsi a questo punto derivate totali. Si ottengono le seguenti relazioni che rappresentano le trasformate delle (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18):

$$-\frac{d\tilde{E}_t}{dz} = j\omega\mu \left(\underline{I}_t - \frac{k_t k_t}{k^2} \right) \cdot \left(\tilde{H}_t \times \underline{z}_o \right) + \tilde{M}_{te} \times \underline{z}_o \quad (3.19)$$

$$-\frac{d\tilde{H}_t}{dz} = j\omega\varepsilon \left(\underline{I}_t - \frac{k_t k_t}{k^2} \right) \cdot \left(\underline{z}_o \times \tilde{E}_t \right) + \underline{z}_o \times \tilde{J}_{te} \quad (3.20)$$

$$\tilde{H}_z = -\frac{1}{\omega\mu} \left[\underline{k}_t \cdot \left(\underline{z}_o \times \tilde{E}_t \right) - j\tilde{M}_z \right] \quad (3.21)$$

$$\tilde{E}_z = -\frac{1}{\omega\varepsilon} \left[\underline{k}_t \cdot \left(\tilde{H}_t \times \underline{z}_o \right) - j\tilde{J}_z \right] \quad (3.22)$$

$$\tilde{M}_{te} = \tilde{M}_t - \underline{z}_o \times \underline{k}_t \frac{\tilde{J}_z}{\omega\varepsilon} \quad (3.23)$$

$$\tilde{J}_{te} = \tilde{J}_t + \underline{z}_o \times \underline{k}_t \frac{\tilde{M}_z}{\omega\mu} \quad (3.24)$$

Si mostrerà ora come sia possibile, nel dominio spettrale, disaccoppiare le equazioni riferite ai campi TE e TM rispetto a z la cui somma dà luogo al campo totale: si tratta della scomposizione, per ciascuna onda piana componente dello spettro del campo totale, nelle polarizzazioni orizzontale e verticale rispetto alla giacitura di stratificazione. Per ottenere ciò basta effettuare un cambiamento di base ortonormale nel piano xy . Le trasformazioni sono suggerite dalla presenza nelle (3.19) – (3.24) del fattore $\underline{z}_o \times \underline{k}_t$.

Si definisce dunque un sistema di coordinate cartesiane uv , nel piano trasverso, centrato nell'origine del sistema xy , i cui versori $\underline{u}_o$ e $\underline{v}_o$ sono dati dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \underline{u}_o &= \frac{k_t}{k_t} \\ \underline{v}_o &= \underline{z}_o \times \underline{u}_o \end{aligned} \quad \text{con } k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.25)$$

Come indicato in Fig. 3.4 il sistema uv può essere ottenuto ruotando il sistema xy di un angolo ϕ che dipende da k_x e k_y , e quindi dalla particolare componente spettrale considerata.

Se tutti i vettori trasformati vengono scritti in questo riferimento e si considerano le

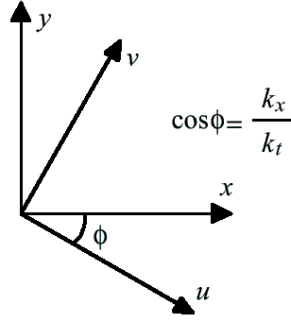


Figura 3.4: rotazione che definisce il sistema uv rispetto a quello fisso xy .

proiezioni della (3.19) sull'asse u e della (3.20) sull'asse v , si ottiene per la prima:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\tilde{E}_u}{dz} &= j\omega\mu \tilde{\underline{H}}_t \times \underline{z}_o \cdot \underline{u}_o - j\omega\mu \left[\frac{k_t k_t}{k^2} \cdot \left(\tilde{\underline{H}}_t \times \underline{z}_o \right) \right] \cdot \underline{u}_o + \tilde{\underline{M}}_{te} \times \underline{z}_o \cdot \underline{u}_o = \\
 &= j\omega\mu \tilde{\underline{H}}_t \cdot \underline{z}_o \times \underline{u}_o - j\omega\mu \left[\frac{k_t}{k^2} \left(\underline{z}_o \cdot \underline{k}_t \times \tilde{\underline{H}}_t \right) \right] \cdot \underline{u}_o + \tilde{\underline{M}}_{te} \cdot \underline{z}_o \times \underline{u}_o = \\
 &= j\omega\mu \tilde{\underline{H}}_t \cdot \underline{v}_o - j\omega\mu \left[\frac{k_t}{k^2} \left(\underline{z}_o \times \underline{k}_t \cdot \tilde{\underline{H}}_t \right) \right] \cdot \underline{u}_o + \tilde{\underline{M}}_{te} \cdot \underline{v}_o = \\
 &= j\omega\mu \tilde{H}_v - j\omega\mu \frac{k_t}{k^2} k_t \left(\underline{v}_o \cdot \tilde{\underline{H}}_t \right) \cdot \underline{u}_o + \tilde{M}_{ve} = \\
 &= j\omega\mu \tilde{H}_v - j\omega\mu \frac{k_t^2}{k^2} \tilde{H}_v + \tilde{M}_{ve} = j\omega\mu \tilde{H}_v \left(1 - \frac{k_t^2}{k^2} \right) + \tilde{M}_{ve} = \\
 &= j\omega\mu \frac{k_z^2}{k^2} \tilde{H}_v + \tilde{M}_{ve}
 \end{aligned}$$

ove sono state sfruttate le proprietà del prodotto misto e la definizione $k_z^2 = k^2 - k_t^2$. Dalla (3.20) invece si ricava:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\tilde{H}_v}{dz} &= j\omega\varepsilon \underline{z}_o \times \tilde{\underline{E}}_t \cdot \underline{v}_o - j\omega\varepsilon \left[\frac{k_t}{k^2} \left(\underline{k}_t \cdot \underline{z}_o \times \tilde{\underline{E}}_t \right) \right] \cdot \underline{v}_o + \underline{z}_o \times \tilde{\underline{J}}_{te} \cdot \underline{v}_o = \\
 &= j\omega\varepsilon \underline{v}_o \times \underline{z}_o \cdot \tilde{\underline{E}}_t + \underline{v}_o \times \underline{z}_o \cdot \tilde{\underline{J}}_{te} = j\omega\varepsilon \underline{u}_o \cdot \tilde{\underline{E}}_t + \underline{u}_o \cdot \tilde{\underline{J}}_{te} = \\
 &= j\omega\varepsilon \tilde{E}_u + \tilde{J}_{ue}
 \end{aligned}$$

avendo nuovamente sfruttato le proprietà del prodotto misto e l'ortogonalità di $\underline{k}_t$ e $\underline{v}_o$.

Si ricava infine il seguente sistema:

$$\frac{d\tilde{E}_u}{dz} = -jk_z \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \tilde{H}_v - \tilde{M}_{ve} \quad (3.26)$$

$$\frac{d\tilde{H}_v}{dz} = -jk_z \frac{\omega\varepsilon}{k_z} \tilde{E}_u - \tilde{J}_{ue} \quad (3.27)$$

Se le (3.19) e (3.20) vengono invece proiettate rispettivamente lungo v ed u , la coppia di equazioni che si ottiene è (sono le duali delle precedenti):

$$\frac{d\tilde{E}_v}{dz} = -jk_z \frac{\omega\mu}{k_z} (-\tilde{H}_u) + \tilde{M}_{ue} \quad (3.28)$$

$$\frac{d(-\tilde{H}_u)}{dz} = -jk_z \frac{k_z}{\omega\mu} \tilde{E}_v - \tilde{J}_{ve} \quad (3.29)$$

Si osservi che le equazioni (3.26), (3.27) e (3.28), (3.29) sono tra loro disaccoppiate, poiché non contengono componenti comuni del campo o delle correnti. Ciascuno dei due sistemi descrive perciò un tipo di campo indipendente dall'altro. In particolare le (3.26), (3.27) contengono soltanto $\tilde{E}_u, \tilde{H}_v$, e le uniche componenti delle correnti impresse che li producono sono $\tilde{J}_{ue}, \tilde{M}_{ve}$. Poiché, inoltre, si ricavano per $\tilde{J}_{ue}, \tilde{M}_{ve}$ dalle (3.24) e (3.23) le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{ue} &= \tilde{J}_u \\ \tilde{M}_{ve} &= \tilde{M}_v - \frac{k_t}{\omega\varepsilon} \tilde{J}_z \end{aligned} \quad (3.30)$$

e la (3.21) per $\tilde{H}_z$ nel sistema di riferimento uv diviene

$$\tilde{H}_z = \frac{1}{\omega\mu} \left(k_t \tilde{E}_v + j \tilde{M}_z \right) \quad (3.31)$$

si deduce che il campo descritto dalle equazioni (3.26) e (3.27) è di tipo TM rispetto a z , e che esse possono essere assimilate alle seguenti equazioni delle linee di trasmissione non omogenee:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= -j k_z Z_o I + v \\ \frac{dI}{dz} &= -j k_z Y_o V + i \end{aligned} \quad (3.32)$$

ove si ponga:

$$\begin{aligned} V^{\text{TM}} &= \tilde{E}_u & I^{\text{TM}} &= \tilde{H}_v & Z_o^{\text{TM}} &= \frac{1}{Y_o^{\text{TM}}} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \\ v^{\text{TM}} &= -\tilde{M}_{ve} & i^{\text{TM}} &= -\tilde{J}_{ue} \end{aligned} \quad (3.33)$$

In modo del tutto analogo si conclude che il campo descritto dalle (3.28) e (3.29) è di tipo TE rispetto a z , e si ricava (relazioni duali delle (3.30) e (3.31)):

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ue} &= \tilde{M}_u \\ \tilde{J}_{ve} &= \tilde{J}_v + \frac{k_t}{\omega\mu} \tilde{M}_z \\ \tilde{E}_z &= -\frac{1}{\omega\varepsilon} \left(k_t \tilde{H}_v - j \tilde{J}_z \right) \end{aligned}$$

Le grandezze della linea di trasmissione equivalente sono definite dalle relazioni che seguono:

$$\begin{aligned} V^{\text{TE}} &= \widetilde{E}_v & I^{\text{TE}} &= -\widetilde{H}_u & Z_o^{\text{TE}} &= \frac{1}{Y_o^{\text{TE}}} = \frac{\omega\mu}{k_z} \\ v^{\text{TE}} &= \widetilde{M}_{ue} & i^{\text{TE}} &= -\widetilde{J}_{ve} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nel dominio spettrale, quindi, cioè per ciascuna componente spettrale, il campo è decomponibile in modi TM e TE, e la dipendenza da z di ciascuno di questi modi è descritta dalle equazioni della linea di trasmissione ad esso associata tramite le (3.33) e (3.34). Il problema della determinazione delle componenti del campo nel dominio spettrale può essere ricondotto a quello del calcolo della tensione e corrente prodotte su una linea di trasmissione da parte di una distribuzione equivalente di tensioni e correnti impresse. In altri termini, la funzione di Green diadica spettrale per il campo può essere costruita a partire dalla funzione di Green scalare per la tensione e la corrente delle equazioni delle linee. In generale i generatori di tensione e corrente sulla linea sono distribuiti, ma poiché nel nostro caso si è interessati al calcolo della risposta ad una densità di corrente di tipo impulsivo, anche tali generatori nel seguito verranno considerati di tipo impulsivo, ossia concentrati su una certa sezione.

Con riferimento alla Fig. 3.5, in cui è indicata una generica linea di trasmissione di impedenza caratteristica ζ_o e costante di propagazione κ , sulla quale sono presenti, in corrispondenza della sezione z' , un generatore concentrato di tensione v_s e uno di corrente i_p , le equazioni (non omogenee) delle linee possono essere così scritte:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -j\kappa\zeta_o I + v_s \delta(z - z') \\ \frac{dI}{dz} = -j\frac{\kappa}{\zeta_o} V + i_p \delta(z - z') \end{cases} \quad (3.35)$$

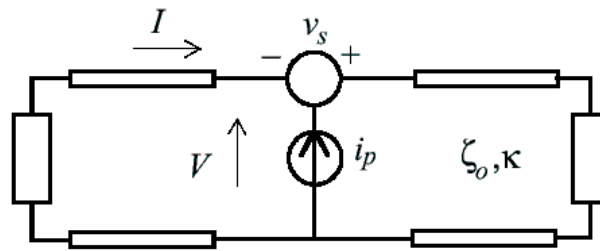


Figura 3.5: linea di trasmissione uniforme eccitata da un generatore di tensione in serie e da uno di corrente in parallelo.

Si supponga di essere in grado di calcolare la soluzione del precedente sistema per valori unitari di v_s e i_p . Per la linearità delle equazioni tale soluzione può essere espressa come sovrapposizione delle soluzioni che si ottengono considerando, alternativamente, solo

il generatore di tensione e solo il generatore di corrente. Per due valori generici delle intensità dei generatori, la soluzione può essere espressa come segue:

$$\begin{aligned} V(z) &= G_{vv}(z, z') v_s + G_{vi}(z, z') i_p \\ I(z) &= G_{iv}(z, z') v_s + G_{ii}(z, z') i_p \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nella precedente $G_{vv}(z, z')$ e $G_{iv}(z, z')$ rappresentano rispettivamente la tensione e la corrente prodotte nella sezione z della linea da un generatore di tensione di valore unitario posto nella sezione z' , mentre $G_{vi}(z, z')$ e $G_{ii}(z, z')$ sono le corrispondenti grandezze prodotte dal generatore di corrente unitario. Si tratta in sostanza delle quattro funzioni di Green per la tensione e la corrente, diverse ovviamente per il caso TM e per il caso TE.

Se le grandezze caratteristiche della linea vengono scelte come indicato nelle (3.33) e (3.34) è immediato fornire l'espressione del campo trasverso prodotto dalle densità di corrente considerate. Ad esempio per la componente TM del campo si può scrivere:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_u(z) &= -G_{vv}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{M}_{ve}(z') - G_{vi}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{J}_{ue}(z') \\ \tilde{H}_v(z) &= -G_{iv}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{M}_{ve}(z') - G_{ii}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{J}_{ue}(z') \\ \tilde{E}_z(z) &= -\frac{1}{\omega \varepsilon(z)} \left\{ k_t \left[-G_{iv}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{M}_{ve}(z') - G_{ii}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{J}_{ue}(z') \right] - j \tilde{J}_z(z') \delta(z - z') \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

L'apice TM che compare nella relazione scritta sta ad indicare che i parametri della linea devono essere quelli caratteristici per questo tipo di modo. È immediato ricavare il corrispondente risultato per il campo TE.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_v(z) &= G_{vv}^{\text{TE}}(z, z') \tilde{M}_{ue}(z') - G_{vi}^{\text{TE}}(z, z') \tilde{J}_{ve}(z') \\ -\tilde{H}_u(z) &= G_{iv}^{\text{TE}}(z, z') \tilde{M}_{ue}(z') - G_{ii}^{\text{TE}}(z, z') \tilde{J}_{ve}(z') \\ \tilde{H}_z(z) &= \frac{1}{\omega \mu(z)} \left\{ k_t \left[G_{vv}^{\text{TE}}(z, z') \tilde{M}_{ue}(z') - G_{vi}^{\text{TE}}(z, z') \tilde{J}_{ve}(z') \right] + j \tilde{M}_z(z') \delta(z - z') \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Si osservi che nelle (3.37) e (3.38) le correnti impresse trasverse equivalenti sono state scritte con l'argomento z' solo per ricordare che si tratta di correnti impulsive lungo z poste all'ascissa z' : in effetti gli argomenti di queste correnti sono solo k_x , k_y , essendo ora sparita dai calcoli la delta di Dirac (si confronti con le equazioni (3.11) e (3.12) del paragrafo 3.4.2). La delta invece rimane ancora nei termini $\tilde{J}_z(z)$ e $\tilde{M}_z(z)$, che compaiono rispettivamente nelle espressioni delle componenti longitudinali $\tilde{E}_z(z)$ e $\tilde{H}_z(z)$, come è stato posto esplicitamente in evidenza.

È interessante osservare che le correnti elettriche trasverse equivalgono ad un generatore di corrente sulla linea, mentre quelle magnetiche trasverse sono rappresentate da un generatore di tensione. Per le componenti longitudinali $\tilde{J}_z$ e $\tilde{M}_z$ delle densità di corrente l'associazione è opposta: $\tilde{J}_z$ dà luogo ad un generatore di tensione, mentre $\tilde{M}_z$ è equivalente ad uno di corrente.

Le (3.37) e (3.38), pur esprimendo un importante risultato, che permette di calcolare il campo a partire da una configurazione arbitraria di correnti, non contengono ancora le

funzioni di Green che ci si propone di derivare. Infatti le grandezze che compaiono nelle (3.37) e (3.38) sono riferite al sistema uv , la cui orientazione dipende dalla componente spettrale considerata, che viene individuata dal vettore $\underline{k}_t$. Per ottenere le espressioni delle funzioni di Green cercate, occorre riscrivere il campo espresso dalle (3.37) e (3.38) nel riferimento cartesiano xy di partenza. Dalla (3.25), che definisce i versori $\underline{u}_o$ e $\underline{v}_o$, si deduce la relazione matriciale che li lega ai versori $\underline{x}_o$ e $\underline{y}_o$:

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_o \\ \underline{v}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_x}{k_t} & \frac{k_y}{k_t} \\ -\frac{k_y}{k_t} & \frac{k_x}{k_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Si consideri un generico vettore $\underline{A}$ sul piano trasverso e si supponga di conoscere le sue componenti nel riferimento uv . Per le componenti nel riferimento xy , tramite la (3.39) si deduce la seguente regola di trasformazione¹:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_x}{k_t} & -\frac{k_y}{k_t} \\ \frac{k_y}{k_t} & \frac{k_x}{k_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_u \\ A_v \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

La (3.40) permette di ricavare le espressioni delle componenti del campo lungo x e y a partire dalle (3.37) e (3.38), ma per ottenere il legame che queste hanno con le componenti cartesiane delle densità di corrente è necessario esprimere $\tilde{J}_{ue}$, $\tilde{J}_{ve}$, $\tilde{M}_{ue}$ e $\tilde{M}_{ve}$ in termini di $\tilde{J}_x$, $\tilde{J}_y$, $\tilde{J}_z$, $\tilde{M}_x$, $\tilde{M}_y$ e $\tilde{M}_z$. Se si riscrivono le (3.24) e (3.23) in forma matriciale e si utilizza la inversa della (3.40) per passare dal sistema xy a quello uv , si ricavano le seguenti relazioni, ove, poiché nelle correnti $\tilde{J}_z$ e $\tilde{M}_z$ era presente una delta centrata in z' , occorre calcolare in z' anche ε e μ .

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_{ue} \\ \tilde{J}_{ve} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x/k_t & k_y/k_t & 0 \\ -k_y/k_t & k_x/k_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_t}{\omega \mu(z')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \\ \tilde{M}_z \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{M}_{ue} \\ \tilde{M}_{ve} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_t}{\omega \varepsilon(z')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_x/k_t & k_y/k_t & 0 \\ -k_y/k_t & k_x/k_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \\ \tilde{M}_z \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Si vuole ora calcolare il campo elettrico totale trasverso. Nel piano uv il legame tra componenti del campo elettrico e densità di correnti può essere espresso in forma matriciale come segue:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_u \\ \tilde{E}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_{vi}^{\text{TM}} & 0 \\ 0 & -G_{vi}^{\text{TE}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_{ue} \\ \tilde{J}_{ve} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -G_{vv}^{\text{TM}} \\ G_{vv}^{\text{TE}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_{ue} \\ \tilde{M}_{ve} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

¹Si ricordi che si tratta di matrici unitarie, in quanto la rotazione è una trasformazione unitaria, per cui l'inversa coincide con la trasposta.

Nella precedente la dipendenza esplicita dalle coordinate non è riportata per abbreviare la notazione e nel seguito verrà indicata solo ove possa sorgere ambiguità.

Utilizzando le (3.40), (3.41) e (3.42) per eliminare tutte le componenti riferite al sistema uv e svolgendo alcuni dei prodotti tra matrici, si deduce l'equazione:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x/k_t & -k_y/k_t \\ k_y/k_t & k_x/k_t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\frac{k_x}{k_t} G_{vi}^{\text{TM}} & -\frac{k_y}{k_t} G_{vi}^{\text{TM}} & \frac{k_t}{\omega \varepsilon(z')} G_{vv}^{\text{TM}} \\ \frac{k_y}{k_t} G_{vi}^{\text{TE}} & -\frac{k_x}{k_t} G_{vi}^{\text{TE}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} + \right. \quad (3.44) \\ \left. + \begin{pmatrix} \frac{k_y}{k_t} G_{vv}^{\text{TM}} & -\frac{k_x}{k_t} G_{vv}^{\text{TM}} & 0 \\ \frac{k_x}{k_t} G_{vv}^{\text{TE}} & \frac{k_y}{k_t} G_{vv}^{\text{TE}} & -\frac{k_t}{\omega \mu(z')} G_{vi}^{\text{TE}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \\ \tilde{M}_z \end{pmatrix} \right]$$

Se sono presenti soltanto densità di correnti elettriche, la precedente diventa:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_x^2 G_{vi}^{\text{TM}} + k_y^2 G_{vi}^{\text{TE}}}{k_t^2} & -\frac{k_x k_y (G_{vi}^{\text{TM}} - G_{vi}^{\text{TE}})}{k_t^2} & \frac{k_x}{\omega \varepsilon(z')} G_{vv}^{\text{TM}} \\ -\frac{k_x k_y (G_{vi}^{\text{TM}} - G_{vi}^{\text{TE}})}{k_t^2} & -\frac{k_y^2 G_{vi}^{\text{TM}} + k_x^2 G_{vi}^{\text{TE}}}{k_t^2} & \frac{k_y}{\omega \varepsilon(z')} G_{vv}^{\text{TM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Nella (3.45) le costanti del mezzo ε e μ dipendono in generale dalla coordinata z' ove sono collocate le correnti, poiché derivano direttamente dalle definizioni di correnti equivalenti. Per ottenere l'espressione completa della funzione di Green spettrale per il campo elettrico $\tilde{G}_{ee}$ non rimane che esprimere anche la componente longitudinale E_z in funzione della densità di corrente e delle tensioni e correnti delle linee di trasmissione introdotte. Ricordando la terza delle (3.37) si era ricavato che:

$$\tilde{E}_z(z) = -\frac{1}{\omega \varepsilon(z)} \left\{ k_t \left[-G_{iv}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{M}_{ve}(z') - G_{ii}^{\text{TM}}(z, z') \tilde{J}_{ue}(z') \right] - j \tilde{J}_z(z') \delta(z - z') \right\} \quad (3.46)$$

Si osservi che la costante dielettrica ε nella (3.46) è in generale funzione dell'ascissa di osservazione z , contrariamente a quanto visto in precedenza, in quanto la (3.46) esprime il legame puntuale tra campo elettrico e campo magnetico. Utilizzando le (3.41) e (3.42) per eliminare $\tilde{J}_{ue}$ e $\tilde{M}_{ve}$ dalla (3.46), si ricava (sempre nell'ipotesi di sole correnti elettriche):

$$\tilde{E}_z = \begin{pmatrix} G_{ii}^{\text{TM}} \frac{k_x}{\omega \varepsilon(z)} & G_{ii}^{\text{TM}} \frac{k_y}{\omega \varepsilon(z)} & -\frac{1}{\omega \varepsilon(z)} \left[\frac{G_{iv}^{\text{TM}} k_t^2}{\omega \varepsilon(z')} - j \delta(z - z') \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Si osservi che la (3.47) contiene un termine singolare rappresentato dalla delta di Dirac, che esprime il legame puntuale tra campo elettrico verticale e la componente verticale della corrente. Questo comportamento è sempre presente nella funzione di Green diadica e può essere espresso analiticamente in modi diversi ([253], [105]). In particolare il risultato ottenuto è comune a tutti quei casi in cui la geometria in esame suggerisca di costruire la funzione di Green utilizzando una rappresentazione trasversa del campo ([2], [90]).

Combinando le (3.45) e (3.47) si ottiene infine l'espressione completa per la funzione di Green $\underline{\tilde{G}}_{ee}(k_x, k_y; z, z')$ del § 3.4.2, scritta sotto forma matriciale.

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_x^2 G_{vi}^{\text{TM}} + k_y^2 G_{vi}^{\text{TE}}}{k_t^2} & -\frac{k_x k_y (G_{vi}^{\text{TM}} - G_{vi}^{\text{TE}})}{k_t^2} & \frac{k_x}{\omega \varepsilon(z')} G_{vv}^{\text{TM}} \\ -\frac{k_x k_y (G_{vi}^{\text{TM}} - G_{vi}^{\text{TE}})}{k_t^2} & -\frac{k_y^2 G_{vi}^{\text{TM}} + k_x^2 G_{vi}^{\text{TE}}}{k_t^2} & \frac{k_y}{\omega \varepsilon(z')} G_{vv}^{\text{TM}} \\ G_{ii}^{\text{TM}} \frac{k_x}{\omega \varepsilon(z)} & G_{ii}^{\text{TM}} \frac{k_y}{\omega \varepsilon(z)} & -\frac{1}{\omega \varepsilon(z)} \left[\frac{G_{iv}^{\text{TM}} k_t^2}{\omega \varepsilon(z')} - j\delta(z - z') \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Le espressioni per le altre tre funzioni di Green diadiche introdotte nel paragrafo 3.4.2 possono essere dedotte seguendo lo stesso procedimento che ha condotto alla (3.48).

Tutta la trattazione precedente è stata basata sull'ipotesi che si disponga delle espressioni per la tensione e la corrente prodotte su una linea rispettivamente da un generatore di tensione e di corrente unitari. È infatti possibile fornire una procedura per calcolare tali grandezze per una linea qualsiasi. Questo sarà l'oggetto del prossimo paragrafo, che illustrerà un approccio sistematico e generale al problema, che può essere facilmente tradotto in un linguaggio di programmazione al calcolatore.

3.4.4 Calcolo della funzione di Green per una linea di trasmissione

La procedura appena descritta per il calcolo delle funzioni di Green spettrali diadiche per un generico mezzo stratificato risulterebbe del tutto inefficace se non fosse possibile determinare in modo relativamente semplice le tensioni e le correnti sulle linee associate ai campi TE e TM nella struttura. Si vuole osservare che l'introduzione del formalismo delle linee di trasmissione non è affatto necessaria per determinare la dipendenza dei campi dalla coordinata verticale z , che può essere ottenuta imponendo direttamente le condizioni al contorno sui campi [3]. Se, in particolare, è presente uno strato di materiale anisotropo è impossibile utilizzare il semplice formalismo introdotto ed è necessario ricorrere ad un modello più complesso, che può risultare non conveniente ed artificioso [222]. Tuttavia se tutti gli strati sono costituiti da materiali omogenei isotropi o uniassici, il modello a linee risulta particolarmente utile, poiché è stato ampiamente studiato e risolto. Esso consente

di utilizzare semplici considerazioni circuitali per rendere più spedito il calcolo e fornire una procedura generale per la valutazione sistematica delle grandezze V ed I .

Si consideri una struttura costituita da N strati di materiali omogenei isotropi, come indicato in Fig. 3.6, in cui gli strati superiore ed inferiore possono essere sia limitati da un piano conduttore che terminare sullo spazio libero. Poiché si è interessati allo studio di strutture guidanti planari, verranno considerate densità di corrente disposte su di un piano di separazione tra due strati. Ciò non è in realtà limitativo, dato che la definizione degli strati può sempre essere compiuta in modo che la precedente ipotesi sia verificata. Se ad esempio le correnti si trovano nella sezione mediana di un certo strato, questo può semplicemente essere rappresentato nel modello da due strati di spessore dimezzato.

Si definisce un asse verticale z , con origine sulla sezione in cui si trovano le sorgenti, supponendo per semplicità che le sorgenti siano in una sola sezione. Possono essere in questo modo individuati un certo numero di strati N_a che sono “sopra” la sezione di eccitazione ed un certo numero N_b “sotto” di essa, con $N_a + N_b = N$. Gli strati superiori, a partire da quello adiacente alle sorgenti, vengono numerati con interi positivi da 1 a N_a , mentre quelli inferiori sono distinti da un indice negativo da -1 a $-N_b$. Lo spessore di ciascuno strato viene corrispondentemente indicato con t_i .

Il corrispondente modello a linee di trasmissione può essere schematizzato come indicato in Fig. 3.7, dove con ζ_n e κ_n si sono indicate rispettivamente l'impedenza caratteristica e la costante di propagazione della linea n -sima.

Le impedenze di chiusura Z_{o_a} e Z_{o_b} possono essere nulle, se rappresentano un piano conduttore, o pari alle impedenze caratteristiche dello spazio libero Z_o^{TE} e Z_o^{TM} per modi TE e TM, se la struttura è aperta.

Si consideri dapprima il caso di eccitazione da parte di un generatore di corrente in parallelo di valore unitario. La tensione e la corrente sulla linea devono soddisfare ovunque le equazioni delle linee di trasmissione omogenee, tranne che nella sezione di eccitazione. Poiché la soluzione omogenea è nota a meno di un fattore di ampiezza, per determinare le espressioni di V e I conviene partire dal valore che esse assumono nella sezione del generatore.

Il circuito equivalente visto dal generatore è rappresentato in Fig. 3.8a, nella quale con Z_{in}^a e Z_{in}^b si sono indicate rispettivamente le impedenze di ingresso guardando verso l'alto e verso il basso, e con V_o^a , I_o^a , V_o^b e I_o^b le tensioni e le correnti sulla linea per $z = 0^+$ e $z = 0^-$.

Si ricavano facilmente le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} V_o^a &= V_o^b = \frac{1}{Y_{in}^a + Y_{in}^b} \\ I_o^a &= Y_{in}^a V_o^a = \frac{Y_{in}^a}{Y_{in}^a + Y_{in}^b} \\ I_o^b &= -Y_{in}^b V_o^b = -\frac{Y_{in}^b}{Y_{in}^a + Y_{in}^b} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Se l'eccitazione è invece rappresentata da un generatore di tensione in serie di valore unitario, il circuito equivalente è quello di Fig. 3.8b. Si ricavano immediatamente i seguenti

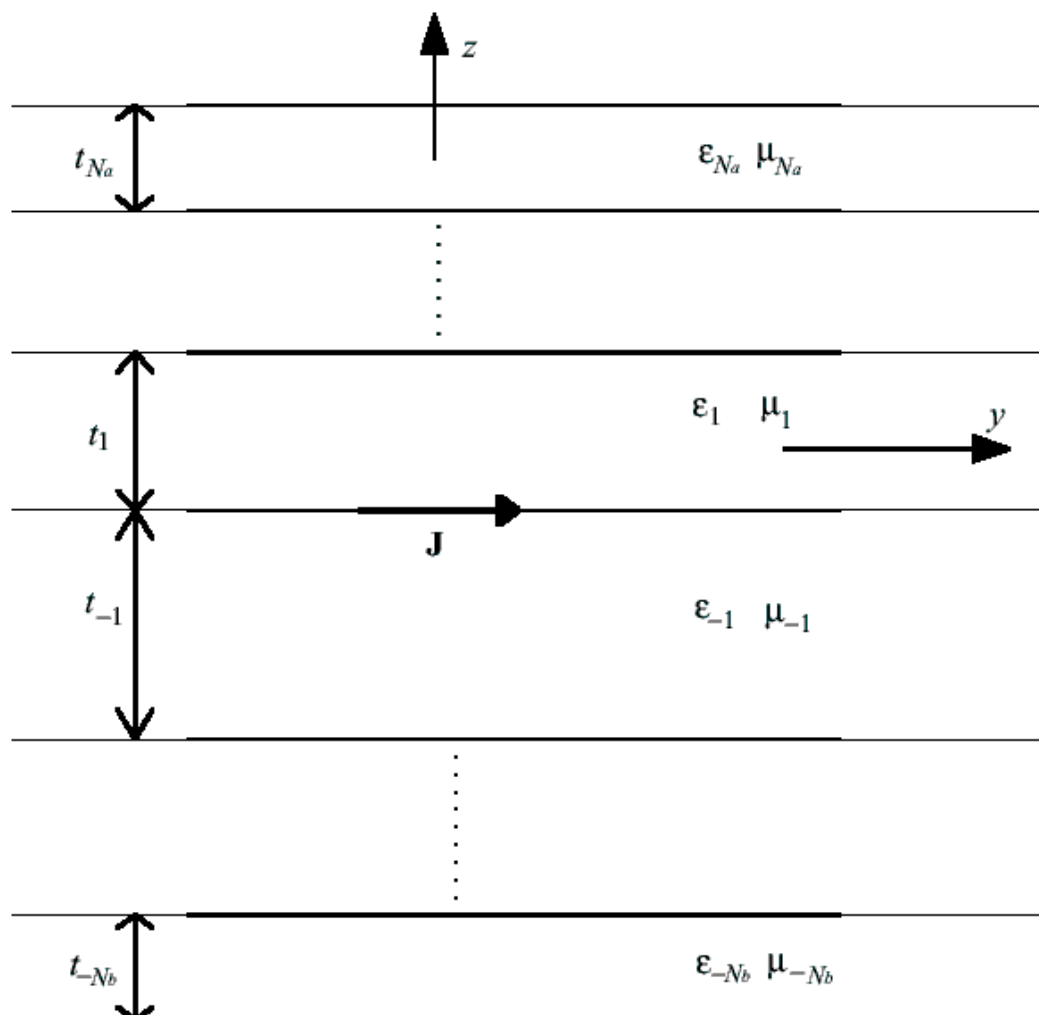


Figura 3.6: struttura a N strati che può terminare superiormente ed inferiormente sullo spazio libero o su un piano conduttore. Gli strati al di sopra del piano in cui sono situate le sorgenti sono numerati da 1 a N_a , quelli al di sotto da -1 a $-N_b$.

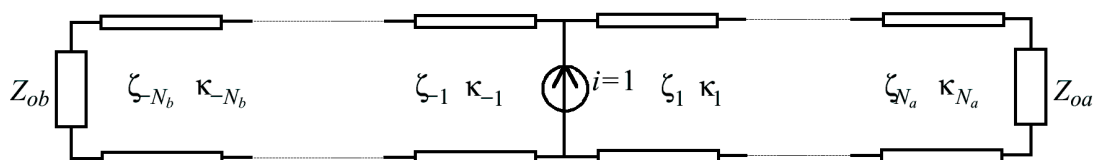


Figura 3.7: struttura a linee di trasmissione equivalente alla geometria di Fig. 3.6

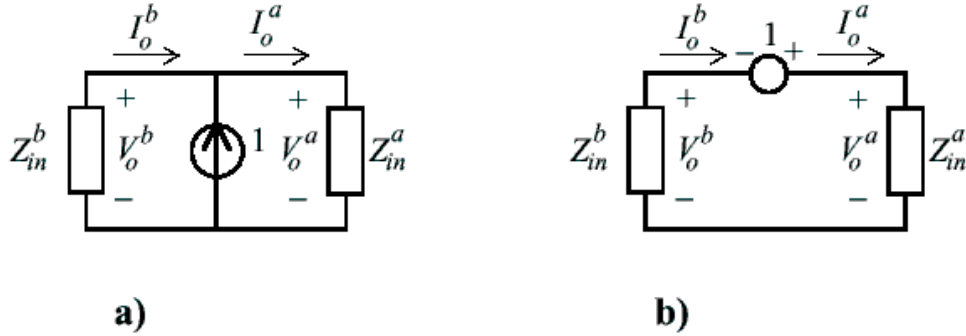


Figura 3.8: configurazione circuitale della linea sulla sezione del generatore. a) Generatore di corrente, b) generatore di tensione. Z_{in}^a e Z_{in}^b sono le impedenze viste dal generatore guardando rispettivamente verso l'alto e verso il basso, Y_{in}^a e Y_{in}^b le corrispondenti ammettenze.

risultati:

$$\begin{aligned} I_o^a &= I_o^b = \frac{1}{Z_{in}^a + Z_{in}^b} \\ V_o^a &= \frac{Z_{in}^a}{Z_{in}^a + Z_{in}^b} \\ V_o^b &= -\frac{Z_{in}^b}{Z_{in}^a + Z_{in}^b} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Per poter utilizzare le (3.49) e (3.50) bisogna essere in grado di calcolare le impedenze di ingresso Z_{in}^a e Z_{in}^b o le corrispondenti ammettenze Y_{in}^a e Y_{in}^b . Si indichino con z_{n-1} e z_n le ascisse delle sezioni che delimitano lo strato n -simo se n è positivo, mentre se n è negativo siano indicate come z_n e z_{n+1} . Si consideri dapprima il calcolo di Z_{in}^a . Essa costituisce l'impedenza di ingresso di N_a linee in cascata. Si può allora applicare ripetutamente la formula che esprime l'impedenza di ingresso di un tratto di linea in funzione dell'impedenza di chiusura in una sezione successiva. Si indichi con Z_n^a l'impedenza nelle sezioni z_n che separano i tratti di linea associati a strati differenti. È chiaro che Z_n^a rappresenta l'impedenza di chiusura della linea associata allo strato n -simo e quella di ingresso della linea $(n+1)$ -sima e che $Z_{in}^a = Z_0^a$. Le Z_n^a possono essere calcolate applicando ripetutamente la formula

$$Z_{n-1}^a = \zeta_n \frac{Z_n^a + j \zeta_n \tan(\kappa_n t_n)}{\zeta_n + j Z_n^a \tan(\kappa_n t_n)} \quad n = N_a, N_a - 1, \dots, 1 \quad (3.51)$$

partendo dalla condizione di chiusura dello strato superiore, $Z_{N_a}^a = Z_{oa}$.

Per il calcolo di Z_{in}^b si procede in modo del tutto analogo: l'impedenza di chiusura dello strato $(-n)$ -simo sarà ora indicata con Z_{-n}^b , mentre quella di ingresso è Z_{-n+1}^b . La condizione di chiusura per lo strato inferiore, da utilizzare come inizializzazione del procedimento

ricorsivo di calcolo è $Z_{-N_b}^b = Z_{ob}$. La (3.51) può essere riscritta come segue:

$$Z_{-(n-1)}^b = \zeta_{-n} \frac{Z_{-n}^b + j \zeta_{-n} \tan(\kappa_{-n} t_{-n})}{\zeta_{-n} + j Z_{-n}^b \tan(\kappa_{-n} t_{-n})} \quad n = N_b, N_b - 1, \dots, 1 \quad (3.52)$$

In modo del tutto analogo si può procedere per le corrispondenti ammettenze.

Una volta che i valori delle correnti e tensioni in $z = 0^+$ e $z = 0^-$ sono stati calcolati, è possibile calcolare la tensione e la corrente in ogni altro punto della linea. Dato un tratto di linea di lunghezza t , impedenza caratteristica ζ_o e costante di propagazione κ , si indichino con V_1 e I_1 la tensione e la corrente nella sezione iniziale e con V_2 e I_2 le corrispondenti grandezze nella sezione finale. La relazione che lega V_2 e I_2 a V_1 e I_1 può essere espressa in forma matriciale, utilizzando la matrice di trasmissione:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa t) & -j \zeta_o \sin(\kappa t) \\ -\frac{j}{\zeta_o} \sin(\kappa t) & \cos(\kappa t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Si consideri il caso in cui il punto di osservazione indicato con l'ascissa z sia al di sopra del generatore, cioè $z > 0$. Siano V_p^a e I_p^a la tensione e la corrente nella sezione $z = z_p$. Per ogni strato al di sopra del piano delle sorgenti, indicato da un indice p positivo, si può definire una matrice di trasmissione $[M_p]$ come segue:

$$[M_p] = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_p t_p) & -j \zeta_p \sin(\kappa_p t_p) \\ -\frac{j}{\zeta_p} \sin(\kappa_p t_p) & \cos(\kappa_p t_p) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Si supponga che il punto di osservazione si trovi nello strato n -simo e quindi sia verificata la disequazione $z_{n-1} < z < z_n$. La tensione e la corrente nel punto di osservazione possono essere espresse attraverso le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned} V(z) &= V_{n-1}^a \cos[\kappa_n(z - z_{n-1})] - j \zeta_n I_{n-1}^a \sin[\kappa_n(z - z_{n-1})] \\ I(z) &= I_{n-1}^a \cos[\kappa_n(z - z_{n-1})] - j \frac{V_{n-1}^a}{\zeta_n} \sin[\kappa_n(z - z_{n-1})] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Non rimane che indicare come possono essere calcolate le grandezze all'ingresso della linea n -sima. Ciò si ottiene molto semplicemente a partire dalla tensione e corrente in $z = 0^+$, utilizzando in cascata le matrici di trasmissione definite dalla (3.54):

$$\begin{bmatrix} V_{n-1}^a \\ I_{n-1}^a \end{bmatrix} = [M_{n-1}] [M_{n-2}] \cdots [M_1] \begin{bmatrix} V_o^a \\ I_o^a \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Se il punto di osservazione corrisponde ad un'ascissa $z < 0$ e $z_{-n} < z < z_{-n+1}$, il procedimento descritto per il calcolo della tensione e corrente nel punto deve tener conto del fatto che il verso nel quale si procede lungo la linea è ora opposto rispetto al verso dell'asse z . Per poter utilizzare la stessa definizione di matrici di trasmissione data dalla (3.54),

occorre considerare un uguale sistema di linee, nel quale, però, si consideri invertito il verso di z e quello di una delle due grandezze tensione e corrente. In particolare se si sta considerando il caso di un generatore di corrente risulta conveniente cambiare segno alla tensione, cosicché, dette V_{-p}^b e I_{-p}^b la tensione e la corrente in $z = z_{-p}$, si possa scrivere:

$$\begin{bmatrix} -V_{-(n-1)}^b \\ I_{-(n-1)}^b \end{bmatrix} = [M_{-(n-1)}] [M_{-(n-2)}] \cdots [M_{-1}] \begin{bmatrix} -V_o^b \\ I_o^b \end{bmatrix} = \quad (3.57)$$

dove le $[M_{-p}]$ sono definite dalla (3.54), ove si ponga $-p$ in luogo di p . La (3.55) diventa:

$$\begin{aligned} -V(z) &= -V_{-(n-1)}^b \cos[\kappa_{-n}(z_{-(n-1)} - z)] - j \zeta_{-n} I_{-(n-1)}^b \sin[\kappa_{-n}(z_{-(n-1)} - z)] \\ I(z) &= I_{-(n-1)}^b \cos[\kappa_{-n}(z_{-(n-1)} - z)] - j \frac{-V_{-(n-1)}^b}{\zeta_{-n}} \sin[\kappa_{-n}(z_{-(n-1)} - z)] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Se il generatore è di tensione, è opportuno cambiare di segno alla corrente. Le precedenti in tal caso devono essere leggermente modificate, in modo che in luogo delle coppie $(-V_{-p}^b, I_{-p}^b)$ compaiano le corrispondenti $(V_{-p}^b, -I_{-p}^b)$.

Il calcolo delle tensioni e correnti prodotte da opportune sorgenti può, quindi, essere svolto per una struttura stratificata qualsiasi. La procedura descritta risulta particolarmente conveniente da tradurre in un codice di calcolo, che può essere chiamato per costruire la funzione di Green diadica o le componenti che di questa interessano.

Nel prossimo paragrafo si vedrà come gli strumenti introdotti consentano di analizzare strutture guidanti planari.

3.4.5 Equazioni integrali per l'analisi di strutture guidanti planari stratificate, il caso della microstriscia

Nei paragrafi precedenti si è visto come sia possibile esprimere il campo elettromagnetico prodotto in una struttura generalmente stratificata, in funzione delle densità di corrente presenti. Se nel mezzo sono presenti corpi conduttori, su questi vengono indotte densità di corrente che devono essere tenute in considerazione nel calcolo del campo totale, insieme alle appropriate condizioni al contorno cui esso deve soddisfare su tali corpi. In altri termini la presenza di conduttori si traduce nella presenza di correnti elettriche, che devono essere determinate imponendo le opportune condizioni al contorno.

Come si è visto, una struttura guidante planare è generalmente costituita da un mezzo stratificato, nel quale si inseriscono strisce o piani conduttori in grado di guidare il campo elettromagnetico. Un modo guidato in una linea di trasmissione di questo genere è caratterizzato completamente una volta che siano note la costante di propagazione longitudinale e la configurazione trasversa delle correnti sui conduttori guidanti. Entrambe possono essere calcolate risolvendo (in genere numericamente) un'opportuna equazione integrale.

Per illustrare nel dettaglio il procedimento che permette di derivare i parametri caratteristici dei modi di una guida planare, verrà considerato il caso semplice, ma molto

significativo, in cui la struttura guidante sia rappresentata da una striscia di larghezza $2w$ e di spessore trascurabile costituita da materiale perfettamente conduttore, posta su un supporto dielettrico terminato da un piano di massa. La generica sezione della linea è schematizzata in Fig. 3.9 nella quale, per coerenza con il sistema di riferimento usato finora, la direzione di propagazione coincide con l'asse x e la striscia si trova sul piano $z = 0$.

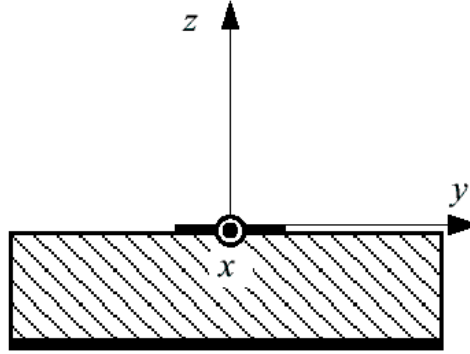


Figura 3.9: sezione di una microstriscia, in cui è indicato il riferimento scelto.

Per un generico modo la densità di corrente può esprimersi come segue:

$$\underline{J}(x, y, z) = e^{-jk_{x_o}x} \underline{J}(y, z) = e^{-jk_{x_o}x} \underline{J}_S(y) \delta(z) = e^{-jk_{x_o}x} \left[\underline{x}_o J_{S_x}(y) + \underline{y}_o J_{S_y}(y) \right] \delta(z) \quad (3.59)$$

Nella (3.59) k_{x_o} rappresenta la costante di propagazione del modo e $J_{S_x}(y)$, $J_{S_y}(y)$ esprimono la dipendenza trasversa delle due componenti della densità di corrente superficiale sulla striscia.

Il campo elettrico prodotto da queste correnti è esprimibile attraverso la funzione di Green diadica $\underline{\underline{G}}_{ee}$, precedentemente introdotta, scritta d'ora in poi per semplicità senza pedici:

$$\underline{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-w}^w \underline{\underline{G}}(x - x', y - y'; z, 0) \cdot \underline{J}_S(y') e^{-jk_{x_o}x'} dx' dy' \quad (3.60)$$

L'integrazione rispetto a x' (in cui la corrente non è coinvolta) può essere svolta utilizzando la definizione di trasformata di Fourier, che permette di ottenere la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x') e^{-jk_x x'} dx' = e^{-jk_x x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{jk_x u} du = e^{-jk_x x} \tilde{f}(k_x) \quad (3.61)$$

(ove si è posto $x - x' = u$). Applicando il risultato espresso dalla (3.61) alla (3.60) si ricava:

$$\underline{E}(x, y, z) = e^{-jk_{x_o}x} \int_{-w}^w \tilde{\underline{\underline{G}}}(k_{x_o}, y - y'; z, 0) \cdot \underline{J}_S(y') dy' = e^{-jk_{x_o}x} \underline{E}(y, z) \quad (3.62)$$

Se si introducono ora le trasformate di Fourier rispetto alla variabile y e si applica alla (3.62) il teorema di convoluzione, si ricava la rappresentazione spettrale del campo elettrico:

$$\underline{E}(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{E}}(k_y, z) e^{-jk_y y} dk_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}(k_{x_o}, k_y; z, 0) \cdot \underline{\tilde{J}}_S(k_y) e^{-jk_y y} dk_y \quad (3.63)$$

Affinché un tale campo elettrico sia quello di un modo della struttura, bisogna che esso soddisfi alle condizioni al contorno sulla striscia conduttrice (le altre condizioni al contorno sono state già incorporate nella funzione di Green) $\underline{n} \times \underline{E}(x, y, z) = 0$, $\forall x$, $-w \leq y \leq w$, $z = 0$, che possono essere così espresse:

$$\underline{z}_o \times \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \cdot \underline{\tilde{J}}_S(k_y) e^{-jk_y y} dk_y = 0 \quad \text{per } -w \leq y \leq w \quad (3.64)$$

La (3.64) è un'equazione integrale omogenea e può pertanto essere verificata da correnti non identicamente nulle solo per particolari valori di k_{x_o} , che rappresentano le costanti di propagazione dei modi della struttura, e le relative autosoluzioni forniscono le corrispondenti configurazioni di densità di corrente sulla striscia.

Per determinare i modi della struttura si procede dunque alla risoluzione numerica della (3.64), impiegando il metodo dei momenti. Le componenti, dipendenti da y , della densità di corrente superficiale sulla striscia, vengono approssimate introducendo due insiemi di funzioni di base $\{J_{x_m}(y)\}$ e $\{J_{y_n}(y)\}$, ponendo:

$$\begin{aligned} J_{S_x}(y) &\cong \sum_{m=1}^M A_m J_{x_m}(y) \\ J_{S_y}(y) &\cong \sum_{n=1}^N B_n J_{y_n}(y) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Successivamente le stesse funzioni $\{J_{x_p}(y)\}$, con $p = 1, \dots, M$, e $\{J_{y_l}(y)\}$, con $l = 1, \dots, N$ vengono scelte come funzioni peso (metodo di Galerkin).

Nel dominio trasformato le componenti tangenziali del campo elettrico sul piano della striscia ($z = 0$) sono espresse dalla (3.63):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x(k_y, 0) &= \tilde{G}_{xx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{S_x}(k_y) + \tilde{G}_{xy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{S_y}(k_y) \\ \tilde{E}_y(k_y, 0) &= \tilde{G}_{yx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{S_x}(k_y) + \tilde{G}_{yy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{S_y}(k_y) \end{aligned}$$

Moltiplicando le predette componenti per le corrispondenti funzioni peso trasformate e integrando rispetto a k_y , si ottiene, applicando il teorema di Parseval:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{E}_x(k_y, 0) dk_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{x_p}(-y) E_x(y, 0) dy = 0 \quad p = 1, \dots, M \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{E}_y(k_y, 0) dk_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{y_l}(-y) E_y(y, 0) dy = 0 \quad l = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.66)$$

ove si è tenuto conto del fatto che le componenti della densità di corrente sono nulle al di fuori della striscia, mentre le componenti del campo elettrico tangenziale sono nulle sulla striscia. Utilizzando le espressioni delle componenti tangenziali del campo elettrico nel dominio trasformato e gli sviluppi delle correnti in termini di funzioni base trasformate, si ricava:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{E}_x(k_y, 0) dk_y \cong \\
& \cong \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{G}_{xx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \sum_{m=1}^M A_m \tilde{J}_{x_m}(k_y) dk_y + \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{G}_{xy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \sum_{n=1}^N B_n \tilde{J}_{y_n}(k_y) dk_y = \\
& = \sum_{m=1}^M A_m \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{G}_{xx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{x_m}(k_y) dk_y + \\
& + \sum_{n=1}^N B_n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{G}_{xy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{y_n}(k_y) dk_y = 0 \quad p = 1, \dots, M \quad (3.67)
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{E}_y(k_y, 0) dk_y \cong \\
& \cong \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{G}_{yx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \sum_{m=1}^M A_m \tilde{J}_{x_m}(k_y) dk_y + \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{G}_{yy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \sum_{n=1}^N B_n \tilde{J}_{y_n}(k_y) dk_y = \\
& = \sum_{m=1}^M A_m \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{G}_{yx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{x_m}(k_y) dk_y + \\
& + \sum_{n=1}^N B_n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{G}_{yy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{y_n}(k_y) dk_y = 0 \quad l = 1, \dots, N \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Al variare di p ed l la (3.67) e la (3.68) descrivono un sistema lineare omogeneo di $(M + N)$ equazioni nelle $(M + N)$ incognite $\{A_m\}$ e $\{B_n\}$, che può essere posto nella

forma:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M Z_{pm}^{xx}(k_{x_o}) A_m + \sum_{n=1}^N Z_{pn}^{xy}(k_{x_o}) B_n &= 0 \quad p = 1, \dots, M \\ \sum_{m=1}^M Z_{lm}^{yx}(k_{x_o}) A_m + \sum_{n=1}^N Z_{ln}^{yy}(k_{x_o}) B_n &= 0 \quad l = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.69)$$

dove si sono introdotte le seguenti definizioni matriciali:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{G}_{xx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{x_m}(k_y) dk_y &= Z_{pm}^{xx}(k_{x_o}) \quad (M \times M) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_p}(k_y) \tilde{G}_{xy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{y_n}(k_y) dk_y &= Z_{pn}^{xy}(k_{x_o}) \quad (M \times N) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{G}_{yx}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{x_m}(k_y) dk_y &= Z_{lm}^{yx}(k_{x_o}) \quad (N \times M) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{y_l}(k_y) \tilde{G}_{yy}(k_{x_o}, k_y; 0, 0) \tilde{J}_{y_n}(k_y) dk_y &= Z_{ln}^{yy}(k_{x_o}) \quad (N \times N) \end{aligned} \quad (3.70)$$

In forma compatta si può scrivere

$$\begin{bmatrix} Z_{pm}^{xx}(k_{x_o}) & Z_{pn}^{xy}(k_{x_o}) \\ Z_{lm}^{yx}(k_{x_o}) & Z_{ln}^{yy}(k_{x_o}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m \\ B_n \end{bmatrix} = 0$$

Detta $[Z]$, di dimensioni $(M + N) \times (M + N)$, la matrice dei coefficienti del sistema, una soluzione non nulla è possibile se e solo se $\det[Z] = 0$. Questa condizione rappresenta l'equazione che consente di calcolare le costanti di propagazione k_{x_o} dei modi della microstriscia e le relative autosoluzioni.

Nella scelta delle funzioni di base conviene tener conto del comportamento singolare che la densità di corrente longitudinale deve avere in corrispondenza del bordo della striscia. Per questo motivo le funzioni di espansione che più comunemente vengono utilizzate sono definite dalle seguenti relazioni:

$$J_{x_m}(y) = \frac{\cos[(m-1)\pi y/w]}{\pi w \sqrt{1 - (y/w)^2}} \quad m = 1, \dots, M \quad |y| \leq w \quad (3.71)$$

$$J_{y_n}(y) = \frac{\sin(n\pi y/w)}{\pi w \sqrt{1 - (y/w)^2}} \quad n = 1, \dots, N \quad |y| \leq w \quad (3.72)$$

Si osservi che la densità di corrente trasversa (3.72) si annulla come deve essere agli estremi della striscia, come si vede applicando il teorema di de l'Hospital.

Più precisamente, le (3.71) e (3.72) si riferiscono a modi pari. Infatti, essendo la struttura guidante simmetrica rispetto al piano xz , i modi si possono suddividere in pari, per i quali il piano mediano $y = 0$ è una parete magnetica perfetta, e dispari, per i quali esso è una parete elettrica perfetta.

Le corrispondenti trasformate di Fourier sono:

$$\tilde{J}_{x_m}(k_y) = \frac{1}{2} \left\{ J_o[k_y w + (m-1)\pi] + J_o[k_y w - (m-1)\pi] \right\} \quad (3.73)$$

$$\tilde{J}_{y_n}(k_y) = \frac{1}{2j} \left[J_o(k_y w + n\pi) - J_o(k_y w - n\pi) \right] \quad (3.74)$$

dove J_o indica la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero.

Il metodo descritto rappresenta un mezzo molto potente per l'analisi delle guide planari stampate e può essere facilmente generalizzato in modo da poter studiare strutture con un numero arbitrario di conduttori.

Nella grande maggioranza dei casi pochissime funzioni di base sono sufficienti per ottenere un'ottima convergenza della soluzione e una rappresentazione accurata delle correnti. Ad esempio, nel caso in cui la larghezza della striscia sia una piccola frazione della lunghezza d'onda la corrente trasversale è addirittura trascurabile e una sola funzione di base per la corrente longitudinale è generalmente sufficiente.

Capitolo 4

Diadi

4.1 Algebra diadica

Le diadi sono tensori del secondo ordine. Detta n la dimensione dello spazio, un tensore di ordine k ha n^k componenti: ad esempio, nel nostro spazio tridimensionale, si tratterà di una matrice 3×3 . Più esattamente, le diadi sono i tensori cartesiani, cioè quando sparisce la differenza tra componenti covarianti e controvarianti. Una diade elementare, indicata con $\underline{\underline{D}}$, è costituita dal prodotto diadico di due vettori come segue:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{A} \underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{B} \end{pmatrix} \quad D_{ij} = A_i B_j$$

dove $\underline{A}$ è chiamato il vettore anteriore, $\underline{B}$ il vettore posteriore.

Vi sono due prodotti scalari, o prodotti contratti, fra una diade $\underline{\underline{D}}$ ed un vettore $\underline{C}$. Il prodotto scalare anteriore è definito da:

$$\underline{C} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{C} \cdot \underline{A} \underline{B} = (\underline{C} \cdot \underline{A}) \underline{B} \quad \begin{pmatrix} \underline{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}} \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare posteriore è definito da:

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{C} = \underline{A} \underline{B} \cdot \underline{C} = \underline{A} (\underline{B} \cdot \underline{C}) \quad \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{C} \end{pmatrix}$$

In entrambi i casi il risultato è un vettore, e nel prodotto contratto si saturano gli indici adiacenti. In generale la moltiplicazione contratta fra un tensore di ordine m ed uno di ordine n (con $m, n > 0$) dà luogo ad un tensore di ordine $m + n - 2$ (un vettore è un tensore di ordine 1, uno scalare di ordine zero).

La trasposta di una diade è definita da:

$$\underline{\underline{D}}^T = (\underline{A} \underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T = \underline{B} \underline{A}$$

se non si fa distinzione fra vettori riga e vettori colonna. Si noti che in generale $\underline{B} \underline{A} \neq \underline{A} \underline{B}$, cioè $\underline{\underline{D}}^T \neq \underline{\underline{D}}$, salvo il caso di matrice simmetrica.

Tornando al prodotto scalare, si ha che $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{C} \neq \underline{C} \cdot \underline{\underline{D}}$, ed in particolare:

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{C} = \underline{C} \cdot \underline{\underline{D}}^T$$

Quindi questo prodotto scalare non è commutativo (si tratta in fondo di un prodotto matriciale), a meno che la diade $\underline{\underline{D}}$ non sia simmetrica.

Vi sono anche due prodotti vettoriali fra una diade $\underline{\underline{D}}$ ed un vettore $\underline{C}$. Essi sono definiti come:

$$\begin{aligned} \underline{C} \times \underline{\underline{D}} &= \underline{C} \times \underline{A} \underline{B} = (\underline{C} \times \underline{A}) \underline{B} && \text{prodotto anteriore} \\ \underline{\underline{D}} \times \underline{C} &= \underline{A} \underline{B} \times \underline{C} = \underline{A} (\underline{B} \times \underline{C}) && \text{prodotto posteriore} \end{aligned}$$

Dunque il prodotto vettoriale tra una diade ed un vettore è ancora una diade. Si ha poi:

$$\underline{C} \times \underline{\underline{D}} = -(\underline{\underline{D}}^T \times \underline{C})^T \quad \Rightarrow \quad \underline{C} \times \underline{\underline{D}} \neq \underline{\underline{D}} \times \underline{C}$$

Se si considera, però, la diade unitaria o identità $\underline{\underline{I}}$, definita dalla

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{A} \quad \forall \underline{A}$$

avente l'espressione matriciale

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{diade simmetrica})$$

ed in due dimensioni

$$\underline{\underline{I}}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\underline{C} \times \underline{\underline{I}} = -(\underline{\underline{I}} \times \underline{C})^T = \underline{\underline{I}} \times \underline{C} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{C}$$

ove risulta:

$$\underline{\underline{I}} \times \underline{A} = \underline{A} \times \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che la diade $\underline{\underline{I}} \times \underline{A}$ è la più generale diade antisimmetrica. Si noti inoltre che non tutte le matrici si possono esprimere come prodotto diadico fra due vettori. Un esempio particolarmente semplice è proprio la matrice unitaria. Tuttavia in ogni caso si può esprimere la matrice come somma di diadi elementari ed usare la proprietà distributiva.

Il tensore $\underline{\underline{R}}$ del terzo ordine è detto di Ricci-Curbastro o di Levi-Civita (che riprese gli studi di Ricci), ed è definito dalla:

$$R_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se almeno 2 indici sono uguali} \\ -1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione di classe pari di } 123 \\ 1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione di classe dispari di } 123 \end{cases}$$

(In realtà si trova in letteratura anche un tensore di Levi-Civita pari a quello di Ricci cambiato di segno, indicato con $\underline{\underline{\varepsilon}}$). Risulta quindi

$$\begin{aligned} R_{123} &= R_{231} = R_{312} = -1 \\ R_{132} &= R_{213} = R_{321} = 1 \end{aligned}$$

essendo nulle tutte le altre componenti.

Per una terna cartesiana destra di versori $\underline{x}_{o1}, \underline{x}_{o2}, \underline{x}_{o3}$, cioè tale che si abbia

$$\underline{x}_{o1} \cdot (\underline{x}_{o2} \times \underline{x}_{o3}) = 1$$

risulta

$$R_{ijk} = -\underline{x}_{oi} \cdot (\underline{x}_{oj} \times \underline{x}_{ok}) \quad (\text{con } i, j, k = 1, 2, 3)$$

Il tensore di Ricci come è noto permette di esprimere il prodotto vettoriale (che nella consueta definizione è legato in modo ineliminabile alle caratteristiche del nostro abituale spazio tridimensionale) attraverso prodotti contratti (come il prodotto scalare), secondo la:

$$\underline{A} \times \underline{B} = (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B}$$

permettendo così una più agevole generalizzazione a spazi n -dimensionali (ad es. per considerazioni relativistiche).

In coordinate cartesiane la diade $\underline{\underline{D}}$ si può scrivere esplicitamente:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \underline{A} \underline{B} = (A_x \underline{x}_o + A_y \underline{y}_o + A_z \underline{z}_o) (B_x \underline{x}_o + B_y \underline{y}_o + B_z \underline{z}_o) = \\ &= A_x B_x \underline{x}_o \underline{x}_o + A_x B_y \underline{x}_o \underline{y}_o + A_x B_z \underline{x}_o \underline{z}_o + \\ &+ A_y B_x \underline{y}_o \underline{x}_o + A_y B_y \underline{y}_o \underline{y}_o + A_y B_z \underline{y}_o \underline{z}_o + \\ &+ A_z B_x \underline{z}_o \underline{x}_o + A_z B_y \underline{z}_o \underline{y}_o + A_z B_z \underline{z}_o \underline{z}_o = \\ &= (\underline{x}_o \quad \underline{y}_o \quad \underline{z}_o) \begin{pmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La diade $\underline{\underline{D}}$ e la sua trasposta $\underline{\underline{D}}^T$ si possono scrivere anche nella seguente forma compatta (con notazione analoga a quella usata per i vettori):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \underline{D}_x \underline{x}_o + \underline{D}_y \underline{y}_o + \underline{D}_z \underline{z}_o \\ \underline{\underline{D}}^T &= \underline{D}_x^T \underline{x}_o + \underline{D}_y^T \underline{y}_o + \underline{D}_z^T \underline{z}_o \\ \underline{\underline{D}} &= \underline{x}_o \underline{D}_x^T + \underline{y}_o \underline{D}_y^T + \underline{z}_o \underline{D}_z^T \end{aligned}$$

(si presti attenzione all'ordine dei fattori), dove

$$\begin{aligned}\underline{D}_x &= A_x B_x \underline{x}_o + A_y B_x \underline{y}_o + A_z B_x \underline{z}_o = B_x \underline{A} \\ \underline{D}_y &= A_x B_y \underline{x}_o + A_y B_y \underline{y}_o + A_z B_y \underline{z}_o = B_y \underline{A} \\ \underline{D}_z &= A_x B_z \underline{x}_o + A_y B_z \underline{y}_o + A_z B_z \underline{z}_o = B_z \underline{A}\end{aligned}$$

sono i 3 vettori colonna della matrice $\underline{\underline{D}} = \underline{A} \underline{B}$. Similmente $\underline{D}_x^T, \underline{D}_y^T, \underline{D}_z^T$ sono i vettori colonna della matrice $\underline{\underline{D}}^T$, ossia i vettori riga di $\underline{\underline{D}}$. Si noti che nella prima delle formule precedenti per $\underline{\underline{D}}$ la matrice è vista come un vettore riga avente come elementi le colonne, nella terza formula invece è vista come un vettore colonna avente come elementi le righe. In termini di questi vettori, è possibile riscrivere i prodotti scalari anteriore e posteriore nel seguente modo, che richiama la regola per i vettori:

$$\begin{aligned}\underline{C} \cdot \underline{\underline{D}} &= C_x \underline{D}_x^T + C_y \underline{D}_y^T + C_z \underline{D}_z^T \\ \underline{\underline{D}} \cdot \underline{C} &= \underline{D}_x C_x + \underline{D}_y C_y + \underline{D}_z C_z\end{aligned}$$

Infatti la matrice moltiplicata scalarmente a sinistra può essere vista come un vettore colonna, invece moltiplicata a destra si può vedere come un vettore riga. Il prodotto scalare fra due diadi $\underline{\underline{D}} = \underline{A} \underline{B}$ e $\underline{\underline{G}} = \underline{E} \underline{F}$ è definito come:

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{G}} = \underline{A} \underline{B} \cdot \underline{E} \underline{F} = \underline{A} (\underline{B} \cdot \underline{E}) \underline{F} \quad \left(\underline{\underline{D}} \right) \left(\underline{\underline{G}} \right) = \left(\underline{A} \right) \left(\underline{B} \right) \left(\underline{E} \right) \left(\underline{F} \right)$$

Il risultato è un'altra diade. Si tratta del prodotto righe per colonne fra le due matrici. Questo prodotto, come è noto, non è in generale commutativo, e si ha:

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{G}} = \left(\underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{D}}^T \right)^T \neq \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{D}}$$

Tornando alla diade unitaria, si ha come è noto

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{D}} \quad \forall \underline{\underline{D}}$$

In coordinate cartesiane

$$\underline{\underline{I}} = \underline{x}_o \underline{x}_o + \underline{y}_o \underline{y}_o + \underline{z}_o \underline{z}_o$$

ed in due dimensioni:

$$\underline{\underline{I}}_t = \underline{x}_o \underline{x}_o + \underline{y}_o \underline{y}_o$$

La traccia di una diade $\underline{\underline{D}} = \underline{A} \underline{B}$ è, come è noto, la somma dei suoi elementi diagonali, cioè risulta:

$$\text{tr} \left[\underline{\underline{D}} \right] = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \underline{A} \cdot \underline{B}$$

Si può anche definire il prodotto vettoriale fra due diadi:

$$\underline{\underline{D}} \times \underline{\underline{G}} = \underline{A} \underline{B} \times \underline{E} \underline{F} = \underline{A} (\underline{B} \times \underline{E}) \underline{F}$$

che risulta un tensore del terzo ordine.

Miscellanea di relazioni algebriche fra scalari, vettori e diadi

Dopo la definizione di prodotto scalare la seguente scrittura non è più ambigua (non servono le parentesi)

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} \underline{C} \quad \left(\begin{array}{c} \underline{A} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \underline{B} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \underline{C} \end{array} \right)$$

Se a è uno scalare, si ha

$$a \underline{D} = \underline{D} a \\ a \underline{A} \underline{B} = (a \underline{A}) \underline{B} = \underline{A} (a \underline{B})$$

Le seguenti relazioni mostrano che la diade $\underline{D}$, comunque accerchiata, non ha bisogno delle parentesi.

$$\begin{aligned} (\underline{A} \cdot \underline{D}) \cdot \underline{B} &= \underline{A} \cdot (\underline{D} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} && \text{(il risultato è uno scalare)} && \left(\begin{array}{c} \underline{A} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \underline{D} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \underline{B} \end{array} \right) \\ (\underline{A} \times \underline{D}) \cdot \underline{B} &= \underline{A} \times (\underline{D} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \times \underline{D} \cdot \underline{B} && && \text{(vettore)} \\ (\underline{A} \cdot \underline{D}) \times \underline{B} &= \underline{A} \cdot (\underline{D} \times \underline{B}) = \underline{A} \cdot \underline{D} \times \underline{B} && && \text{(vettore)} \\ (\underline{A} \times \underline{D}) \times \underline{B} &= \underline{A} \times (\underline{D} \times \underline{B}) = \underline{A} \times \underline{D} \times \underline{B} && && \text{(diade)} \\ (\underline{A} \cdot \underline{D}) \cdot \underline{G} &= \underline{A} \cdot (\underline{D} \cdot \underline{G}) = \underline{A} \cdot \underline{D} \cdot \underline{G} && && \text{(vettore)} \\ (\underline{G} \cdot \underline{D}) \cdot \underline{A} &= \underline{G} \cdot (\underline{D} \cdot \underline{A}) = \underline{G} \cdot \underline{D} \cdot \underline{A} && && \text{(vettore)} \\ (\underline{H} \cdot \underline{D}) \cdot \underline{G} &= \underline{H} \cdot (\underline{D} \cdot \underline{G}) = \underline{H} \cdot \underline{D} \cdot \underline{G} && && \text{(diade)} \\ (\underline{A} \times \underline{D}) \cdot \underline{G} &= \underline{A} \times (\underline{D} \cdot \underline{G}) = \underline{A} \times \underline{D} \cdot \underline{G} && && \text{(diade)} \\ (\underline{G} \cdot \underline{D}) \times \underline{A} &= \underline{G} \cdot (\underline{D} \times \underline{A}) = \underline{G} \cdot \underline{D} \times \underline{A} && && \text{(diade)} \end{aligned}$$

Le seguenti relazioni mostrano che è possibile scambiare il punto con la croce:

$$\begin{aligned} (\underline{A} \times \underline{B}) \cdot \underline{D} &= \underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{D}) && \text{(vettore)} \\ (\underline{D} \times \underline{A}) \cdot \underline{B} &= \underline{D} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) && \text{(vettore)} \\ (\underline{D} \times \underline{A}) \cdot \underline{G} &= \underline{D} \cdot (\underline{A} \times \underline{G}) && \text{(diade)} \end{aligned}$$

Si ha inoltre, per il doppio prodotto vettoriale:

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{D}) = \underline{B} (\underline{A} \cdot \underline{D}) - \underline{D} (\underline{A} \cdot \underline{B}) \quad \text{(diade)}$$

Questa formula è simile a quella valida per i vettori. Le seguenti espressioni invece forniscono il doppio prodotto vettoriale tra vettori in termini diadi:

$$\begin{aligned}\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) &= \underline{A} \cdot (\underline{C} \underline{B} - \underline{B} \underline{C}) && \text{(vettore)} \\ (\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} &= (\underline{B} \underline{A} - \underline{A} \underline{B}) \cdot \underline{C} && \text{(vettore)}\end{aligned}$$

Si ha infine:

$$\underline{A} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{A}$$

(si tratta di uno scalare, che deve dunque essere uguale al suo trasposto).

La diade unitaria gode inoltre delle proprietà:

$$(\underline{\underline{I}} \times \underline{A}) \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot (\underline{\underline{I}} \times \underline{B}) = \underline{A} \times \underline{B} \quad \text{(vettore)}$$

Risulta infatti:

$$(\underline{\underline{I}} \times \underline{A}) \cdot \underline{B} = \underline{\underline{I}} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{A} \times \underline{B} = \underline{A} \times \underline{B}$$

D'altra parte:

$$\underline{A} \cdot (\underline{\underline{I}} \times \underline{B}) = (\underline{A} \cdot \underline{\underline{I}}) \times \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{\underline{I}} \times \underline{B} = \underline{A} \times \underline{B}$$

come volevasi dimostrare. Si ha inoltre

$$(\underline{\underline{I}} \times \underline{A}) \cdot \underline{\underline{D}} = (\underline{A} \times \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{A} \times \underline{\underline{D}} \quad \text{(diade)}$$

Infatti:

$$(\underline{\underline{I}} \times \underline{A}) \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \cdot (\underline{A} \times \underline{\underline{D}}) = \underline{A} \times \underline{\underline{D}}$$

D'altra parte:

$$(\underline{A} \times \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{A} \times (\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{D}}) = \underline{A} \times \underline{\underline{D}}$$

Risulta poi:

$$\underline{\underline{I}} \times (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \underline{A} - \underline{A} \underline{B} \quad \text{(diade)}$$

4.2 Analisi diadica

Per le varie relazioni differenziali si ha:

$$\frac{d\underline{\underline{D}}}{dt} = \frac{d\underline{D}_x}{dt} \underline{x}_o + \frac{d\underline{D}_y}{dt} \underline{y}_o + \frac{d\underline{D}_z}{dt} \underline{z}_o \quad (\text{diade})$$

$$\frac{d}{dt} \left(f \underline{\underline{D}} \right) = f \frac{d\underline{\underline{D}}}{dt} + \frac{df}{dt} \underline{\underline{D}} \quad (\text{diade})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{A} \right) = \frac{d\underline{\underline{D}}}{dt} \cdot \underline{A} + \underline{\underline{D}} \cdot \frac{d\underline{A}}{dt} \quad (\text{vettore})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{\underline{D}} \times \underline{A} \right) = \frac{d\underline{\underline{D}}}{dt} \times \underline{A} + \underline{\underline{D}} \times \frac{d\underline{A}}{dt} \quad (\text{diade})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{G}} \right) = \frac{d\underline{\underline{D}}}{dt} \cdot \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{D}} \cdot \frac{d\underline{\underline{G}}}{dt} \quad (\text{diade})$$

Per i vari operatori differenziali valgono le relazioni seguenti.

Gradiente di un vettore (diade):

$$\nabla \underline{A} = \underline{x}_o \frac{\partial \underline{A}}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial \underline{A}}{\partial y} + \underline{z}_o \frac{\partial \underline{A}}{\partial z} = \nabla A_x \underline{x}_o + \nabla A_y \underline{y}_o + \nabla A_z \underline{z}_o = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Gradiente di una diade (tensore del terzo ordine):

$$\nabla \underline{\underline{D}} = \underline{x}_o \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial y} + \underline{z}_o \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial z}$$

Divergenza di una diade (vettore) (si noti che nella prima forma nel prodotto scalare a sinistra la diade si comporta come un vettore colonna che ha come componenti le righe, mentre nella seconda forma le componenti del vettore divergenza sono le divergenze dei vettori colonna):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{D}} = \frac{\partial \underline{D}_x^T}{\partial x} + \frac{\partial \underline{D}_y^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{D}_z^T}{\partial z} = (\nabla \cdot \underline{D}_x) \underline{x}_o + (\nabla \cdot \underline{D}_y) \underline{y}_o + (\nabla \cdot \underline{D}_z) \underline{z}_o$$

Rotore di una diade (diade) (si noti che i vettori colonna della diade rotore sono i rotori dei vettori colonna della diade di partenza):

$$\nabla \times \underline{\underline{D}} = \begin{vmatrix} \underline{x}_o & \underline{y}_o & \underline{z}_o \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{D}_x^T & \underline{D}_y^T & \underline{D}_z^T \end{vmatrix} = (\nabla \times \underline{D}_x) \underline{x}_o + (\nabla \times \underline{D}_y) \underline{y}_o + (\nabla \times \underline{D}_z) \underline{z}_o$$

Laplaciano di una diade (diade):

$$\nabla^2 \underline{\underline{D}} = \frac{\partial^2 \underline{\underline{D}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\underline{D}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\underline{D}}}{\partial z^2}$$

Introdotta la definizione di gradiente di un vettore, valgono le espressioni:

$$\nabla (\underline{A} \times \underline{B}) = (\nabla \underline{A}) \times \underline{B} - (\nabla \underline{B}) \times \underline{A} \quad (\text{diade})$$

$$\nabla (f \underline{A}) = (\nabla f) \underline{A} + f (\nabla \underline{A}) \quad (\text{diade})$$

Inoltre, introdotte le nozioni di divergenza e rotore di una diade, si ha, in modo del tutto analogo che per i vettori:

$$\nabla \cdot (f \underline{\underline{D}}) = \nabla f \cdot \underline{\underline{D}} + f \nabla \cdot \underline{\underline{D}} \quad (\text{vettore})$$

$$\nabla \times (f \underline{\underline{D}}) = \nabla f \times \underline{\underline{D}} + f \nabla \times \underline{\underline{D}} \quad (\text{diade})$$

Per la divergenza ed il rotore di una diade espressa come giustapposizione di due vettori si ha:

$$\nabla \cdot (\underline{A} \underline{B}) = (\nabla \cdot \underline{A}) \underline{B} + \underline{A} \cdot (\nabla \underline{B}) \quad (\text{vettore})$$

$$\nabla \times (\underline{A} \underline{B}) = (\nabla \times \underline{A}) \underline{B} - \underline{A} \times (\nabla \underline{B}) \quad (\text{diade})$$

Come per i vettori, valgono anche per le diadi le identità:

$$\nabla \times (\nabla \underline{A}) = 0 \quad (\text{diade})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{\underline{D}}) = 0 \quad (\text{vettore})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{D}}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{\underline{D}}) - \nabla^2 \underline{\underline{D}} \quad (\text{diade})$$

Si ha inoltre:

$$\nabla \cdot (\underline{B} \underline{A} - \underline{A} \underline{B}) = \nabla \times (\underline{A} \times \underline{B}) \quad (\text{vettore})$$

$$(\underline{A} \cdot \nabla) \underline{B} = \underline{A} \cdot (\nabla \underline{B}) = \underline{A} \cdot \nabla \underline{B} \quad (\text{vettore})$$

nelle quali l'operatore ∇ si comporta come un qualsiasi vettore. L'ultima relazione vale anche per le diadi:

$$(\underline{A} \cdot \nabla) \underline{\underline{D}} = \underline{A} \cdot (\nabla \underline{\underline{D}}) = \underline{A} \cdot \nabla \underline{\underline{D}} = A_x \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial z} \quad (\text{diade})$$

Per quanto riguarda la diade unitaria, valgono le proprietà (casi particolari delle formule già viste ove si tenga conto che la diade unitaria è una diade costante):

$$\nabla \cdot (f \underline{\underline{I}}) = \nabla f \quad (\text{vettore})$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{I}}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{I}} \times \underline{\underline{A}}) = \nabla \times \underline{\underline{A}} \quad (\text{vettore})$$

$$\nabla \times (f \underline{\underline{I}}) = \nabla f \times \underline{\underline{I}} \quad (\text{diade})$$

Operatore diadico $\nabla \nabla$:

$$\nabla \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

È un tensore simmetrico se vale il teorema di Schwarz per le funzioni alle quali si applica. In due dimensioni:

$$\nabla_t \nabla_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Valgono poi le seguenti relazioni integrali:

Teorema del gradiente	$\int_V \nabla \underline{\underline{A}} dV$	$= \oint_S \underline{\underline{n}} \underline{\underline{A}} dS$	(diade)
Teorema della divergenza	$\int_V \nabla \cdot \underline{\underline{D}} dV$	$= \oint_S \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{D}} dS$	(vettore)
Teorema del rotore	$\int_V \nabla \times \underline{\underline{D}} dV$	$= \oint_S \underline{\underline{n}} \times \underline{\underline{D}} dS$	(diade)
Teorema di Stokes	$\oint_s \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{D}} ds$	$= \int_S \underline{\underline{n}} \cdot \nabla \times \underline{\underline{D}} dS$	(vettore)

del tutto analoghe alle corrispondenti per i vettori. Valgono inoltre i teoremi di Green, che trasformano un integrale di volume in uno di superficie:

$$\int_V \left\{ \underline{A} \cdot \left[\nabla (\nabla \cdot \underline{D}) \right] - \left[\nabla (\nabla \cdot \underline{A}) \right] \cdot \underline{D} \right\} dV = \oint_S \left[(\underline{n} \cdot \underline{A}) (\nabla \cdot \underline{D}) - (\nabla \cdot \underline{A}) (\underline{n} \cdot \underline{D}) \right] dS \quad (\text{vettore})$$

$$\int_V \left[(\nabla \times \nabla \times \underline{A}) \cdot \underline{D} - \underline{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \underline{D}) \right] dV = \oint_S \underline{n} \cdot \left[\underline{A} \times (\nabla \times \underline{D}) + (\nabla \times \underline{A}) \times \underline{D} \right] dS \quad (\text{vettore})$$

4.3 Formalismo di Marcuvitz-Schwinger per le equazioni di Maxwell

Dopo aver decomposto i campi, le correnti ed il ∇ nelle parti longitudinale e trasversa (rispetto a z):

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{E}_t + \underline{z}_o E_z & \underline{H} &= \underline{H}_t + \underline{z}_o H_z \\ \underline{J} &= \underline{J}_t + \underline{z}_o J_z & \underline{M} &= \underline{M}_t + \underline{z}_o M_z \\ \nabla &= \nabla_t + \underline{z}_o \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

ove con $\underline{J}$ e $\underline{M}$ (rispettivamente $\underline{J}_i$ e $\underline{J}_{m_i}$ di Campi I) si indicano le correnti impresse elettriche e magnetiche, si ha dalla prima equazione di Maxwell (mezzi isotropi)

$$\nabla \times \underline{E} = -\underline{M} - j\omega\mu \underline{H}$$

sostituendo:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= \left(\nabla_t + \underline{z}_o \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z) = \nabla_t \times \underline{E}_t + \nabla_t \times (\underline{z}_o E_z) + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} + \underline{z}_o \times \underline{z}_o \frac{\partial E_z}{\partial z} = \\ &= -\underline{M}_t - \underline{z}_o M_z - j\omega\mu \underline{H}_t - j\omega\mu \underline{z}_o H_z \end{aligned}$$

Negli ultimi due addendi a primo membro si è tenuto conto del fatto che l'operatore $\partial/\partial z$ è scalare.

Moltiplicando vettorialmente a sinistra per $\underline{z}_o$ si ha:

$$\begin{aligned} \underline{z}_o \times (\nabla_t \times \underline{E}_t) + \underline{z}_o \times \left[\nabla_t \times (\underline{z}_o E_z) \right] + \underline{z}_o \times \left(\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} \right) &= \\ = -\underline{z}_o \times \underline{M}_t - \underline{z}_o \times \underline{z}_o M_z - j\omega\mu \underline{z}_o \times \underline{H}_t - j\omega\mu \underline{z}_o \times \underline{z}_o H_z \end{aligned}$$

Il primo addendo a primo membro risulta nullo. Per il secondo si ricordi l'identità vettoriale

$$\nabla \times (\varphi \underline{A}) = \varphi \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \times \nabla \varphi$$

per cui, applicandola al nabla trasverso ∇_t , si ha:

$$\nabla_t \times (\underline{E}_z \underline{z}_o) = \underline{E}_z \nabla_t \times \underline{z}_o - \underline{z}_o \times \nabla_t \underline{E}_z = -\underline{z}_o \times \nabla_t \underline{E}_z$$

essendo $\underline{z}_o$ un vettore costante. Inoltre, dalla regola del doppio prodotto vettoriale

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B} (\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C} (\underline{A} \cdot \underline{B})$$

si ha:

$$-\underline{z}_o \times (\underline{z}_o \times \nabla_t E_z) = -\underline{z}_o (\underline{z}_o \cdot \nabla_t E_z) + \nabla_t E_z (\underline{z}_o \cdot \underline{z}_o) = \nabla_t E_z$$

e analogamente

$$\underline{z}_o \times \left(\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z}$$

Si tratta cioè di casi particolari di un prodotto del tipo $\underline{z}_o \times (\underline{z}_o \times \underline{A}) = -\underline{A}_t$, essendo $\underline{A}_t$ il componente trasverso del generico vettore $\underline{A}$ rispetto al generico versore $\underline{z}_o$. Mentre invece si ha $\underline{z}_o \times \underline{A} \times \underline{z}_o = \underline{A}_t$ ed infine $(\underline{z}_o \times \underline{A}) \cdot (\underline{z}_o \times \underline{B}) = \underline{A}_t \cdot \underline{B}_t$, come ad esempio $(\underline{n} \times \underline{E}) \cdot (\underline{n} \times \underline{H}) = \underline{E}_\tau \cdot \underline{H}_\tau$, essendo $\underline{E}_\tau$ e $\underline{H}_\tau$ i componenti tangenziali di $\underline{E}$ e di $\underline{H}$ ed $\underline{n}$ il versore normale.

Rimettendo insieme i pezzi si ha:

$$\nabla_t E_z - \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -\underline{z}_o \times \underline{M}_t - j\omega\mu \underline{z}_o \times \underline{H}_t$$

Risulta dunque:

$$-\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -\nabla_t E_z - \underline{z}_o \times \underline{M}_t - j\omega\mu \underline{z}_o \times \underline{H}_t$$

Si vuole ora ottenere un'equazione nei soli campi trasversi, per cui è necessario eliminare il termine $\nabla_t E_z$ ricorrendo alla seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + j\omega\varepsilon_c \underline{E}$$

Moltiplicando scalarmente per $\underline{z}_o$ si ottiene la componente E_z :

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} (\underline{z}_o \cdot \nabla \times \underline{H} - J_z)$$

Ipotizzando a questo punto il mezzo trasversalmente omogeneo si ha:

$$\nabla_t E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \left[\nabla_t (\underline{z}_o \cdot \nabla \times \underline{H}) - \nabla_t J_z \right]$$

D'altra parte si ha $\underline{z}_o \cdot \nabla \times \underline{H} = \underline{z}_o \cdot \nabla_t \times \underline{H}_t$, e ricordando l'identità

$$\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \cdot \nabla \times \underline{B}$$

segue che per un generico vettore $\underline{B}$

$$\nabla_t \cdot (\underline{z}_o \times \underline{B}) = \nabla_t \cdot (\underline{z}_o \times \underline{B}_t) = \underline{B}_t \cdot \nabla_t \times \underline{z}_o - \underline{z}_o \cdot \nabla_t \times \underline{B}_t = -\underline{z}_o \cdot \nabla_t \times \underline{B}_t$$

come si poteva ottenere dalla proprietà di permutazione ciclica del prodotto misto, tenendo in conto che $\underline{z}_o$ è un vettore costante.

In particolare dunque

$$\underline{z}_o \cdot \nabla_t \times \underline{H}_t = \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o)$$

Si ha infine:

$$\nabla_t E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \left[\nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o) - \nabla_t J_z \right]$$

Tornando all'espressione di $-\partial \underline{E}_t / \partial z$ risulta:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \left[\nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o) - \nabla_t J_z \right] + \underline{M}_t \times \underline{z}_o + j\omega\mu \underline{H}_t \times \underline{z}_o = \\ &= j\omega\mu \left[\underline{H}_t \times \underline{z}_o + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o) \right] + \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \nabla_t J_z + \underline{M}_t \times \underline{z}_o \end{aligned}$$

Questa è la cercata relazione in cui compaiono i soli campi trasversi, mentre la componente E_z si ottiene dalla:

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} (\underline{z}_o \cdot \nabla_t \times \underline{H}_t - J_z) = \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \left[\nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o) - J_z \right]$$

e risulta quindi ricavabile a partire dal campo trasverso, note le correnti impresse. Introducendo un formalismo diadico si può anche scrivere:

$$-\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu \left(\underline{I}_t + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \right) \cdot (\underline{H}_t \times \underline{z}_o) + \left(\frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \nabla_t J_z + \underline{M}_t \times \underline{z}_o \right)$$

dove l'espressione nell'ultima parentesi si può chiamare anche $\underline{M}_{te} \times \underline{z}_o$, avendo introdotto una corrente magnetica impressa trasversa equivalente:

$$\underline{M}_{te} = \underline{M}_t + \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} \underline{z}_o \times \nabla_t J_z$$

Applicando a questo punto il principio di dualità, si può ricavare l'espressione per $-\partial \underline{H}_t / \partial z$ in funzione di $\underline{E}_t$, con le solite sostituzioni ($\underline{E} \rightarrow \underline{H}$, $\underline{H} \rightarrow -\underline{E}$, $\varepsilon_c \leftrightarrow \mu$ e quindi k^2 resta lo stesso, $\underline{J} \rightarrow \underline{M}$, $\underline{M} \rightarrow -\underline{J}$). Risulta:

$$-\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c \left(\underline{I}_t + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \right) \cdot (\underline{z}_o \times \underline{E}_t) + \left(\frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t M_z + \underline{z}_o \times \underline{J}_t \right)$$

dove l'espressione nell'ultima parentesi si può chiamare anche $\underline{z}_o \times \underline{J}_{te}$, avendo introdotto una corrente elettrica impressa trasversa equivalente

$$\underline{J}_{te} = \underline{J}_t + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t M_z \times \underline{z}_o$$

Si ha infine per la componente H_z :

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left[\nabla_t \cdot (\underline{z}_o \times \underline{E}_t) - M_z \right]$$

4.4 Linee di trasmissione equivalenti

Partendo ora dalle equazioni di Marcuvitz-Schwinger per semplicità omogenee, si esprimano i campi trasversi nella forma (sviluppo in serie di modi, a ciascuno dei quali si associa una tensione ed una corrente equivalenti):

$$\begin{aligned}\underline{E}_t(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \underline{E}_{t_n}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(z) \underline{e}_n(x, y) \\ \underline{H}_t(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \underline{H}_{t_n}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(z) \underline{h}_n(x, y)\end{aligned}$$

Sostituendo nella prima equazione di Marcuvitz omogenea si ha:

$$-\sum_n \frac{dV_n}{dz} \underline{e}_n = j\omega\mu \sum_n I_n \left[\underline{h}_n \times \underline{z}_o + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{h}_n \times \underline{z}_o) \right]$$

e dualmente sostituendo nella seconda equazione omogenea di Marcuvitz si ha:

$$-\sum_n \frac{dI_n}{dz} \underline{h}_n = j\omega\varepsilon_c \sum_n V_n \left[\underline{z}_o \times \underline{e}_n + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{z}_o \times \underline{e}_n) \right]$$

Le funzioni $\underline{e}_n(x, y)$ e $\underline{h}_n(x, y)$ sono dette funzioni modali (vettoriali). Si considerano per esse valide le condizioni di ortonormalità generali

$$\int_S \underline{e}_m \times \underline{h}_n^* \cdot \underline{z}_o dS = \delta_{mn}$$

oppure coniugando

$$\int_S \underline{e}_m^* \times \underline{h}_n \cdot \underline{z}_o dS = \delta_{mn}$$

Si possono ricavare allora, sfruttando tali condizioni, le seguenti espressioni per le generiche ampiezze $V_n(z)$ e $I_m(z)$:

$$\begin{aligned}V_n(z) &= \int_S \underline{E}_t \times \underline{h}_n^* \cdot \underline{z}_o dS \\ I_m(z) &= \int_S \underline{e}_m^* \times \underline{H}_t \cdot \underline{z}_o dS\end{aligned}$$

Nel caso degli usuali modi TE e TM rispetto alla direzione z , le funzioni modali sono legate dalle relazioni (fra loro equivalenti):

$$\begin{aligned}\underline{e}_n &= \underline{h}_n \times \underline{z}_o \\ \underline{h}_n &= \underline{z}_o \times \underline{e}_n\end{aligned}$$

(cioè si comportano come una terna destra).

Inoltre nel caso TM le funzioni $\underline{e}_n$ si possono ricavare da un'opportuna funzione scalare $\phi_n(x, y)$ attraverso un'operazione di gradiente (trasverso): $\underline{e}_n^{\text{TM}} = -\nabla_t \phi_n^{\text{TM}}$; dualmente nel caso TE si ha: $\underline{h}_n^{\text{TE}} = -\nabla_t \phi_n^{\text{TE}}$. Le funzioni potenziale ϕ_n devono soddisfare, come è noto, l'equazione di Helmholtz sulla sezione trasversa S : $\nabla_t^2 \phi_n + k_{t_n}^2 \phi_n = 0$.

Le condizioni di ortogonalità generali, viste le relazioni tra le funzioni modali e le note proprietà del prodotto misto e del doppio prodotto vettoriale, si possono anche scrivere per modi TE e TM nella forma più familiare:

$$\begin{aligned} \int_S \underline{e}_m \cdot \underline{e}_n^* dS &= \delta_{mn} \\ \int_S \underline{h}_m \cdot \underline{h}_n^* dS &= \delta_{mn} \end{aligned}$$

Dalla prima equazione omogenea di Marcuvitz si può scrivere, sfruttando le relazioni fra le funzioni modali:

$$-\sum_n \frac{dV_n}{dz} \underline{e}_n = j\omega\mu \sum_n I_n \left(\underline{e}_n + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \cdot \underline{e}_n \right)$$

Moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\underline{e}_m^*$ ed integrando sulla sezione S si ha:

$$-\sum_n \frac{dV_n}{dz} \int_S \underline{e}_n \cdot \underline{e}_m^* dS = j\omega\mu \sum_n I_n \left[\int_S \underline{e}_n \cdot \underline{e}_m^* dS + \frac{1}{k^2} \int_S (\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{e}_n) \cdot \underline{e}_m^* dS \right]$$

Ma nel caso TM si ha

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{e}_n = -\nabla_t \nabla_t \cdot \nabla_t \phi_n = -\nabla_t \nabla_t^2 \phi_n = \nabla_t k_{t_n}^2 \phi_n = -k_{t_n}^2 \underline{e}_n$$

e sfruttando l'ortogonalità si ottiene:

$$-\frac{dV_m}{dz} = j\omega\mu I_m \left(1 - \frac{k_{t_m}^2}{k^2} \right)$$

Ripristinando l'indice n e ponendo $k_{z_n}^2 = k^2 - k_{t_n}^2$ si ricava:

$$\frac{dV_n}{dz} = -j\omega\mu \frac{k_{z_n}^2}{k^2} I_n = -j k_{z_n} Z_n I_n$$

ritrovando la prima equazione delle linee di trasmissione, avendo posto per l'impedenza caratteristica

$$Z_n^{\text{TM}} = \frac{k_{z_n}}{\omega \varepsilon_c}$$

Dualmente dalla seconda equazione di Marcuvitz si può ricavare l'altra equazione delle linee:

$$\frac{dI_n}{dz} = -j k_{z_n} Y_n V_n \quad \text{ove} \quad Y_n^{\text{TM}} = \frac{1}{Z_n^{\text{TM}}} = \frac{\omega \varepsilon_c}{k_{z_n}}$$

Tornando alla prima equazione omogenea di Marcuvitz, moltiplicandola scalarmente per $\underline{e}_m^*$ ed integrando su S si ottiene, sfruttando l'ortogonalità:

$$-\frac{dV_m}{dz} = j\omega\mu \sum_n I_n \int_S \left[\underline{h}_n \times \underline{z}_o + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{h}_n \times \underline{z}_o) \right] \cdot \underline{e}_m^* dS$$

Considerando ora il caso TE, sfruttando le relazioni tra le funzioni modali e la $\underline{h}_n = -\nabla_t \phi_n$, ed osservando che per un'identità vettoriale già richiamata nel paragrafo 4.3

$$\nabla_t \cdot (\nabla_t \phi_n \times \underline{z}_o) = \underline{z}_o \cdot \nabla_t \times \nabla_t \phi_n - \nabla_t \phi_n \cdot \nabla_t \times \underline{z}_o = 0$$

ricordando che $\underline{z}_o$ è un vettore costante. Tale risultato si poteva ottenere anche permutando il punto con la croce nel prodotto misto a primo membro. Si ottiene quindi:

$$-\frac{dV_m}{dz} = j\omega\mu \sum_n I_n \int_S \underline{e}_n \cdot \underline{e}_m^* dS = j\omega\mu I_m$$

Ripristinando l'indice n si può scrivere

$$\frac{dV_n}{dz} = -j\omega\mu I_n = -j k_{z_n} Z_n I_n$$

con l'espressione per l'impedenza caratteristica:

$$Z_n^{\text{TE}} = \frac{\omega \mu}{k_{z_n}}$$

Dualmente dalla seconda equazione di Marcuvitz si ottiene l'altra equazione delle linee:

$$\frac{dI_n}{dz} = -j k_{z_n} Y_n V_n \quad \text{ove} \quad Y_n^{\text{TE}} = \frac{1}{Z_n^{\text{TE}}} = \frac{k_{z_n}}{\omega \mu}$$

Infine, consideriamo la condizione appena vista

$$\nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{h}_n \times \underline{z}_o) = \nabla_t (\nabla_t \times \underline{h}_n \cdot \underline{z}_o) = 0$$

L'espressione precedente a secondo membro è del tipo:

$$\nabla (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{B} \times (\nabla \times \underline{A}) + (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{A} + (\underline{A} \cdot \nabla) \underline{B} + \underline{A} \times (\nabla \times \underline{B})$$

ove usando il formalismo diadico si possono omettere le parentesi nel secondo e nel terzo addendo a secondo membro. In questo caso solo il primo addendo a secondo membro sopravvive, essendo $\underline{B} \equiv \underline{z}_o$, vettore costante ed ortogonale a ∇_t . Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \underline{z}_o \times \left[\nabla_t \times (\nabla_t \times \underline{h}_n) \right] &= 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_t \times (\nabla_t \times \underline{h}_n) = 0 \quad \Rightarrow \\ \nabla_t \nabla_t \cdot \underline{h}_n - \nabla_t^2 \underline{h}_n &= 0 \end{aligned}$$

ove nel caso TE: $\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{h}_n = -k_{t_n}^2 \underline{h}_n$, come già visto. Dunque $\nabla_t^2 \underline{h}_n + k_{t_n}^2 \underline{h}_n = 0$.

In modo analogo nel caso TM, partendo dalla seconda equazione di Marcuvitz e dalla

$$\nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{z}_o \times \underline{e}_n) = -\nabla_t (\nabla_t \times \underline{e}_n \cdot \underline{z}_o) = 0$$

si trova che

$$\nabla_t^2 \underline{e}_n + k_{t_n}^2 \underline{e}_n = 0$$

Le funzioni modali (vettoriali) $\underline{e}_n$ e $\underline{h}_n$ dunque soddisfano anch'esse l'equazione di Helmholtz (vettoriale) bidimensionale.

Si riportano ora per completezza le espressioni per le impedenze caratteristiche nel caso dei modi LSM^(z) e LSE^(z), ipotizzando che le componenti mancanti siano quelle nella direzione y , e che quindi tali modi siano anche TM^(y) e TE^(y) rispettivamente. Si ha:

$$Z_n^{\text{LSM}} = \frac{k^2 - k_{y_n}^2}{k_{z_n} \omega \varepsilon_c} \qquad Z_n^{\text{LSE}} = \frac{k_{z_n} \omega \mu}{k^2 - k_{y_n}^2}$$

Nel caso particolare $k_{y_n} = 0$ si ottiene

$$Z_n^{\text{LSM}} = \frac{k^2}{k_{z_n} \omega \varepsilon_c} = \frac{\omega \mu}{k_{z_n}} \equiv Z_n^{\text{TE}} \qquad Z_n^{\text{LSE}} = \frac{k_{z_n} \omega \mu}{k^2} = \frac{k_{z_n}}{\omega \varepsilon_c} \equiv Z_n^{\text{TM}}$$

Dunque i modi LSM^(z) si riconducono ai TE^(z) ed i modi LSE^(z) si riconducono ai TM^(z). Nel caso particolare invece di indipendenza da x , per cui $k^2 - k_{y_n}^2 = k_{z_n}^2$ si ottiene l'inverso

$$Z_n^{\text{LSM}} = \frac{k_{z_n}}{\omega \varepsilon_c} \equiv Z_n^{\text{TM}} \qquad Z_n^{\text{LSE}} = \frac{\omega \mu}{k_{z_n}} \equiv Z_n^{\text{TE}}$$

Per quanto riguarda infine le relazioni di ortogonalità, sempre nell'ipotesi di mancanza delle componenti lungo y , si dimostra che si ha per i modi LSM ($h_{y_n} = 0$):

$$\int_S e_{y_m} e_{y_n}^* dS = \delta_{mn}$$

Questa relazione è simile a quella valida per i TM ed i TE, ma vale per le componenti lungo y invece che per le intere funzioni modali vettoriali. In maniera analoga si ottiene per i modi LSE ($e_{y_n} = 0$):

$$\int_S h_{y_m} h_{y_n}^* dS = \delta_{mn}$$

¹trattandosi di un vettore trasverso.

4.5 Tensore degli sforzi di Maxwell. Quantità di moto del campo elettromagnetico.

Si considerino campi elettromagnetici nel dominio del tempo ed in un mezzo omogeneo, isotropo, non dispersivo. Si prenda in esame la seguente diade:

$$\underline{\underline{M}}^e = \varepsilon \underline{E} \underline{E} - \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \underline{I} \quad \text{con} \quad E^2 = \underline{E} \cdot \underline{E}$$

ove

$$\underline{E} \underline{E} = \begin{pmatrix} E_x^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 \end{pmatrix}$$

Si noti che nel secondo addendo di $\underline{\underline{M}}^e$ compare la densità di energia elettrica $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$. La diade $\underline{E} \underline{E}$ è una diade simmetrica (e anche hermitiana, poiché nel dominio del tempo le componenti sono reali), quindi anche $\underline{\underline{M}}^e$ lo è. Se ne calcoli la divergenza:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{M}}^e = \varepsilon \nabla \cdot (\underline{E} \underline{E}) - \frac{1}{2} \varepsilon \nabla \cdot (E^2 \underline{I})$$

sfruttando le identità diadiche:

$$\nabla \cdot (\underline{A} \underline{B}) = (\nabla \cdot \underline{A}) \underline{B} + \underline{A} \cdot (\nabla \underline{B}) \implies \nabla \cdot (\underline{E} \underline{E}) = (\nabla \cdot \underline{E}) \underline{E} + \underline{E} \cdot (\nabla \underline{E})$$

$$\nabla \cdot (f \underline{\underline{D}}) = \nabla f \cdot \underline{\underline{D}} + f \nabla \cdot \underline{\underline{D}} \implies \nabla \cdot (E^2 \underline{I}) = \nabla (E^2) \cdot \underline{I} + E^2 \nabla \cdot \underline{I} = \nabla (E^2) \cdot \underline{I} = \nabla (\underline{E} \cdot \underline{E})$$

Del resto, come già visto:

$$\nabla (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \times (\nabla \times \underline{B}) + \underline{B} \times (\nabla \times \underline{A}) + (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{A} + (\underline{A} \cdot \nabla) \underline{B} \implies$$

[si ricordi in proposito che $(\underline{A} \cdot \nabla) \underline{B} = \underline{A} \cdot (\nabla \underline{B}) = \underline{A} \cdot \nabla \underline{B}$]

$$\implies \nabla (\underline{E} \cdot \underline{E}) = 2 \underline{E} \times (\nabla \times \underline{E}) + 2 (\underline{E} \cdot \nabla) \underline{E}$$

e risulta infine

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\underline{M}}^e &= \varepsilon (\nabla \cdot \underline{E}) \underline{E} + \varepsilon \underline{E} \cdot (\nabla \underline{E}) - \varepsilon \underline{E} \times (\nabla \times \underline{E}) - \varepsilon (\underline{E} \cdot \nabla) \underline{E} = \\ &= \varepsilon (\nabla \cdot \underline{E}) \underline{E} - \varepsilon \underline{E} \times (\nabla \times \underline{E}) \end{aligned}$$

A questo punto si inseriscono le equazioni di Maxwell (nel dominio del tempo, senza correnti e cariche magnetiche), e si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{D} &= \varrho_{(lib)} \implies \varepsilon \nabla \cdot \underline{E} = \varrho \\ \nabla \times \underline{E} &= -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \\ \implies \nabla \cdot \underline{\underline{M}}^e &= \varrho \underline{E} - \varepsilon \underline{E} \times \left(-\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \right) = \varrho \underline{E} + \varepsilon \mu \underline{E} \times \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = \varrho \underline{E} + \frac{1}{v^2} \underline{E} \times \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

essendo v la velocità della luce nel mezzo.

In modo analogo si può considerare la diade (duale)

$$\underline{\underline{M}}^h = \mu \underline{H} \underline{H} - \frac{1}{2} \mu H^2 \underline{I}$$

simmetrica anch'essa. Nel secondo addendo di $\underline{\underline{M}}^h$ compare la densità di energia magnetica $w_h = \frac{1}{2} \mu H^2$. Con le trasformazioni di dualità $\varepsilon \rightarrow \mu$, $\underline{E} \rightarrow \underline{H}$, si ottiene:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{M}}^h = \mu (\nabla \cdot \underline{H}) \underline{H} - \mu \underline{H} \times (\nabla \times \underline{H})$$

Si ha inoltre, introducendo le altre equazioni di Maxwell nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{B} = 0 & \implies \nabla \cdot \underline{H} = 0 \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \\ \implies \nabla \cdot \underline{\underline{M}}^h = -\mu \underline{H} \times \underline{J} - \mu \varepsilon \underline{H} \times \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -\underline{B} \times \underline{J} - \frac{1}{v^2} \underline{H} \times \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

La diade

$$\underline{\underline{M}} = -(\underline{\underline{M}}^e + \underline{\underline{M}}^h)$$

che come si è visto è simmetrica, è chiamata tensore degli sforzi di Maxwell, ed ha l'espressione:

$$\underline{\underline{M}} = w \underline{I} - \varepsilon \underline{E} \underline{E} - \mu \underline{H} \underline{H}$$

essendo $w = w_e + w_h$ la densità totale di energia elettromagnetica. Per la divergenza del tensore si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\underline{M}} &= -\varrho \underline{E} - \frac{1}{v^2} \underline{E} \times \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} + \underline{B} \times \underline{J} + \frac{1}{v^2} \underline{H} \times \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \\ &= -\varrho \underline{E} - \underline{J} \times \underline{B} - \frac{1}{v^2} \left(\underline{E} \times \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \times \underline{H} \right) = \\ &= -\varrho \underline{E} - \underline{J} \times \underline{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \underline{P}}{\partial t} \end{aligned}$$

con $\underline{P} = \underline{E} \times \underline{H}$ vettore di Poynting. Risulta quindi:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{M}} + \varrho \underline{E} + \underline{J} \times \underline{B} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \underline{P}}{\partial t} = 0$$

A questo punto si può integrare su un volume V limitato da una superficie chiusa S , ed applicare il teorema della divergenza delle diadi, per cui si ha:

$$\int_V \nabla \cdot \underline{\underline{M}} dV = \oint_S \underline{n} \cdot \underline{\underline{M}} dS = \oint_S \underline{\underline{M}} \cdot \underline{n} dS$$

ove $\underline{n} \cdot \underline{M} = \underline{n} \cdot \underline{M}^T = \underline{M} \cdot \underline{n}$, essendo la diade simmetrica, ottenendo infine

$$\oint_S \underline{M} \cdot \underline{n} dS + \int_V \left(\varrho \underline{E} + \underline{J} \times \underline{B} \right) dV + \frac{d}{dt} \int_V \frac{\underline{P}}{v^2} dV = 0$$

con

$$\underline{M} \cdot \underline{n} = w \underline{I} \cdot \underline{n} - \varepsilon \underline{E} \underline{E} \cdot \underline{n} - \mu \underline{H} \underline{H} \cdot \underline{n} = w \underline{n} - \varepsilon \underline{E} (\underline{E} \cdot \underline{n}) - \mu \underline{H} (\underline{H} \cdot \underline{n})$$

Si può pensare di interpretare la relazione integrale ottenuta come relazione di bilancio, come si fa con il teorema di Poynting: si tratta in realtà di un'uguaglianza tra forze. Il secondo integrando infatti è la densità di forza di Lorentz, che era definita come:

$$\underline{F} = q \underline{E} + q \underline{v} \times \underline{B}$$

ove, se q è la carica per unità di volume ϱ , si ha $q \underline{v} \equiv \varrho \underline{v} = \underline{J}$ e l'integrale dà dunque la forza di Lorentz agente sulle cariche e le correnti esistenti nel volume V .

La quantità vettoriale $\underline{M} \cdot \underline{n}$ si può interpretare come lo sforzo unitario (forza per unità di superficie) che si trasmette attraverso l'unità di superficie di normale $\underline{n}$, per cui l'integrale è la forza trasmessa attraverso la superficie S . Se questa superficie è ad esempio metallizzata (quindi perfettamente riflettente) o perfettamente assorbente (assenza di riflessioni), tale sforzo unitario si manifesta come una pressione, detta pressione di radiazione. Nel caso di uno schermo perfettamente riflettente, esso subisce una pressione doppia rispetto a quello perfettamente assorbente, perché c'è anche la pressione di rinculo (si sommano gli effetti dell'onda incidente e dell'onda riflessa).

Il termine rimasto rappresenta anch'esso una forza, espressa come derivata temporale della grandezza

$$\int_V \frac{\underline{P}}{v^2} dV$$

e allora $\underline{P}/v^2$ si può vedere come densità di quantità di moto (o di momento meccanico) associata al campo elettromagnetico. E l'integrale è il momento associato al campo elettromagnetico presente nel volume V . Momento e pressione di radiazione sono però sempre molto modesti per le normali intensità del campo.

In aggiunta ad una forza, il campo elettromagnetico trasmette in genere anche una coppia. Preso un centro O di riferimento, e detto $\underline{r}$ il raggio vettore misurato da questo punto, moltiplicando vettorialmente a sinistra per $\underline{r}$ la relazione integrale precedente, si trova che al campo elettromagnetico è associata una densità di momento angolare (momento della quantità di moto), rispetto a O , data da:

$$\underline{m} = \underline{r} \times \frac{\underline{P}}{v^2}$$

ed inoltre attraverso la superficie S è trasmessa una coppia, la cui densità superficiale è data da:

$$\underline{r} \times \left(\underline{M} \cdot \underline{n} \right) = w \underline{r} \times \underline{n} - \varepsilon \underline{r} \times \underline{E} (\underline{E} \cdot \underline{n}) - \mu \underline{r} \times \underline{H} (\underline{H} \cdot \underline{n})$$

Si noti dalla formula precedente che se si ha un'onda piana uniforme ideale (cioè con un fronte d'onda illimitato), sia essa polarizzata linearmente, circolarmente o in generale ellitticamente, il momento di rotazione (momento angolare) che fluisce attraverso una superficie normale alla direzione di propagazione $\underline{k}$ dell'onda stessa (cioè $\underline{n} \parallel \underline{k}$, ossia $\underline{n} \equiv \underline{k}_o$) è tutto normale a $\underline{k}$. Si ha infatti $\underline{E} \cdot \underline{k}_o = 0$ e $\underline{H} \cdot \underline{k}_o = 0$, e quindi $\underline{r} \times (\underline{M} \cdot \underline{n}) = w \underline{r} \times \underline{k}_o$, ortogonale a $\underline{k}_o$. Inoltre l'integrale di quest'espressione, esteso a tutto un fronte d'onda (o anche solo ad una parte, purché sia simmetrica rispetto al punto O , o più precisamente rispetto al punto O' , piede della perpendicolare mandata da O al fronte d'onda) è nullo: infatti in due punti simmetrici rispetto ad O' , w ha lo stesso valore perché l'onda è piana, mentre $\underline{r} \times \underline{k}_o$ ha lo stesso modulo e la stessa direzione, ma verso opposto. Questo risultato (assenza di momento angolare) non è verificabile sperimentalmente, poiché le onde piane illimitate non sono fisicamente realizzabili. D'altra parte, se anche si potesse avere a disposizione un'onda piana illimitata, la diffrazione provocata dalle dimensioni necessariamente finite del dispositivo sperimentale altererebbe comunque la forma d'onda.

Invece per le onde reali, che di solito non sono esattamente TEM, non valgono contemporaneamente le $\underline{E} \cdot \underline{k}_o = 0$ e $\underline{H} \cdot \underline{k}_o = 0$: quindi in generale le onde reali, per ogni polarizzazione, hanno e trasportano un momento di rotazione. In particolari condizioni di simmetria del volume o della superficie di integrazione rispetto al punto O , il valor medio nel tempo di tale momento può essere nullo, se l'onda è polarizzata linearmente.

Si noti inoltre che l'integrale superficiale di $\underline{r} \times (\underline{M} \cdot \underline{n})$ si può esprimere come il flusso del tensore

$$\underline{\Phi} = w \underline{\underline{R}} \cdot \underline{r} - \varepsilon (\underline{r} \times \underline{E}) \underline{E} - \mu (\underline{r} \times \underline{H}) \underline{H}$$

con $\underline{\underline{R}}$ tensore di Ricci, essendo, come già visto per le proprietà di quest'ultimo:

$$(\underline{\underline{R}} \cdot \underline{r}) \cdot \underline{n} = \underline{r} \times \underline{n}$$

e risultando quindi $\underline{r} \times (\underline{M} \cdot \underline{n}) = \underline{\Phi} \cdot \underline{n}$.

D'altra parte, che un'onda elettromagnetica polarizzata circolarmente trasporti un momento di rotazione è certo, perché dimostrato sperimentalmente. Infatti onde luminose piane, polarizzate circolarmente, che incidano sulla superficie di una lamina birifrangente (lamina in quarto d'onda, che converte la luce polarizzata circolarmente in luce polarizzata linearmente, eliminando la cosiddetta polarizzazione incrociata) e la attraversino, esercitano sulla lamina stessa una coppia meccanica (Poynting, 1909). La coppia ha modulo $M = P/\omega$: mentre a frequenze ottiche essa è molto piccola (Beth, 1936), a microonde è più grande ed osservabile sperimentalmente senza eccessiva difficoltà (Carrara, 1949). Il convertitore di polarizzazione a microonde si può realizzare con un allineamento di fili paralleli perfettamente conduttori, che risultano avere proprietà polarizzanti, come si vedrà nel capitolo 6. L'espressione della coppia si può ricavare anche attraverso considerazioni quantistiche, assegnando al fotone un momento angolare (di spin) $h/2\pi = \hbar$, con h costante di Plank. Nel caso particolare di uno schermo perfettamente conduttore investito dalla radiazione, esso non subisce alcuna coppia, perché si compensano onda incidente e onda riflessa.

Nel dominio della frequenza le due parti del tensore degli sforzi di Maxwell diventano:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}^e &= \varepsilon \underline{E} \underline{E}^* - \frac{1}{2} \varepsilon (\underline{E} \cdot \underline{E}^*) \underline{I} \\ \underline{\underline{M}}^h &= \mu \underline{H} \underline{H}^* - \frac{1}{2} \mu (\underline{H} \cdot \underline{H}^*) \underline{I}\end{aligned}$$

Quindi in questo caso si tratta di tensori hermitiani (perché il primo addendo dei secondi membri è hermitiano, il secondo reale simmetrico e quindi hermitiano).

4.6 Calcolo del gradiente del gradiente della funzione di Green scalare per l'equazione di Helmholtz e per lo spazio libero

La funzione di Green scalare per l'equazione di Helmholtz e per lo spazio libero

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

si può vedere come funzione della variabile scalare R :

$$R = |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Quindi, ricordando (Campi I) che per il gradiente di una funzione composta si ha

$$\nabla f[\xi(x, y, z)] = \frac{df}{d\xi} \nabla \xi$$

segue

$$\nabla G = \frac{dG}{dR} \nabla R$$

ove

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dR} &= \frac{-jk e^{-jkR} 4\pi R - e^{-jkR} 4\pi}{16\pi^2 R^2} = -jk G - \frac{G}{R} = -\left(jk + \frac{1}{R}\right) G \\ \Rightarrow \nabla G &= -\left(jk + \frac{1}{R}\right) G \nabla R\end{aligned}$$

Per il calcolo di ∇R si può notare che si ha

$$\nabla R = \underline{x}_o \frac{\partial R}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial R}{\partial y} + \underline{z}_o \frac{\partial R}{\partial z} = \underline{x}_o \frac{2(x - x')}{2R} + \underline{y}_o \frac{y - y'}{R} + \underline{z}_o \frac{z - z'}{R} = \frac{\underline{R}}{R} = \underline{u}$$

avendo posto

$$\underline{R} = \underline{r} - \underline{r}' = (x - x') \underline{x}_o + (y - y') \underline{y}_o + (z - z') \underline{z}_o$$

e indicando con $\underline{u}$ il versore di $\underline{R}$. Si ha in conclusione:

$$\nabla G = - \left(jk + \frac{1}{R} \right) G \underline{u}$$

Per determinare il gradiente del gradiente si applica l'identità diadica $\nabla(f \underline{A}) = (\nabla f) \underline{A} + f \nabla \underline{A}$, per cui

$$\nabla \nabla G = - \left\{ \nabla \left[\left(jk + \frac{1}{R} \right) G \right] \right\} \underline{u} - \left(jk + \frac{1}{R} \right) G \nabla \underline{u}$$

Per quanto riguarda il calcolo del gradiente di $\underline{u}$ si ha, applicando la medesima identità e di nuovo la formula del gradiente di una funzione composta:

$$\begin{aligned} \nabla \underline{u} &= \nabla \left(\frac{1}{R} \underline{R} \right) = \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \underline{R} + \frac{1}{R} \nabla \underline{R} = -\frac{1}{R^2} (\nabla R) \underline{R} + \frac{1}{R} \nabla \underline{R} = \\ &= -\frac{1}{R} \underline{u} \underline{u} + \frac{1}{R} \nabla \underline{R} \end{aligned}$$

ove

$$\nabla \underline{R} = \nabla(\underline{r} - \underline{r}') = \nabla \underline{r}$$

con

$$\nabla \underline{r} = \underline{x}_o \frac{\partial \underline{r}}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} + \underline{z}_o \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \underline{x}_o \underline{x}_o + \underline{y}_o \underline{y}_o + \underline{z}_o \underline{z}_o = \underline{I}$$

(esempio notevole di gradiente di un vettore) e infine

$$\nabla \underline{u} = \frac{1}{R} \left(\underline{I} - \underline{u} \underline{u} \right)$$

(da un punto di vista algebrico, si tratta del proiettore nello spazio ortogonale).

D'altra parte $\nabla(f g) = (\nabla f) g + f \nabla g$ e quindi:

$$\nabla \left[\left(jk + \frac{1}{R} \right) G \right] = \left[\nabla \left(jk + \frac{1}{R} \right) \right] G + \left(jk + \frac{1}{R} \right) \nabla G = -\frac{1}{R^2} G \underline{u} - \left(jk + \frac{1}{R} \right)^2 G \underline{u}$$

Per cui globalmente si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla G &= - \left[-\frac{1}{R^2} G \underline{u} - \left(jk + \frac{1}{R} \right)^2 G \underline{u} \right] \underline{u} - \left(jk + \frac{1}{R} \right) G \frac{1}{R} \left(\underline{I} - \underline{u} \underline{u} \right) = \\ &= \frac{1}{R^2} G \underline{u} \underline{u} + \left(jk + \frac{1}{R} \right)^2 G \underline{u} \underline{u} - \left(\frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} \right) G \underline{I} + \left(\frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} \right) G \underline{u} \underline{u} = \\ &= \frac{1}{R^2} G \underline{u} \underline{u} - k^2 G \underline{u} \underline{u} + \frac{1}{R^2} G \underline{u} \underline{u} + \frac{2jk}{R} G \underline{u} \underline{u} + \\ &\quad - \left(\frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} \right) G \underline{I} + \frac{jk}{R} G \underline{u} \underline{u} + \frac{1}{R^2} G \underline{u} \underline{u} = \\ &= \left(-k^2 + \frac{3jk}{R} + \frac{3}{R^2} \right) G \underline{u} \underline{u} - \left(\frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} \right) G \underline{I} \end{aligned}$$

ovvero

$$\nabla \nabla G = \left[A(R) \underline{u} \underline{u} - B(R) \underline{I} \right] G$$

ove

$$A(R) = -k^2 + \frac{3jk}{R} + \frac{3}{R^2} \qquad B(R) = \frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2}$$

Capitolo 5

Antenne ad apertura

5.1 Espressione dei campi irradiati da un'apertura come spettri di onde piane

L'analisi di antenne ad apertura (le antenne ad onda leaky ne sono un caso particolare in cui l'apertura è laterale), montate su piani di massa supposti infiniti, coperti con mezzi dielettrici (*radomes*) privi di perdite o con perdite, diventa troppo complicata se è tentata nel dominio spaziale, mentre risulta considerevolmente più semplice nel dominio spettrale.

Consideriamo come esempio un'apertura rettangolare di dimensioni a, b (si pensi alla bocca d'uscita di una guida d'onda rettangolare) montata su un piano di massa infinito (Fig. 5.1).

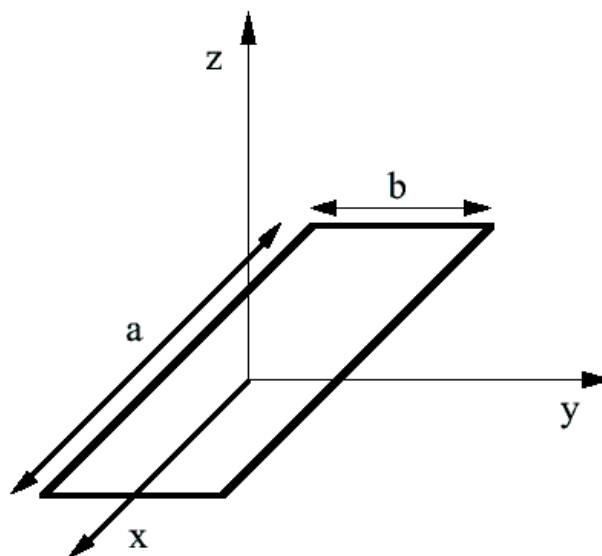


Figura 5.1: apertura rettangolare su un piano di massa infinito.

Nella regione (supposta priva di sorgenti e di perdite) $z > 0$ il campo $\underline{E}(x, y, z)$ di un'onda monocromatica irradiata dall'apertura si può scrivere come sovrapposizione di onde piane nella forma

$$\begin{aligned}\underline{E}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y\end{aligned}$$

essendo $k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2}$, per cui l'integrale comprende sia onde omogenee (uniformi) che evanescenti (non uniformi con vettore di fase ortogonale al vettore di attenuazione): però ovviamente soltanto le prime contribuiranno al campo lontano (grandi valori di z rispetto alla lunghezza d'onda), che spesso è quanto interessa nelle applicazioni.

La precedente formula sul piano $z = 0$ dell'apertura diventa:

$$\underline{E}(x, y, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Si tratta evidentemente di una doppia antitrasformata di Fourier, per cui:

$$\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(x, y, 0) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

In conclusione, il campo irradiato dall'apertura è noto (ammesso di essere in grado di risolvere l'integrale) conoscendo $\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y)$, che è la trasformata di Fourier del campo $\underline{E}(x, y, 0)$ sul piano dell'apertura.

D'altra parte, in una regione priva di sorgenti il campo elettrico deve risultare solenoidale, ossia¹

$$\nabla \cdot \underline{E} \equiv 0$$

da cui

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y \right] = 0$$

Scambiando gli operatori divergenza e integrale spettrale, e ricordando che

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \underline{A}) &= \varphi \nabla \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \nabla \varphi \quad \implies \\ \nabla \cdot \left[\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] &= e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) + \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) \cdot \nabla (e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \\ &= -j\mathbf{k} \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}\end{aligned}$$

¹si aveva prendendo la divergenza della seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \cdot \underline{E} = -\frac{\nabla \cdot \underline{J}_i}{j\omega \varepsilon}$$

visto che $\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y)$ non dipende da x, y, z e quindi la sua divergenza è nulla. Deve allora essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{k} \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} dk_x dk_y = 0$$

per ogni scelta di x, y, z , che compaiono solo nell'esponentiale. Questo è possibile se e solo se è nullo il fattore che moltiplica il termine dipendente da x, y, z , ossia se:

$$\begin{aligned} \underline{k} \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) = 0 \quad \implies \quad k_x \tilde{E}_x(k_x, k_y) + k_y \tilde{E}_y(k_x, k_y) + k_z \tilde{E}_z(k_x, k_y) = 0 \quad \implies \\ \tilde{E}_z = -\frac{k_x \tilde{E}_x + k_y \tilde{E}_y}{k_z} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Per cui la componente $\tilde{E}_z$ è ricavabile note le altre due. Allora le componenti tangenziali, trasformate di componenti che peraltro esistono solo sull'apertura e non sul circostante piano di massa, sono sufficienti a determinare il campo irradiato. Questa interdipendenza impedisce di affermare che se il campo sull'apertura non ha componenti lungo z , non le ha neppure il campo irradiato. Questa affermazione è valida per le componenti $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y$ (che sono state scelte come componenti indipendenti), ma non per $\tilde{E}_z$, in quanto come si vede dalla (5.1) $\tilde{E}_x$ ed $\tilde{E}_y$ contribuiscono anche ad $\tilde{E}_z$.

Per quanto riguarda il campo magnetico, si ha dalla prima equazione di Maxwell omogenea:

$$\underline{H}(x, y, z) = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \underline{E}(x, y, z)$$

Portando il rotore dentro l'integrale del campo elettrico, utilizzando l'identità vettoriale:

$$\nabla \times (\varphi \underline{A}) = \varphi \nabla \times \underline{A} + \nabla \varphi \times \underline{A}$$

ed essendo $\nabla \times \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) \equiv 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{H}(x, y, z) &= -\frac{1}{j\omega\mu(2\pi)^2} (-j) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{k} \times \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} dk_x dk_y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 k \zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{k} \times \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} dk_x dk_y \quad \implies \\ \tilde{\underline{H}}(k_x, k_y) &= \frac{1}{\zeta} \underline{k}_o \times \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) \end{aligned}$$

essendo $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ l'impedenza intrinseca del mezzo, per cui $\omega\mu = k\zeta$, e $\underline{k}_o$ il versore di $\underline{k}$. Si osservi che un tale versore formale risulta reale soltanto per lo spettro omogeneo, mentre per lo spettro evanescente risulta complesso.

La valutazione dei precedenti integrali è in genere piuttosto difficile, anche per i problemi più semplici. Se però ci interessa solo il campo lontano, possiamo utilizzare delle tecniche asintotiche applicate alla sola parte dell'integrale che rappresenta il contributo delle onde omogenee, il solo significativo a grande distanza. Per campo lontano intendiamo genericamente grandi valori di kr , essendo r il raggio in coordinate sferiche. Come metodo di valutazione asintotica useremo il metodo della fase stazionaria.

5.2 Tecniche asintotiche per la valutazione di integrali

Illustreremo alcune di queste tecniche riferendoci inizialmente per semplicità al caso unidimensionale. Vogliamo stimare integrali del tipo:

$$I(k) = \int_a^b F(x) e^{jkf(x)} dx \quad k \in \mathbb{R}$$

[$F(x)$ e $f(x)$ ovviamente non dipendono da k] al tendere all'infinito di k (valutazione asintotica), essendo $f(x)$ una funzione reale e non singolare della variabile reale x (tale variabile di integrazione è nella nostra applicazione un numero d'onda), mentre $F(x)$ è in generale complessa, e non singolare nell'intervallo di integrazione.

Una prima tecnica asintotica si basa su una semplice integrazione per parti. Si proceda nel seguente modo:

$$I(k) = \int_a^b \frac{F(x)}{jkf'(x)} [jkf'(x) e^{jkf(x)}] dx$$

[la quantità in parentesi quadra è la derivata di $e^{jkf(x)}$]

$$= \left[\frac{F(x)}{jkf'(x)} e^{jkf(x)} \right]_a^b - \frac{1}{jk} \int_a^b \left[\frac{F(x)}{f'(x)} \right]' e^{jkf(x)} dx$$

Il primo addendo è, per $k \rightarrow \infty$, un infinitesimo dell'ordine di $1/k$, mentre il secondo, dopo un'ulteriore integrazione per parti ove si ponga $\left[\frac{F(x)}{f'(x)} \right]' = F_1(x)$, dovrebbe essere dell'ordine di $1/k^2$ e quindi trascurabile rispetto al primo. Pertanto per grandi valori di k la stima asintotica è:

$$I(k) \cong \left[\frac{F(x) e^{jkf(x)}}{jkf'(x)} \right]_a^b \quad \text{e si ha} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I(k) = 0$$

Questa procedura, tuttavia, è legittima a patto che $f'(x)$ non si annulli all'interno dell'intervallo di integrazione, altrimenti si hanno degli infiniti nel secondo addendo. Purtroppo questa eventualità si verifica nelle nostre applicazioni ed è dunque necessario ricorrere ad un'altra tecnica.

5.2.1 Il metodo della fase stazionaria

Tale metodo, dovuto a Kelvin, rimedia alla difficoltà appena vista. Si consideri il caso semplice in cui $f'(x)$ abbia uno zero singolo x_s . Preso un numero piccolo a piacere ε , per $x \in [a, x_s - \varepsilon]$ la formula precedente dell'integrazione per parti è valida, e così pure per $x \in [x_s + \varepsilon, b]$. In base a considerazioni intuitive sull'andamento della funzione integranda, si può supporre che per $k \rightarrow \infty$ prevarrà l'integrale nell'intorno di x_s .

Visto che ε è piccolo, per $x \in [x_s - \varepsilon, x_s + \varepsilon]$ si può assumere $F(x) \cong F(x_s)$, mentre nell'esponenziale immaginario, dove occorre, come è noto, un'approssimazione più accurata, si può espandere $f(x)$ in serie di potenze di punto centrale x_s , fermandoci al secondo ordine, essendo $f'(x_s) = 0$. Inoltre si può pensare di estendere l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$, supponendo che anche per gli intervalli $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ valga la formula precedente, e i relativi contributi siano trascurabili per $k \rightarrow \infty$. Si ha allora:

$$I(k) \cong F(x_s) e^{jkf(x_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk \frac{f''(x_s)}{2} (x-x_s)^2} dx =$$

[si ponga $\xi = x - x_s \Rightarrow dx = d\xi$]

$$\begin{aligned} &= F(x_s) e^{jkf(x_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk \frac{f''(x_s)}{2} \xi^2} d\xi = \\ &= F(x_s) e^{jkf(x_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm jk \frac{|f''(x_s)|}{2} \xi^2} d\xi \end{aligned}$$

secondo il segno della derivata seconda. Un tale integrale si sa risolvere in forma chiusa.

Si consideri infatti l'integrale complesso di Fresnel (legato al noto integrale di Gauss):

$$\int_0^{+\infty} e^{\pm j \frac{\pi}{2} \tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm j\pi/4} = \frac{1}{2} (1 \pm j) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \frac{\pi}{2} \tau^2} d\tau = \sqrt{2} e^{\pm j\pi/4} = (1 \pm j)$$

Si ponga ora

$$k \frac{|f''(x_s)|}{2} \xi^2 = \frac{\pi}{2} \tau^2 \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt{\frac{\pi}{k |f''(x_s)|}} \tau \quad d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{k |f''(x_s)|}} d\tau$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk \frac{f''(x_s)}{2} \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{k |f''(x_s)|}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \frac{\pi}{2} \tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{k |f''(x_s)|}} e^{\pm j\pi/4}$$

e infine

$$I(k) \cong F(x_s) e^{jkf(x_s)} \sqrt{\frac{2\pi}{k |f''(x_s)|}} e^{\pm j\pi/4}$$

Si verifica dunque che il contributo dell'integrale intorno a x_s domina sugli altri per $k \rightarrow \infty$, perché va come $1/\sqrt{k}$. Nel caso in cui risulti $f''(x_s) = 0$, è necessario prendere in considerazione termini successivi dello sviluppo in serie di potenze. Le cose vanno riviste anche quando $F(x)$ possiede una singolarità vicino x_s , per cui $F(x_s)$ può non essere una ragionevole approssimazione di $F(x)$ nel piccolo intervallo.

5.2.2 Estensione del metodo della fase stazionaria al caso bidimensionale

In molti problemi (come nella nostra applicazione alle antenne ad apertura) si incontra il seguente integrale in due variabili, che non si sa risolvere esattamente:

$$I(k) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) e^{jkf(x, y)} dx dy$$

con k reale, $f(x, y)$ funzione reale e non singolare delle variabili reali x, y , che nella successiva applicazione del metodo rappresenteranno i numeri d'onda k_x, k_y , mentre $F(x, y)$ può essere in generale complessa ed è non singolare.

Spesso tale integrale dev'essere valutato per grandi valori di k . Si definiscano i punti stazionari (x_s, y_s) forniti dalle

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f_x(x_s, y_s) = 0 \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f_y(x_s, y_s) = 0$$

Intorno a questi punti la funzione esponenziale varierà lentamente, mentre altrove varierà più rapidamente e la parte reale e la parte immaginaria oscilleranno molto rapidamente, se k è grande, fra i valori $+1$ e -1 . Assumendo che $F(x, y)$ sia ovunque una funzione lentamente variabile, i contributi all'integrale al di fuori dei punti stazionari tendono dunque a cancellarsi l'un l'altro. Così gli unici contributi significativi, approssimativamente, provengono dagli intorni dei punti stazionari.

Sicché si potrà scrivere per l'integrale (supponendo per semplicità che vi sia un solo punto stazionario, ma le considerazioni seguenti si applicano anche in presenza di più punti stazionari sufficientemente distanti, valendo la sovrapposizione degli effetti):

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jkf(x, y)} dx dy$$

dove per convenienza i limiti sono stati estesi all'infinito, tanto comunque il contributo all'integrale al di fuori dell'intorno del punto stazionario è trascurabile. Peraltro nel predetto intorno la funzione $f(x, y)$ può essere approssimata da una serie di Taylor troncata al secondo ordine:

$$f(x, y) \cong f(x_s, y_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_s, y_s) (x - x_s)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(x_s, y_s) (y - y_s)^2 + f_{xy}(x_s, y_s) (x - x_s)(y - y_s)$$

essendo $f_x(x_s, y_s) = f_y(x_s, y_s) = 0$ e $f_{xy} = f_{yx}$ (supponendo valido il teorema di Schwarz).

Per brevità si può porre:

$$f(x, y) \cong f(x_s, y_s) + A \xi^2 + B \eta^2 + C \xi \eta$$

con

$$\xi = x - x_s, \quad \eta = y - y_s, \quad d\xi = dx, \quad d\eta = dy$$

(cioè in pratica si prende un sistema di riferimento centrato nel punto stazionario) e

$$A = \frac{1}{2} f_{xx}(x_s, y_s) \quad B = \frac{1}{2} f_{yy}(x_s, y_s) \quad C = f_{xy}(x_s, y_s)$$

($A, B, C \in \mathbb{R}$, essendo $f \in \mathbb{R}$). Si ha infine:

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) e^{jkf(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk(A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta)} d\xi d\eta$$

ove l'ultimo integrale si sa risolvere in forma chiusa, utilizzando i risultati per il caso unidimensionale, dopo un'opportuna trasformazione.

Si può scrivere infatti il fattore quadratico (forma quadratica) all'esponente in forma diagonale (attraverso una rotazione delle coordinate ξ, η in ξ', η'), come

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta = A'\xi'^2 + B'\eta'^2$$

mediante le relazioni (procedura di diagonalizzazione della matrice che rappresenta la forma quadratica):

$$A' = \frac{1}{2} \left[(A + B) + \sqrt{(A + B)^2 - (4AB - C^2)} \right]$$

$$B' = \frac{1}{2} \left[(A + B) - \sqrt{(A + B)^2 - (4AB - C^2)} \right]$$

Esaminando le formule di passaggio da A, B, C ad A', B' si osserva che:

1. $A', B' \in \mathbb{R}$, essendo $A, B, C \in \mathbb{R}$. Infatti ciò si verifica se:

$$(A + B)^2 \geq 4AB - C^2 \implies A^2 + B^2 - 2AB \geq -C^2 \implies (A - B)^2 \geq -C^2 \quad (5.2)$$

relazione sicuramente verificata, al più valida come uguaglianza solo se $A = B$ e $C = 0$ (ma allora la matrice era già diagonale). Del resto, essendo gli autovalori di una matrice reale e simmetrica, caso particolare di una matrice hermitiana, A' e B' dovevano essere reali.

- 2.

$$A' + B' = A + B \quad (5.3)$$

- 3.

$$A' B' = \frac{4AB - C^2}{4} \quad (5.4)$$

La matrice della rotazione di un angolo ϑ è, come noto:

$$\left[R(\vartheta) \right] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

e si può vedere che l'angolo di rotazione ϑ è dato da:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{C}{A - B} \right)$$

valendo inoltre le:

$$\begin{aligned} A' &= A \frac{\cos^2 \vartheta}{\cos(2\vartheta)} - B \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos(2\vartheta)} \\ B' &= -A \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos(2\vartheta)} + B \frac{\cos^2 \vartheta}{\cos(2\vartheta)} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'integrale si ha (l'elemento d'area nel nuovo sistema è $d\xi' d\eta'$, essendo unitario il determinante Jacobiano della rotazione):

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) e^{jkf(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk(A' \xi'^2 + B' \eta'^2)} d\xi' d\eta'$$

È possibile ora finalmente spezzare l'integrale in due e ricondursi al caso monodimensionale.

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) e^{jkf(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm jk|A'|\xi'^2} d\xi' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm jk|B'|\eta'^2} d\eta'$$

dove i segni di A' e B' dipendono da A e B , per le formule viste prima. Sfruttando i risultati precedentemente visti, l'integrale diventa:

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) e^{jkf(x_s, y_s)} \frac{\pi}{k \sqrt{|A'| |B'|}} e^{\pm j\pi/4} e^{\pm j\pi/4}$$

Se A' e B' sono entrambi positivi, il prodotto dei due ultimi esponenziali è uguale a j , se sono entrambi negativi è uguale a $-j$, se hanno segni diversi il prodotto è 1. Si può porre allora, utilizzando anche la (5.4):

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) e^{jkf(x_s, y_s)} \frac{j 2\pi \delta}{k \sqrt{|4AB - C^2|}}$$

con:

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{se } A', B' > 0 \\ -1 & \text{se } A', B' < 0 \\ -j & \text{se } A' \text{ e } B' \text{ hanno segni diversi, ossia } A'B' < 0 \end{cases}$$

Si osservi ora che:

- se $4AB > C^2$, allora A e B hanno evidentemente lo stesso segno (essendo necessariamente AB positivo), come pure A' e B' (come risulta dalla (5.4)). In particolare se $A > 0 \Rightarrow B > 0$ e dalla (5.3) risulta $A', B' > 0$ e $\delta = +1$. Invece se $A < 0 \Rightarrow B < 0$ e dalla (5.3) segue $A', B' < 0$ e $\delta = -1$;

- se $4AB < C^2$, allora dalla (5.4) $A'B' < 0$ e $\delta = -j$.

Ricapitolando, si ha allora la formula di integrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk(A\xi^2+B\eta^2+C\xi\eta)} d\xi d\eta = \frac{j2\pi\delta}{k\sqrt{|4AB-C^2|}}$$

con

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{se } 4AB > C^2 \text{ e } A > 0 \\ -1 & \text{se } 4AB > C^2 \text{ e } A < 0 \\ -j & \text{se } 4AB < C^2 \end{cases}$$

5.2.3 Metodo della *steepest descent*

Il metodo della discesa più ripida (*steepest descent*), detto anche del punto di sella (*saddle-point*), o del gradiente, fu introdotto da Debye per ottenere le espansioni asintotiche delle funzioni di Hankel. Si usa per valutare per grandi valori del parametro reale positivo k , in modo approssimato, integrali della forma

$$I(k) = \int_C F(z) e^{kf(z)} dz$$

ove $f(z)$ è una funzione complessa analitica (olomorfa), quindi priva di singolarità, e C è il cammino di integrazione, ad esempio quello mostrato in Fig. 5.2, nel piano complesso della variabile $z = x + iy$

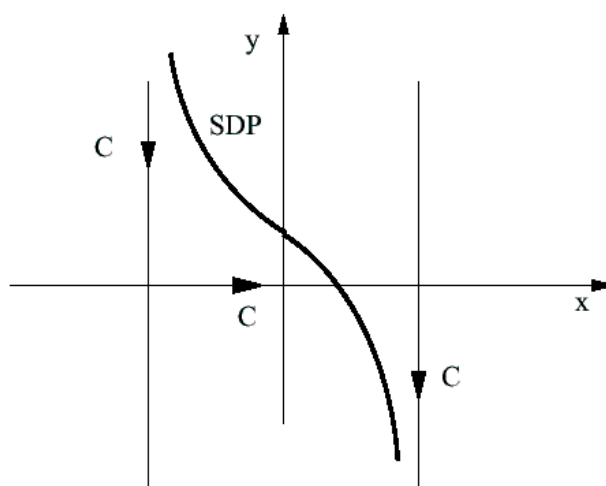


Figura 5.2: cammino di integrazione nel piano complesso.

La filosofia del metodo è che, entro certi limiti, il cammino di integrazione può essere alterato con continuità senza influenzare il valore dell'integrale, a patto che, durante tale

deformazione, esso non attraversi punti di singolarità dell'integrando, che saranno le singolarità della $F(z)$. Il nuovo cammino si può allora scegliere in modo tale che la maggior parte del contributo all'integrale sia dovuta solo a piccoli tratti di esso. In questo caso l'integrando può essere approssimato da funzioni più semplici (espansioni in serie) sulle parti importanti del percorso, ed il suo comportamento può essere trascurato altrove.

Se durante la deformazione dal vecchio cammino al nuovo si incontrano singolarità per la funzione $F(z)$, noi dobbiamo aggiungere il residuo se si tratta di un polo, mentre se si incontra un punto di diramazione (*branch point*) bisogna aggiungere un integrale sui bordi di un appropriato taglio di branca (*branch cut*) dove la funzione è ad un solo valore. Supporremo, tuttavia, per semplicità d'ora in poi che anche $F(z)$, e non solo $f(z)$, sia regolare (*well behaved*).

Se si assume k reale si può scrivere

$$F(z) e^{kf(z)} = F(x, y) e^{ku(x, y)} e^{ikv(x, y)}$$

avendo posto

$$f(z) = u(z) + i v(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Quindi se k è grande $e^{ikv(x, y)}$ oscilla molto rapidamente e l'integrale è difficile da valutare, per cui sarebbe comodo avere v costante.

D'altra parte, essendo $f(z)$ olomorfa, valgono le ben note condizioni di Cauchy-Riemann, che stabiliscono (indicando con un apice la derivata di f rispetto alla variabile complessa z e con pedici le derivate rispetto alle variabili reali x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff f_x(x, y) = -i f_y(x, y)$$

ove

$$f'(z) = f_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Se esiste un punto $z_s = x_s + i y_s$ tale che $f'(z_s) = 0$, allora in z_s si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{per } x = x_s, y = y_s \quad (5.5)$$

quindi si annullano tutte le derivate prime.

Le condizioni di Cauchy-Riemann, come è noto, ci dicono anche che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &\implies \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

equazioni di Laplace bidimensionali (si è fatto uso del teorema di Schwarz). Quindi né $u(x, y)$ né $v(x, y)$ hanno un massimo o un minimo in un tale punto z_s , dal momento che una soluzione dell'equazione di Laplace assume i massimi ed i minimi solo sulla frontiera, ma un “minimax”, o punto di sella: allora u aumenta per certe variazioni in x, y e diminuisce per altre.

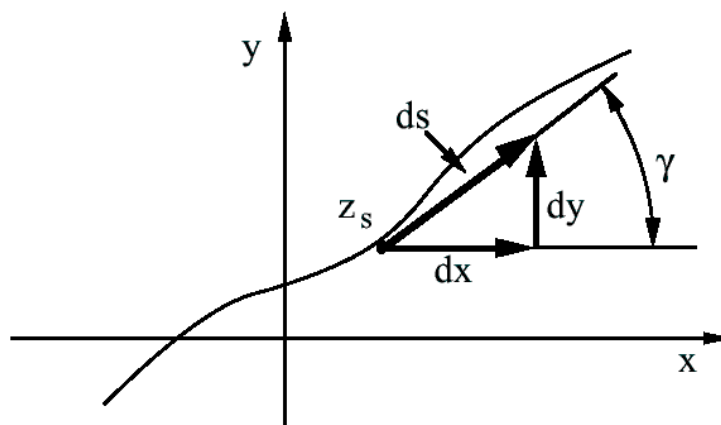


Figura 5.3: scelta più opportuna del cammino attraverso il punto di sella.

Il modulo del fattore esponenziale, $e^{ku(x,y)}$, può aumentare, diminuire o rimanere costante a seconda della scelta del cammino attraverso il punto di sella. Per evitare che $u(x, y)$ contribuisca nell'esponenziale su una larga parte del cammino, è conveniente attraversare il punto di sella in modo da ottenere una diminuzione la più rapida (e ripida) possibile (*steepest descent*) della funzione $u(x, y)$.

Con riferimento alla Fig. 5.3 si scelga un cammino attraverso il punto di sella z_s con lunghezza differenziale ds . Allora si ha:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \gamma$$

La funzione du/ds ha un massimo, quindi u cambia il più rapidamente possibile lungo il cammino, per valori di γ definiti da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{du}{ds} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \cos \gamma \frac{\partial u}{\partial y} &= -\sin \gamma \frac{\partial v}{\partial y} + \cos \gamma \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= -\frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} = -\frac{dv}{ds} = 0 \end{aligned}$$

Dunque risulta $v = \text{cost}$ per i cammini lungo i quali $u(x, y)$ cambia più rapidamente (e viceversa risulta $u = \text{cost}$ per i cammini lungo i quali $v(x, y)$ cambia più rapidamente), sicché il più ripido cammino in ampiezza è un cammino a fase costante, che è ciò che si desiderava. Invece nel metodo della fase stazionaria si sceglie il cammino con la più rapida variazione di fase, in corrispondenza al quale l'ampiezza rimane costante.

I cammini lungo i quali l'ampiezza cambia più rapidamente sono noti come quelli di più ripida salita (*Steepest-Ascent Path*, SAP) o di più ripida discesa (*Steepest-Descent Path*, SDP). Noi, come già visto, sceglieremo quello di più ripida discesa, donde il nome del metodo. Essendo k reale positivo, e grande, l'esponenziale $e^{ku(x,y)}$ diminuirà rapidamente con la distanza dal punto di sella e solo una piccola porzione del cammino di integrazione, intorno al punto stesso, darà un contributo significativo al valore dell'intero integrale.

Per valutare allora il nostro integrale, si deve prima trovare il punto di sella z_s dalla $f'(z_s) = 0$. Poi si può esprimere $f(z)$ intorno a z_s attraverso una serie di Taylor troncata:

$$f(z) \cong f(z_s) + \frac{f''(z_s)}{2} (z - z_s)^2$$

essendo $f'(z_s) = 0$. Si ha allora, assumendo che $F(z)$ sia una funzione lentamente variabile nell'intorno del punto di sella:

$$I(k) = \int_{\text{SDP}} F(z) e^{kf(z)} dz \cong F(z_s) e^{kf(z_s)} \int_{\text{SDP}} e^{k \frac{f''(z_s)}{2} (z - z_s)^2} dz$$

Ponendo

$$k \frac{f''(z_s)}{2} (z - z_s)^2 = -\xi^2 \quad \text{cioè } k \left[f(z) - f(z_s) \right] \cong -\xi^2$$

da cui

$$\xi = \frac{(z - z_s)}{\sqrt{2}} \sqrt{-kf''(z_s)}$$

$$dz = \frac{\sqrt{2} d\xi}{\sqrt{-kf''(z_s)}}$$

si può scrivere, estendendo i limiti all'infinito (visto che il valore dell'integrale non cambierà sensibilmente)

$$I(k) \cong \frac{F(z_s) e^{kf(z_s)}}{\sqrt{-kf''(z_s)}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{2\pi}{-kf''(z_s)}} F(z_s) e^{kf(z_s)}$$

essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \quad (\text{integrale di Gauss})$$

Se esistono più punti di sella (ad esempio N), si può invece scrivere:

$$I(k) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sum_{n=1}^N \frac{F(z_{s_n})}{\sqrt{-f''(z_{s_n})}} e^{kf(z_{s_n})}$$

La somma assume, attraverso il principio di sovrapposizione, che il contributo di ciascun punto di sella non sia affetto dalla presenza degli altri.

Le precedenti formule infine tengono conto del contributo all'integrale da parte dei punti di sella del primo ordine [$f'(z_s) = 0$, ma $f''(z_s) \neq 0$]. Per punti di sella del secondo ordine [$f'(z_s) = f''(z_s) = 0$] l'espressione è evidentemente diversa.

Si è detto che il metodo della fase stazionaria corrisponde a un cammino a modulo costante tale che $e^{ku(x,y)}$ rimanga costante ovunque ed $e^{ikv(x,y)}$ vari il più rapidamente possibile allontanandosi dai punti di sella, cioè l'opposto di quello che si è fatto: la valutazione dell'integrale può anche in questo caso essere portata avanti dai contributi vicino ai punti di sella. Poiché il fattore di fase e^{ikv} è stazionario ai punti di sella e vicino ad essi, ed oscilla molto rapidamente nelle restanti parti del cammino, ciò rende i contributi netti dalle altre parti, esclusi i punti di sella, trascurabili. Il metodo della fase stazionaria tuttavia può non porgere lo stesso risultato del metodo della *steepest descent* perché i loro corrispondenti cammini sono diversi. I due metodi porteranno a identici risultati se il cammino a modulo costante (fase stazionaria) può essere deformato con continuità fino al cammino della *steepest descent*. Questo si verifica se i due cammini hanno identici estremi e non vi sono singolarità nella regione tra i due cammini (cfr. teorema dei residui).

Come esempi concreti di calcolo, citiamo il seguente

$$\int_C e^{-jk_0 \varrho \cos(z-\varphi)} dz$$

[in questo caso $F(z) \equiv 1$]. Questo integrale rappresenta il campo diretto irradiato da una sorgente di linea posta al di sopra di uno slab dielettrico su piano conduttore (il cosiddetto problema di Sommerfeld: vedi Fig. 5.4).

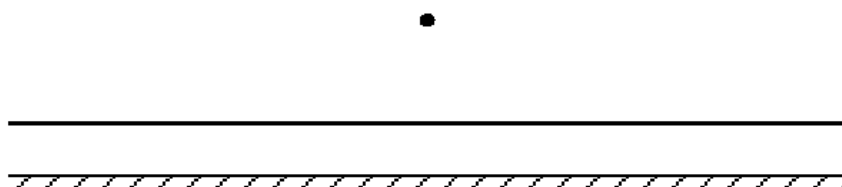


Figura 5.4: sorgente di linea al di sopra di uno slab dielettrico su piano conduttore.

Lo stesso metodo si può adoperare anche per valutare il campo riflesso. Un altro esempio è un integrale del tipo:

$$\int_C C_n(k_z) H_n^{(2)}(k_t \varrho) e^{-jk_z z} dk_z \quad k_t = \sqrt{k^2 - k_z^2}$$

che rappresenta il campo irradiato da un dipolo assiale in prossimità di un cilindro conduttore indefinito. L'integrale è molto difficile da calcolare in generale [$C_n(k_z)$ è una funzione complicata], ma se interessa il campo lontano (diagramma di radiazione) si può applicare lo *steepest descent*.

5.3 Calcolo del campo lontano

Torniamo ora al problema di irradiazione da un'apertura ed applichiamo il metodo della fase stazionaria al nostro integrale, o meglio alla parte di esso che dà il contributo delle onde omogenee, perché nel campo delle evanescenti non sarebbe più vero che $\underline{k} \cdot \underline{r}$ è reale e non si avrebbe più un fattore di pura fase. Quindi in realtà si considera l'integrale:

$$\underline{E}_{\text{hom}}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon} \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y) e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} dk_x dk_y$$

Come già visto, il metodo assume che il principale contributo all'integrale venga da valori di k_x e k_y tali che $\underline{k} \cdot \underline{r}$ non cambi, ossia rimanga stazionario per cambiamenti al primo ordine in k_x e k_y . Per gli altri valori di k_x e k_y , $\underline{k} \cdot \underline{r}$ cambia molto rapidamente e le parti reale ed immaginaria della funzione $e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}$ oscillano molto rapidamente fra i valori $+1$ e -1 . Assumendo che $\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y)$ sia una funzione lentamente variabile di k_x e k_y , l'integrando oscilla molto rapidamente al di fuori dei punti stazionari, cosicché il contributo all'integrale è trascurabile. Al tendere all'infinito del punto di osservazione, il contributo all'integrale dalla regione al di fuori dei punti stazionari tende ad essere zero.

Bisogna allora per prima cosa trovare i punti stazionari del termine $\underline{k} \cdot \underline{r}$, che possiamo scrivere come:

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = \underline{k} \cdot \underline{r}_o r = k_r r$$

Nello studio del campo lontano, è utile considerare un sistema di coordinate sferiche r, θ, φ . Ricordiamo la matrice di trasformazione per passare da coordinate cartesiane a coordinate sferiche (vedi Campi Elettromagnetici I):

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Applicandola al vettore $\underline{k}$ si ha:

$$\begin{aligned} \underline{k} \cdot \underline{r} &= k_r r = (k_x \sin \theta \cos \varphi + k_y \sin \theta \sin \varphi + k_z \cos \theta) r = \\ &= \left(k_x \sin \theta \cos \varphi + k_y \sin \theta \sin \varphi + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cos \theta \right) r \end{aligned}$$

I punti stazionari si ottengono dalla

$$\frac{\partial(\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x} = 0 \qquad \frac{\partial(\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_y} = 0$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x} &= r \frac{\partial k_r}{\partial k_x} = r \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{-2k_x}{2\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \cos \theta \right) = \\ &= r \left(\sin \theta \cos \varphi - \frac{k_x}{k_z} \cos \theta \right) = 0 \\ \frac{\partial(\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_y} &= r \frac{\partial k_r}{\partial k_y} = r \left(\sin \theta \sin \varphi - \frac{k_y}{k_z} \cos \theta \right) = 0 \end{aligned}$$

Essendo ovviamente $r \neq 0$, si ottiene rispettivamente:

$$k_x = k_z \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\cos \theta} \quad k_y = k_z \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta}$$

Si può allora scrivere nel punto stazionario:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_z^2 \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\cos^2 \theta} + 1 \right) = k_z^2 \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{k_z^2}{\cos^2 \theta}$$

$$\implies k_z = k \cos \theta = k_3$$

Sostituendo poi nelle formule precedenti di k_x e k_y , il punto stazionario è individuato da

$$k_x = k \sin \theta \cos \varphi = k_1 \quad k_y = k \sin \theta \sin \varphi = k_2$$

Il passo successivo è lo sviluppo della funzione $\underline{k} \cdot \underline{r}$ in serie di Taylor intorno al punto stazionario (k_1, k_2) :

$$\begin{aligned} \underline{k} \cdot \underline{r} \cong & [\underline{k} \cdot \underline{r}]_{(k_1, k_2)} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x^2} \right]_{(k_1, k_2)} (k_x - k_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_y^2} \right]_{(k_1, k_2)} (k_y - k_2)^2 + \left[\frac{\partial^2 (\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x \partial k_y} \right]_{(k_1, k_2)} (k_x - k_1)(k_y - k_2) \end{aligned}$$

Con le usuali posizioni, si potrà infine scrivere:

$$\underline{k} \cdot \underline{r} \cong [\underline{k} \cdot \underline{r}]_{(k_1, k_2)} - A \xi^2 - B \eta^2 - C \xi \eta$$

ove

$$A = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x^2} \right]_{(k_1, k_2)} \quad B = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_y^2} \right]_{(k_1, k_2)} \quad C = - \left[\frac{\partial^2 (\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x \partial k_y} \right]_{(k_1, k_2)}$$

$$\xi = k_x - k_1 \quad \eta = k_y - k_2$$

Quindi ci si sposta in un sistema di riferimento centrato in k_1, k_2 .

Calcolando a questo punto i vari termini dello sviluppo in serie, si ha per il termine costante:

$$\begin{aligned} [\underline{k} \cdot \underline{r}]_{(k_1, k_2)} &= [k_r]_{(k_1, k_2)} r = (k_1 \sin \theta \cos \varphi + k_2 \sin \theta \sin \varphi + k_3 \cos \theta) r = \\ &= (k \sin \theta \cos \varphi \sin \theta \cos \varphi + k \sin \theta \sin \varphi \sin \theta \sin \varphi + k \cos^2 \theta) r = \\ &= k \left(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \right) r = k \left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right) r = k r \end{aligned}$$

cioè nel punto stazionario si ha $k_r = k$, cioè $\underline{k} = k \underline{r}_o$ (onda piana radiale).

Per quanto riguarda il coefficiente A si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x^2} &= r \left[-\cos \theta \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\frac{k_x}{k_z} \right) \right] = r \left[-\cos \theta \frac{1}{k_z^2} \left(k_z - k_x \frac{\partial k_z}{\partial k_x} \right) \right] = \\ &= -r \cos \theta \frac{1}{k_z^2} \left(k_z - k_x \frac{-k_x}{k_z} \right) = -r \cos \theta \frac{1}{k_z^2} \left(k_z + \frac{k_x^2}{k_z} \right)\end{aligned}$$

Calcolando la derivata nel punto stazionario si ha:

$$\begin{aligned}-r \cos \theta \frac{1}{k^2 \cos^2 \theta} \left(k \cos \theta + \frac{k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{k \cos \theta} \right) &= -\frac{r}{k} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta} \right) \implies \\ A &= \frac{r}{2k} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta} \right) > 0\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo per il calcolo di B , con l'unica sostituzione di $\cos \varphi$ con $\sin \varphi$ perché in sostanza si deve sostituire k_y a k_x e quindi k_2 a k_1 :

$$B = \frac{r}{2k} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\cos^2 \theta} \right)$$

Infine per il calcolo di C :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\underline{k} \cdot \underline{r})}{\partial k_x \partial k_y} &= r \left[-\cos \theta \frac{\partial}{\partial k_y} \left(\frac{k_x}{k_z} \right) \right] = r \left[-\cos \theta \frac{1}{k_z^2} \left(-k_x \frac{\partial k_z}{\partial k_y} \right) \right] = \\ &= r \cos \theta k_x \frac{-k_y}{k_z k_z^2} = -r \cos \theta \frac{k_x k_y}{k_z^3}\end{aligned}$$

Calcolando la derivata nel punto stazionario si ha:

$$\begin{aligned}-r \cos \theta \frac{k^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi}{k^3 \cos^3 \theta} &= -\frac{r}{k} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos \varphi \sin \varphi \implies \\ C &= \frac{r}{k} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos \varphi \sin \varphi\end{aligned}$$

Tornando all'integrale iniziale si può scrivere, portando fuori i termini costanti:

$$\underline{E}_{\text{hom}}(x, y, z) \cong \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{\underline{E}}(k_1, k_2) e^{-jk_r} \iint_{S_{1,2}} e^{j(A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta)} d\xi d\eta$$

ove $S_{1,2}$ è la superficie vicino al punto stazionario.

Si applica a questo punto il metodo della fase stazionaria visto in precedenza, al fine di calcolare in modo approssimato il campo elettrico nella zona lontana (*far field*). Tenendo conto del fatto che ora nell'integrale non compare più il k all'esponente, si devono eseguire le sostituzioni formali:

$$A \longrightarrow \frac{A}{k} \quad B \longrightarrow \frac{B}{k} \quad C \longrightarrow \frac{C}{k}$$

da cui la formula di integrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(A\xi^2+B\eta^2+C\xi\eta)} d\xi d\eta = \frac{j 2\pi \delta}{\sqrt{|4AB - C^2|}}$$

D'altra parte, dai valori calcolati di A , B , C si ha:

$$\begin{aligned} 4AB - C^2 &= \frac{4r^2}{4k^2} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta}\right) \left(1 + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\cos^2 \theta}\right) - \frac{r^2}{k^2} \frac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{r^2}{k^2} \frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) - \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^4 \theta} = \\ &= \frac{r^2}{k^2} \frac{1}{\cos^4 \theta} \left(\cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right) = \\ &= \frac{r^2}{k^2} \frac{1}{\cos^4 \theta} (\cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta) = \frac{r^2}{k^2} \frac{1}{\cos^4 \theta} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \left(\frac{r}{k \cos \theta}\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Si ha dunque $4AB - C^2 > 0$, ed inoltre $A > 0$, per cui $\delta = +1$ e il nostro integrale porge

$$\iint_{S_{1,2}} e^{j(A\xi^2+B\eta^2+C\xi\eta)} d\xi d\eta = j \frac{2\pi}{\frac{r}{k \cos \theta}} = j \frac{2\pi k}{r} \cos \theta$$

Quindi si ha infine il fondamentale legame tra il campo elettrico in zona lontana $\underline{E}_{\text{far}}(x, y, z)$ e lo spettro $\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y)$:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{far}}(x, y, z) &= \underline{E}_{\text{far}}(r, \theta, \varphi) \cong \frac{jk e^{-jkr}}{2\pi r} \cos \theta \tilde{\underline{E}}(k_1, k_2) = \\ &= \frac{jk e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\cos \theta \tilde{\underline{E}}(k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta \sin \varphi) \right] \end{aligned}$$

dove $\frac{e^{-jkr}}{r}$ è l'onda sferica uscente, $\cos \theta$ è il cosiddetto fattore coseno ed il campo elettrico in parentesi mostra una dipendenza dalle sole coordinate angolari (diagramma di radiazione). Questa separazione delle dipendenze radiale e angolare è tipica del campo lontano.

D'altra parte si era visto che la componente lungo z del campo trasformato era ricavabile dalle altre due:

$$\tilde{E}_z(k_x, k_y) = -\frac{k_x \tilde{E}_x(k_x, k_y) + k_y \tilde{E}_y(k_x, k_y)}{k_z}$$

Nel punto stazionario si ha:

$$-\frac{k \sin \theta \cos \varphi \tilde{E}_x + k \sin \theta \sin \varphi \tilde{E}_y}{k \cos \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\tilde{E}_x \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \varphi)$$

Il campo lontano viene usualmente espresso in coordinate sferiche, quindi ci conviene passare dalle componenti cartesiane a quelle sferiche, delle quali poi come è noto interessano soprattutto quelle rispetto a θ e φ , che dominano sulla radiale. Infatti, volendo calcolare la componente radiale si ha:

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_x \sin \theta \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \theta \sin \varphi + \tilde{E}_z \cos \theta$$

e nel punto stazionario:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r &= \tilde{E}_x \sin \theta \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\tilde{E}_x \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \varphi) = \\ &= \tilde{E}_x \sin \theta \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \theta \sin \varphi - \tilde{E}_x \sin \theta \cos \varphi - \tilde{E}_y \sin \theta \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

Dalle note formule risulta

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\theta &= \tilde{E}_x \cos \theta \cos \varphi + \tilde{E}_y \cos \theta \sin \varphi - \tilde{E}_z \sin \theta \\ \tilde{E}_\varphi &= -\tilde{E}_x \sin \varphi + \tilde{E}_y \cos \varphi \end{aligned}$$

La prima diviene nel punto stazionario

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\theta &= \tilde{E}_x \cos \theta \cos \varphi + \tilde{E}_y \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\tilde{E}_x \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \varphi) = \\ &= \tilde{E}_x \cos \varphi \left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) + \tilde{E}_y \sin \varphi \left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) = \\ &= (\tilde{E}_x \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \varphi) \left(\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) = \frac{\tilde{E}_x \cos \varphi + \tilde{E}_y \sin \varphi}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Si ha allora per il campo globale in zona lontana:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{far}}(r, \theta, \varphi) &\cong \frac{jk e^{-jkr}}{2\pi r} \left\{ \underline{\theta}_o \left[\tilde{E}_x(k_1, k_2) \cos \varphi + \tilde{E}_y(k_1, k_2) \sin \varphi \right] + \right. \\ &\quad \left. + \underline{\varphi}_o \cos \theta \left[-\tilde{E}_x(k_1, k_2) \sin \varphi + \tilde{E}_y(k_1, k_2) \cos \varphi \right] \right\} \end{aligned}$$

con, nel nostro caso di apertura rettangolare su piano metallico:

$$\tilde{E}_x(k_x = k_1, k_y = k_2) = \tilde{E}_x(\theta, \varphi) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_{ax}(x', y', z' = 0) e^{jk(\sin \theta \cos \varphi x' + \sin \theta \sin \varphi y')} dx' dy'$$

ove con l'apice si indicano le coordinate sul piano dell'apertura, e col pedice a il campo d'apertura

$$\tilde{E}_y(k_x = k_1, k_y = k_2) = \tilde{E}_y(\theta, \varphi) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} E_{ay}(x', y', z' = 0) e^{jk(\sin \theta \cos \varphi x' + \sin \theta \sin \varphi y')} dx' dy'$$

Per l'espressione integrale di $\underline{H}$ si può ripetere lo stesso discorso, a meno di un fattore $1/(k\zeta)$ a moltiplicare fuori, e di un fattore $\underline{k}$ a moltiplicare vettorialmente a sinistra dentro. Il fattore $\underline{k}$ nel punto stazionario diventa come già visto

$$\underline{k} = k \underline{r}_o$$

e può a questo punto essere portato fuori dall'integrale, per cui risulta per il campo in zona lontana:

$$\underline{H}_{\text{far}}(r, \theta, \varphi) \cong \frac{1}{k\zeta} k \underline{r}_o \times \underline{E}_{\text{far}}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\zeta} \underline{r}_o \times \underline{E}_{\text{far}}(r, \theta, \varphi)$$

quindi distribuzione di campo lontano di tipo onda piana locale (radiale).

Si ha infine per il vettore di Poynting in zona lontana (sopprimendo per semplicità i pedici)

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \cong \frac{1}{2} \underline{E} \times \frac{1}{\zeta} (\underline{r}_o \times \underline{E}^*) =$$

e ricordando la regola del doppio prodotto vettoriale:

$$= \frac{1}{2\zeta} \left[\underline{r}_o |\underline{E}|^2 - \underline{E}^* (\underline{E} \cdot \underline{r}_o) \right] \cong \frac{1}{2\zeta} \left(|E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2 \right) \underline{r}_o$$

(puramente reale e radiale)

Consideriamo come esempio il caso (peraltro irrealistico) di distribuzione d'apertura uniforme, ossia supponiamo che sull'apertura il campo elettrico abbia una distribuzione del tipo

$$\underline{E}_a = \underline{y}_o E_o \quad (\text{con } E_o \text{ costante}) \quad \text{per } -\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2}$$

Si può trattare, ad esempio, di una schematizzazione del campo per antenne a onda leaky di lunghezza a nell'ipotesi di distribuzione uniforme di ampiezza e $\beta = 0$, ossia radiazione al *broadside*, cioè in direzione normale all'apertura. Dalle formule appena precedenti risulta:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x(\theta, \varphi) &= \tilde{E}_x(k_x = k_1, k_y = k_2) = 0 \\ \tilde{E}_y(\theta, \varphi) &= E_o \int_{-a/2}^{a/2} e^{jk \sin \theta \cos \varphi x'} dx' \cdot \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk \sin \theta \sin \varphi y'} dy' = \\ &= E_o \frac{\left[e^{jk \sin \theta \cos \varphi x'} \right]_{-a/2}^{a/2}}{jk \sin \theta \cos \varphi} \frac{\left[e^{jk \sin \theta \sin \varphi y'} \right]_{-b/2}^{b/2}}{jk \sin \theta \sin \varphi} = \\ &= E_o \frac{2j \sin \left(k \sin \theta \cos \varphi \frac{a}{2} \right)}{jk \sin \theta \cos \varphi} \frac{2j \sin \left(k \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2} \right)}{jk \sin \theta \sin \varphi} = \\ &= E_o a b \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y} = E_o a b \text{sinc}(X) \text{sinc}(Y) \end{aligned}$$

ove

$$X = k \sin \theta \cos \varphi \frac{a}{2} \quad Y = k \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2}$$

I casi particolari che spesso si considerano nelle applicazioni dei diagrammi di radiazione sono:

- $\varphi = 0$: piano di elevazione (nel nostro riferimento è il piano xz). Si ha $Y \equiv 0$,
 $X = X(\theta) = k \sin \theta \frac{a}{2}$
- $\varphi = \pi/2$: piano di azimut (nel nostro riferimento è il piano yz). Si ha $X \equiv 0$,
 $Y = Y(\theta) = k \sin \theta \frac{b}{2}$

Si osservi che più si aumenta la dimensione a o la dimensione b , più i lobi sul piano di elevazione o di azimut rispettivamente si restringono², a conferma di una proprietà generale delle antenne.

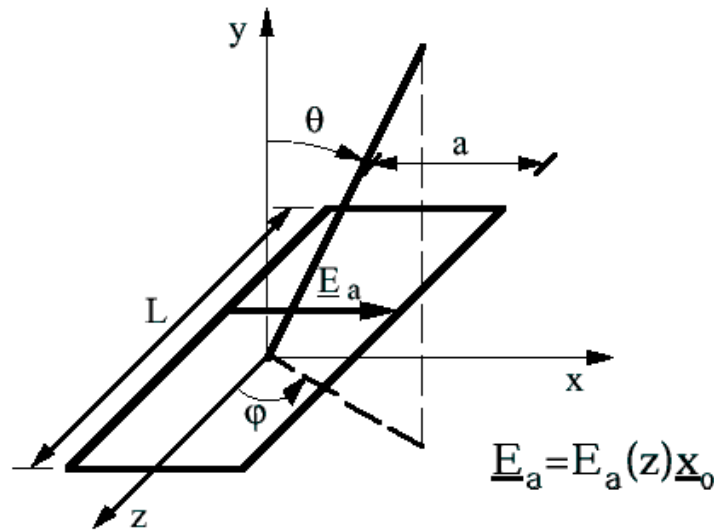


Figura 5.5: apertura radiante di un'antenna a onda leaky.

Si consideri adesso un'antenna a onda leaky, detta anche antenna a onda viaggiante (*traveling-wave antenna*), cioè fatta ad esempio con una guida aperta lateralmente, che si estende per una lunghezza L nella direzione z e per una certa larghezza a nella direzione x . Conviene cambiare il sistema di riferimento in quello di Fig. 5.5. Si supponga che tale sistema di riferimento sia centrato rispetto all'apertura, e che il campo elettrico sull'apertura sia polarizzato linearmente nella direzione x , non dipenda dalla variabile x e invece

²Si noti che nel semispazio di interesse $z > 0$ si ha $0 \leq \theta < \pi/2$ e quindi $\sin \theta$ è una funzione monotona crescente.

dipenda dalla z . Si ottiene in questo caso (il ruolo che prima giocava la y ora lo gioca la x , e quello che prima giocava la x ora lo gioca la z):

$$\begin{aligned}\tilde{E}_z(\theta, \varphi) &= 0 \\ \tilde{E}_x(\theta, \varphi) &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-a/2}^{a/2} E_a(z') e^{jk(\sin \theta \cos \varphi z' + \sin \theta \sin \varphi x')} dz' dx' = \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} E_a(z') e^{jk \sin \theta \cos \varphi z'} dz' \int_{-a/2}^{a/2} e^{jk \sin \theta \sin \varphi x'} dx'\end{aligned}$$

Separiamo i contributi di ampiezza e fase, ponendo:

$$E_a(z) = A(z) e^{-j\beta z}$$

Supponiamo inoltre di considerare il campo lontano sul solo piano di elevazione ($\varphi = 0$). Si ottiene allora:

$$\tilde{E}_x(\theta) = a \int_{-L/2}^{L/2} A(z') e^{-j\beta z'} e^{jk \sin \theta z'} dz' = a \int_{-L/2}^{L/2} A(z') e^{jk(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta)z'} dz'$$

A questo integrale unidimensionale si può pensare di applicare il metodo della fase stazionaria e scrivere che il contributo principale nel campo lontano si avrà per:

$$\frac{d}{dz'} \left[\left(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta \right) z' \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\beta}{k} + \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{k} = \sin \theta$$

cioè troviamo la condizione approssimata per l'angolo di massima irradiazione θ_m : il contributo significativo al campo si ha per $\theta \cong \theta_m$. Infatti si ricordi la configurazione dei vettori di fase e di ampiezza dell'onda leaky (vedi Fig. 5.6). Se si confonde il modulo del vettore $\underline{\beta}$ con k_o (cioè si trascura la presenza dell'attenuazione, che in genere ha modulo molto inferiore) si ha

$$\beta \equiv \beta_z = |\underline{\beta}| \sin \theta \cong k_o \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{k_o} \cong \sin \theta$$

Come si vedrà meglio in seguito, le antenne a onda leaky uniformi longitudinalmente hanno una distribuzione d'ampiezza sull'apertura di tipo esponenziale, e quindi non uniforme. Per ottenere una distribuzione d'apertura uniforme, oppure altre distribuzioni d'ampiezza particolarmente utili nel progetto delle antenne, è necessario sagomare longitudinalmente la struttura (procedura di *tapering*). Comunque, nel caso di distribuzione di ampiezza uniforme, cioè $A(z') \equiv A$, l'integrale precedente è risolvibile in forma chiusa, e si

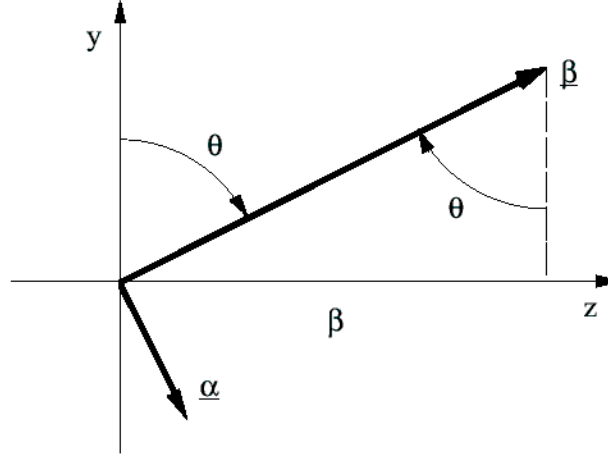


Figura 5.6: rappresentazione dell'onda leaky, vettori di fase e di ampiezza.

ha:

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} e^{jk\left(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta\right)z'} dz' &= \frac{e^{jk\left(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta\right)z'} \Big|_{-L/2}^{L/2}}{jk \left(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta\right)} = \\ &= \frac{2j \sin \left[k \left(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta\right) \frac{L}{2} \right]}{jk \left(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta\right)} = L \operatorname{sinc} \left[k \left(-\frac{\beta}{k} + \sin \theta\right) \frac{L}{2} \right] \end{aligned}$$

che presenta il massimo proprio all'annullarsi dell'argomento, cioè per $\beta/k = \sin \theta$. Quindi in questo caso particolare il metodo della fase stazionaria non è un'approssimazione solo asintotica, per $k \rightarrow \infty$, ma porge il risultato rigoroso (perché in questo caso la funzione di ampiezza $F(z)$ è una costante e la funzione di fase $f(z)$ è lineare).

Come esempio concreto si potrebbe prendere l'antenna basata sulla guida NRD con un intenzionale gap d'aria (rappresentata in Fig. 5.7), che presenta appunto polarizzazione orizzontale e ha campo elettrico indipendente da x , oppure l'antenna basata su una guida a *groove* asimmetrica.

Spesso come campi di apertura si considerano quelli imperturbati dei modi in guida, e questo costituisce un'ulteriore approssimazione, perché ovviamente il campo sarà perturbato dall'improvvisa apertura (non solo nell'ampiezza, per la presenza di riflessioni, ma anche nelle linee di forza). I campi totali all'apertura, inoltre, includono quelli dei modi sotto cutoff che contribuiscono alla potenza immaginaria reattiva.

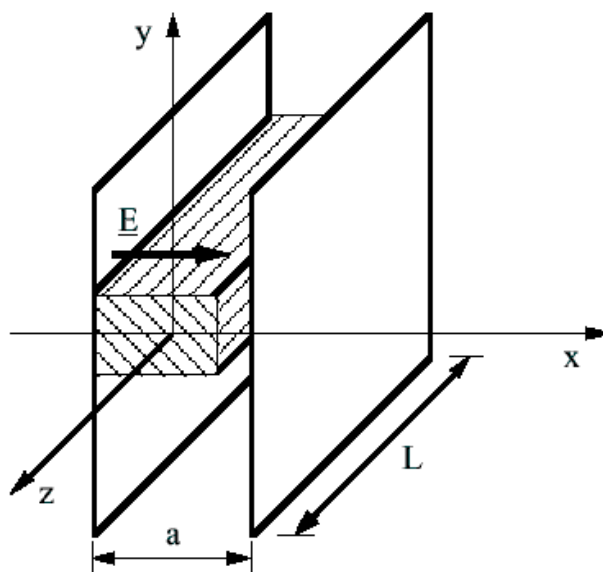


Figura 5.7: antenna a onda leaky basata sulla guida NRD.

5.4 Ammettenza d'apertura

Un altro parametro d'interesse, specialmente quando l'antenna è usata per applicazioni di diagnostica (e quindi come un sensore), ma anche nelle antenne a onda leaky (perché ci interessa l'ammettenza di radiazione da mettere nella rete equivalente trasversa), è la sua impedenza o ammettenza terminale.

Si ricordi allo scopo la definizione di potenza complessa in un circuito:

$$P = \frac{1}{2} V I^* \quad \Rightarrow \quad P^* = \frac{1}{2} V^* I = \frac{1}{2} V^* Y V = \frac{1}{2} Y |V|^2 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{2 P^*}{|V|^2}$$

L'ammettenza d'apertura è dunque definita come:

$$Y_a = \frac{2 P_a^*}{|V_a|^2}$$

essendo P_a^* la coniugata della potenza complessa trasmessa dall'apertura e V_a la tensione di riferimento dell'apertura. La potenza complessa trasmessa dall'apertura (posta sul piano $z = 0$) si può scrivere come flusso del vettore di Poynting:

$$P_a = \frac{1}{2} \iint_{S_a} \underline{E}(x', y', z' = 0) \times \underline{H}^*(x', y', z' = 0) \cdot \underline{z}_o \, dx' \, dy'$$

ove S_a è la superficie dell'apertura.

Consideriamo ad esempio la guida d'onda rettangolare (montata su un piano di massa infinito) nel suo modo dominante TE_{10} , per cui la distribuzione d'apertura è approssimativamente la seguente:

$$\underline{E}_a = \underline{y}_o E_o \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) \quad -\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2} \quad -\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2}$$

(c'è il coseno in luogo del seno perché il sistema di riferimento è centrato rispetto all'apertura). Nel nostro caso di campo elettrico diretto lungo y , il campo magnetico che dà contributo nel prodotto vettoriale sarà quello diretto lungo x (del resto il campo magnetico trasverso rispetto a z del TE_{10} è proprio diretto lungo x), e quindi:

$$P_a = -\frac{1}{2} \iint_{S_a} E_y(x', y', 0) H_x^*(x', y', 0) dx' dy'$$

A questo punto applichiamo una forma alternativa del teorema di Parseval (formula dell'energia mutua):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df$$

Si ha nel nostro caso bidimensionale:

$$P_a = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(k_x, k_y) H_x^*(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

dove abbiamo potuto, nell'integrale in $dx' dy'$, estendere i limiti all'infinito perché sappiamo che E_y si annulla fuori dell'apertura.

La trasformata del campo magnetico $\underline{H}(k_x, k_y)$ era legata in generale a quella del campo elettrico $\underline{E}(k_x, k_y)$ dalla:

$$\underline{H}(k_x, k_y) = \frac{1}{k \zeta} \underline{k} \times \underline{E}(k_x, k_y) \quad \implies \quad H_x(k_x, k_y) = \frac{1}{k \zeta} (E_z k_y - E_y k_z)$$

Essendo

$$E_z = -\frac{(k_x E_x + k_y E_y)}{k_z} = -\frac{k_y}{k_z} E_y$$

si ricava

$$H_x = -\frac{1}{k \zeta} \left(k_z + \frac{k_y^2}{k_z} \right) E_y = -\frac{1}{k \zeta} \frac{k^2 - k_x^2}{k_z} E_y$$

Vista la forma funzionale della distribuzione d'apertura, si ha:

$$\begin{aligned} E_y(k_x, k_y) &= E_o \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{j(k_x x' + k_y y')} dx' dy' = \\ &= E_o \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk_y y'} dy' \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{jk_x x'} dx' \end{aligned}$$

Il primo integrale risulta pari a:

$$\frac{\left[e^{jk_y y'} \right]_{-b/2}^{b/2}}{jk_y} = \frac{2j \sin \left(k_y \frac{b}{2} \right)}{jk_y} = b \operatorname{sinc} \left(\widehat{k}_y \right) \quad \text{con } \widehat{k}_y = \frac{k_y b}{2}$$

Per quanto riguarda l'integrale rimanente, esprimendo il coseno come somma di esponenziali immaginari, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} \left(e^{j \frac{\pi}{a} x'} + e^{-j \frac{\pi}{a} x'} \right) e^{jk_x x'} dx' &= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{jx' \left(\frac{\pi}{a} + k_x \right)} dx' + \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{jx' \left(-\frac{\pi}{a} + k_x \right)} dx' = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2j \sin \left[\left(\frac{\pi}{a} + k_x \right) \frac{a}{2} \right]}{j \left(\frac{\pi}{a} + k_x \right)} + \frac{1}{2} \frac{2j \sin \left[\left(-\frac{\pi}{a} + k_x \right) \frac{a}{2} \right]}{j \left(-\frac{\pi}{a} + k_x \right)} = \\ &= \frac{\left(k_x - \frac{\pi}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + k_x \frac{a}{2} \right) + \left(k_x + \frac{\pi}{a} \right) \sin \left(-\frac{\pi}{2} + k_x \frac{a}{2} \right)}{k_x^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2} = \\ &= \frac{\left(k_x - \frac{\pi}{a} \right) \cos \left(k_x \frac{a}{2} \right) - \left(k_x + \frac{\pi}{a} \right) \cos \left(k_x \frac{a}{2} \right)}{k_x^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2} = \frac{2\pi}{a} \frac{\cos \left(k_x \frac{a}{2} \right)}{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - k_x^2} = 2\pi a \frac{\cos \widehat{k}_x}{\pi^2 - k_x^2 a^2} = \\ &= \frac{\pi a}{2} \frac{\cos \widehat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \widehat{k}_x^2} \quad \text{con } \widehat{k}_x = \frac{k_x a}{2} \end{aligned}$$

da cui:

$$E_y(k_x, k_y) = \left(\frac{\pi a b}{2} \right) E_o \frac{\cos \widehat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \widehat{k}_x^2} \operatorname{sinc} \left(\widehat{k}_y \right)$$

Sostituendo nell'espressione di P_a si ha:

$$P_a = -\frac{1}{8\pi^2} \left(-\frac{1}{k \zeta} \right) \left(\frac{\pi a b}{2} \right)^2 |E_o|^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{k^2 - k_x^2}{k_z^*} \left[\frac{\cos \widehat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \widehat{k}_x^2} \right]^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\widehat{k}_y \right) dk_x dk_y$$

ove k_x, k_y sono reali e quindi non vanno coniugati, k_z invece potrebbe essere immaginario e quindi va coniugato. Qui infatti stiamo considerando anche le onde evanescenti, che danno il contributo reattivo. Si ottiene infine

$$\frac{(a b |E_o|)^2}{32 k \zeta} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{k^2 - k_x^2}{k_z^*} \left[\frac{\cos \widehat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \widehat{k}_x^2} \right]^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\widehat{k}_y \right) dk_x dk_y$$

Comunque poi serve P_a^* e quindi si dovrà riconiugare.

Se la tensione di riferimento all'apertura è assunta come:

$$V_a = \frac{a b}{\sqrt{2}} E_o \quad \Rightarrow \quad |V_a|^2 = \frac{(a b |E_o|)^2}{2}$$

Si ha allora per l'ammettenza d'apertura l'espressione finale:

$$Y_a = \frac{2 P_a^*}{|V_a|^2} = \frac{1}{8 k \zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 - k_x^2}{k_z} \left[\frac{\cos \hat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \hat{k}_x^2} \right]^2 dk_x \right\} dk_y = G_a + j B_a$$

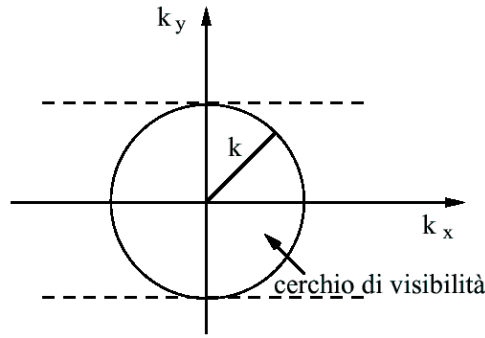


Figura 5.8:

I valori reali di k_z corrispondono alla potenza irradiata (potenza reale), mentre quelli immaginari corrispondono alla potenza reattiva (potenza immaginaria). Corrispondentemente si hanno rispettivamente la conduttanza G_a e la suscettanza B_a . La situazione è rappresentata in modo grafico in Fig. 5.8. Dall'esame delle varie regioni risultano le seguenti espressioni per G_a e B_a . Nel caso di G_a si deve rimanere all'interno del cerchio di visibilità e quindi se k_y varia da $-k$ a k , k_x potrà variare fra $-\sqrt{k^2 - k_y^2}$ e $\sqrt{k^2 - k_y^2}$. Essendo l'integrando una funzione pari di k_y e di k_x , per G_a si avrà (integrando solo sul primo quadrante e moltiplicando per quattro):

$$G_a = \frac{1}{2 k \zeta} \int_0^k \text{sinc}^2(\hat{k}_y) \left\{ \int_0^{\sqrt{k^2 - k_y^2}} \frac{k^2 - k_x^2}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \left[\frac{\cos \hat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \hat{k}_x^2} \right]^2 dk_x \right\} dk_y$$

La conduttanza è evidentemente sempre positiva, come dev'essere fisicamente.

Invece per quanto riguarda B_a , scindendo i contributi della regione interna e di quella

esterna si ha:

$$B_a = -\frac{1}{2k\zeta} \left\{ \int_0^k \text{sinc}^2(\hat{k}_y) \left\{ \int_{\sqrt{k^2-k_y^2}}^{+\infty} \frac{k_x^2 - k^2}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}} \left[\frac{\cos \hat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \hat{k}_x^2} \right]^2 dk_x \right\} dk_y + \right. \\ \left. + \int_k^{+\infty} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{k_x^2 - k^2}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}} \left[\frac{\cos \hat{k}_x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \hat{k}_x^2} \right]^2 dk_x \right\} dk_y \right\}$$

La valutazione numerica delle precedenti espressioni di G_a e B_a è complicata. Diverse ingegnose tecniche sono state usate per valutare questi integrali.

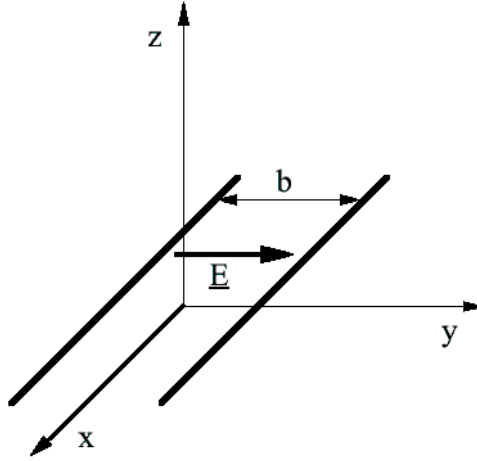


Figura 5.9:

Per ottenere valori numerici sarà allora considerato un esempio più semplice, quello della guida a piastre parallele, montata su un piano di massa infinito (vedi Fig. 5.9). Il campo elettrico sull'apertura si assume della forma

$$\underline{E}_a = \underline{y}_o E_o \quad -\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2}$$

Si suppone in questo caso indipendenza da x , quindi c'è solo il k_y . La tensione di apertura si può assumere come $V_a = b E_o$. In questo caso, siccome il problema è bidimensionale, si ha:

$$E_y(k_y) = E_o \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk_y y'} dy' = E_o b \text{sinc}(\hat{k}_y)$$

Per una formula vista prima segue

$$H_x(k_y) = -\frac{1}{k\zeta} \frac{k^2}{k_z} E_y(k_y) = -\frac{k}{\zeta k_z} E_o b \text{sinc}(\hat{k}_y)$$

e per la potenza complessa si ha (per unità di lunghezza nella direzione x):

$$\begin{aligned} P_a &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(k_y) H_x^*(k_y) dk_y = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{k}{\zeta} E_o^* b \right) (E_o b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z^*} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) dk_y = \\ &= \frac{(b|E_o|)^2 k}{4\pi \zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z^*} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) dk_y \end{aligned}$$

L'ammettenza dell'apertura a fessura (per unità di lunghezza lungo la direzione x) si può scrivere come

$$Y_a = \frac{2 P_a^*}{|V_a|^2} = \frac{k}{2\pi \zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) dk_y = G_a + j B_a$$

e per la parte reale G_a e la parte immaginaria B_a si ha, per la parità rispetto a k_y :

$$\begin{aligned} G_a &= \frac{k}{\pi \zeta} \int_0^k \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_y^2}} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) dk_y \\ B_a &= \frac{k}{\pi \zeta} \int_k^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k_y^2 - k^2}} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) dk_y \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\hat{k}_y = k_y \frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad dk_y = \frac{2}{b} d\hat{k}_y$$

si ha:

$$\begin{aligned} G_a &= \frac{k}{\pi \zeta} \int_0^{kb/2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{kb}{2}\right)^2 - \hat{k}_y^2}} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) d\hat{k}_y \\ B_a &= \frac{k}{\pi \zeta} \int_{kb/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{k}_y^2 - \left(\frac{kb}{2}\right)^2}} \text{sinc}^2(\hat{k}_y) d\hat{k}_y \end{aligned}$$

L'ammettenza sarà sempre di tipo capacitivo, essendo B_a positiva. Di queste espressioni si possono ricavare approssimazioni per piccoli valori di kb e per grandi valori di kb .

Si potrebbe pensare di inserire le espressioni ottenute per l'ammettenza in una rete equivalente trasversa. È possibile allora studiare ad esempio anche le antenne a onda leaky col metodo della risonanza trasversa. La parte reale dell'ammettenza corrisponde alla potenza irradiata, ed è essa che causa la presenza di un'attenuazione lungo z .

5.5 Antenne a onda leaky. Caratteristiche di radiazione, efficienza di radiazione, procedure di saggomatura (*tapering*).

Le caratteristiche di radiazione di un'antenna ad onda leaky sono facilmente legate alle caratteristiche di propagazione della corrispondente guida d'onda aperta con perdite. In

particolare la direzione di massima irradiazione ϑ_m (direzione del massimo del lobo) è legata come si è visto alla parte reale β della costante di propagazione longitudinale k_z , valendo la relazione

$$\sin \vartheta_m = \frac{\beta_z}{|\underline{\beta}|} \cong \frac{\beta_z}{k_o}$$

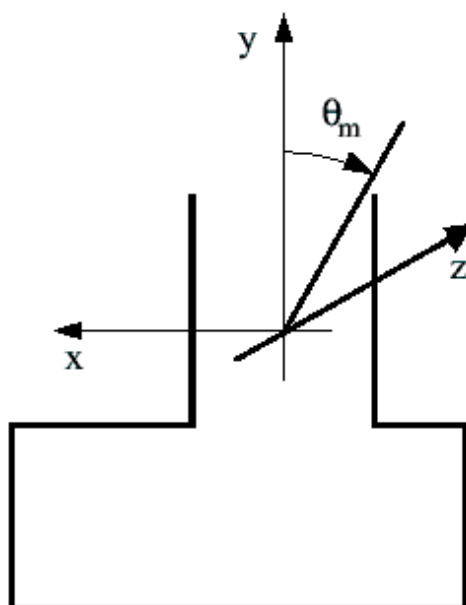


Figura 5.10:

La direzione ϑ_m è misurata rispetto alla direzione y normale all'apertura dell'antenna (direzione *broadside*) e con riferimento al piano longitudinale (*elevation plane*) yz . Sul piano trasversale (*azimuth plane*) xy invece il fascio emesso è a ventaglio (*fan beam*). Più l'antenna è grande, più il fascio è stretto e viceversa, per cui nel piano di elevazione il fascio è stretto, nel piano di azimut è largo. Per renderlo a matita (*pencil beam*) è necessario realizzare un allineamento (*array*) con più strutture identiche una accanto all'altra e con un'opportuna rete di sfasatori fra un'antenna e la successiva (*phased array*). Così si ottiene fra l'altro la scansione sul piano trasverso (detto anche *cross plane*).

La lunghezza di un'antenna ad onda leaky risulta di solito un compromesso tra l'efficienza di radiazione dell'antenna da un lato ed un'eccessiva lunghezza dall'altro ed è usualmente scelta in modo che circa il 90% della potenza sia irradiato ed il rimanente 10% assorbito da un carico adattato. Tale lunghezza è legata alla costante di attenuazione normalizzata α/k_o dalla relazione:

$$\left(\frac{L}{\lambda_o} \right)_{90\%} \cong \frac{0.183}{\frac{\alpha}{k_o}}$$

Fissata l'origine dell'asse z in corrispondenza della sezione iniziale dell'antenna, nel caso in cui la struttura sia uniforme lungo z (assenza di *tapering*) e quindi l'attenuazione α non vari con z , si ha la nota espressione per la potenza trasportata:

$$P(z) = P(0) e^{-2\alpha z}$$

Invece nel caso in cui l'attenuazione possa dipendere da z perché si sta attuando una procedura di tapering, allo scopo di soddisfare determinati requisiti sui lobi laterali, la formula precedente si generalizza nella:

$$P(z) = P(0) e^{-2 \int_0^z \alpha(z') dz'} \quad (5.7)$$

Si definisce efficienza di radiazione dell'antenna η_r il rapporto tra la potenza irradiata dall'antenna P_r e quella fornita dall'alimentazione P_a , ossia:

$$\eta_r = \frac{P_r}{P_a} = \frac{P_r}{P_r + P_d}$$

ove P_d è la potenza dissipata, che tiene conto delle perdite ohmiche della struttura guidante (normalmente trascurabili), nonché della potenza dissipata nel carico adattato normalmente posto alla bocca d'uscita dell'antenna. Nel caso di struttura guidante ideale, per cui la sola dissipazione è quella sul carico adattato posto in $z = L$, si può anche scrivere $P_r = P(0) - P(L)$, per cui

$$\eta_r = \frac{P(0) - P(L)}{P(0)} = 1 - \frac{P(L)}{P(0)} = 1 - e^{-2 \int_0^L \alpha(z') dz'} \quad (5.8)$$

Nella precedente espressione è stato anche trascurato l'eventuale disadattamento d'ingresso tra l'alimentazione (*feeder*) e l'antenna, che porterebbe ad un ulteriore fattore moltiplicativo in modulo minore di 1, dato da $(1 - |\Gamma|^2)$, con Γ coefficiente di riflessione in corrispondenza della sezione iniziale dell'antenna. Nell'ipotesi di struttura uniforme, essendo $P(L) = P(0) e^{-2\alpha L}$, si ha $\eta_r = 1 - e^{-2\alpha L}$.

L'efficienza di radiazione è di solito un parametro fissato in sede di progetto, considerando, alla frequenza centrale di funzionamento del dispositivo, una lunghezza L dell'antenna tale che all'uscita della stessa circa il 90% della potenza in ingresso sia stata irradiata, ed il restante 10% dissipato nel carico adattato. In genere, per efficienze di questo tipo, la lunghezza L di un'antenna ad onda leaky è dell'ordine di $20 \lambda_o \div 100 \lambda_o$.

Sempre nell'ipotesi di struttura uniforme, è facile ricavare una relazione fra la lunghezza dell'antenna e l'attenuazione. Infatti dall'ultima espressione per η_r si ricava:

$$1 - \eta_r = e^{-2\alpha L} \quad \ln(1 - \eta_r) = -2\alpha L \quad \Rightarrow \quad L = -\frac{\ln(1 - \eta_r)}{2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{\lambda_o} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\ln(1 - \eta_r)}{\frac{\alpha}{k_o}} \quad (5.9)$$

Quest'ultima formula spiega perché normalmente si fissa il rendimento dell'antenna a valori dell'ordine di 0.9 o al massimo 0.95: al tendere di η_r a 1 il valore di L tende all'infinito, rendendo la lunghezza eccessiva. Per $\eta_r = 0.9$ si ottiene la formula già vista

$$\frac{L}{\lambda_o} \cong \frac{0.183}{\frac{\alpha}{k_o}}$$

Per quanto riguarda le caratteristiche di radiazione, si hanno le relazioni approssimate per la direzione di massima irradiazione ϑ_m (angolo di puntamento) e per la larghezza del fascio (lobo principale) a -3 dB, $\Delta\vartheta$:

$$\sin \vartheta_m \cong \frac{\beta}{k_o} \quad (5.10)$$

$$\Delta\vartheta \propto \frac{1}{\frac{L}{\lambda_o} \cos \vartheta_m} \quad (5.11)$$

Quest'ultima è evidentemente legata alla formula della diffrazione da una fenditura.

In particolare, nel caso di struttura uniforme, inserendo nella (5.11) la formula (5.9) per L/λ_o , si ottiene:

$$\Delta\vartheta \propto \frac{1}{\ln(1 - \eta_r) \cos \vartheta_m} \frac{\alpha}{k_o}$$

Si ottiene dunque che la larghezza del fascio è direttamente proporzionale ad α/k_o .

La larghezza del fascio a -3 dB $\Delta\vartheta$ è determinata in primo luogo dalla lunghezza L dell'apertura, ma è anche influenzata dalla distribuzione del campo all'apertura. Essa è più stretta per un campo di apertura costante e più larga per distribuzioni fortemente piccate, che però riducono l'entità dei lobi laterali. Una formula semplice di compromesso è la seguente:

$$\Delta\vartheta \cong \frac{0.91}{\frac{L}{\lambda_o} \cos \vartheta_m} \quad [\text{rad}]$$

Appare dunque l'importanza di una determinazione o di una misura di β/k_o e α/k_o per caratterizzare la struttura dal punto di vista radiativo.

Inoltre dalle formule (5.11) e (5.10) segue:

$$\Delta\vartheta \propto \frac{1}{\frac{L}{\lambda_o} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_m}} \cong \frac{1}{\frac{L}{\lambda_o} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2}}$$

D'altra parte, trascurando α rispetto a β :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k_o}\right)^2} \cong \frac{k_t}{k_o}$$

per cui si ha approssimativamente

$$\Delta\vartheta \propto \frac{1}{\frac{L}{\lambda_o} \frac{k_t}{k_o}} = \frac{2\pi}{L k_t} = \frac{\lambda_c}{L}$$

con λ_c lunghezza d'onda di cutoff. Essendo il numero d'onda trasverso k_t di una guida contenente un unico dielettrico indipendente dalla frequenza, quest'ultima formula implica che il $\Delta\vartheta$ non vari con la frequenza, e quindi non vari durante il processo di scansione in frequenza del fascio emesso dall'antenna ad onda leaky, se l'antenna stessa è fatta con un unico dielettrico. Tale proprietà è evidentemente di grande importanza in pratica.

Si ricavi ora la relazione che intercorre tra la desiderata distribuzione dell'ampiezza del campo sull'apertura $A(z)$, tale da soddisfare certi requisiti imposti sui lobi laterali, ed il corrispondente profilo di attenuazione $\alpha(z)$, in base al quale è poi necessario effettuare la sagomatura longitudinale (tapering) della struttura.

Si parta dalla formula (5.7) già vista per la potenza trasportata in guida:

$$P(z) = P(0) e^{-2 \int_0^z \alpha(z') dz'}$$

Derivando ambo i membri rispetto a z si ottiene:

$$\frac{dP(z)}{dz} = -2\alpha(z) P(z)$$

avendo supposto $\alpha(0) = 0$, ossia che il tapering parta da una sezione in corrispondenza della quale non si abbia irradiazione.

D'altra parte, in corrispondenza ad una generica sezione z , la potenza irradiata fino a quel punto, $P_r(z)$, essendo legata al flusso del vettore di Poynting attraverso l'apertura da 0 a z e quindi al modulo quadro del campo, come visto in precedenza, si potrà porre:

$$P_r(z) = c \int_0^z A^2(z') dz' \quad (5.12)$$

con c costante di proporzionalità. Derivando si ottiene:

$$\frac{dP_r(z)}{dz} = c A^2(z)$$

essendo $A(0) = 0$ per quanto detto precedentemente.

Poiché il tasso (*rate*) di variazione della potenza irradiata, nell'ipotesi di assenza di perdite di altro genere, deve risultare uguale ed opposto a quello della potenza trasportata, si ottiene:

$$-2\alpha(z) P(z) = \frac{dP(z)}{dz} = -c A^2(z)$$

ossia, integrando sugli intervalli $(0, L)$ e (z, L) :

$$P(L) - P(0) = -c \int_0^L A^2(z') dz' \quad (5.13a)$$

$$P(L) - P(z) = -c \int_z^L A^2(z') dz' \quad (5.13b)$$

D'altra parte

$$P(z) = \frac{c A^2(z)}{2 \alpha(z)}$$

e sostituendo nella (5.13b):

$$P(L) - \frac{c A^2(z)}{2 \alpha(z)} = -c \int_z^L A^2(z') dz'$$

Dividendo per la costante c si ha

$$\frac{A^2(z)}{2 \alpha(z)} = \int_z^L A^2(z') dz' + \frac{P(L)}{c} \implies \alpha(z) = \frac{1}{2} \frac{A^2(z)}{\int_z^L A^2(z') dz' + \frac{P(L)}{c}}$$

Peraltro dall'equazione (5.13a) si può ricavare la costante c :

$$c = \frac{P(0) - P(L)}{\int_0^L A^2(z') dz'}$$

ottenendo infine per l'attenuazione:

$$\alpha(z) = \frac{1}{2} \frac{A^2(z)}{\int_z^L A^2(z') dz' + \frac{P(L)}{P(0) - P(L)} \int_0^L A^2(z') dz'}$$

Nel caso di perdite per sola radiazione, si era visto che (vedi (5.8)):

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{P(0) - P(L)}{P(0)} \implies \\ \frac{1}{\eta_r} &= \frac{P(0)}{P(0) - P(L)} \implies \frac{1}{\eta_r} - 1 = \frac{P(0) - P(0) + P(L)}{P(0) - P(L)} = \frac{P(L)}{P(0) - P(L)} \implies \\ \alpha(z) &= \frac{1}{2} \frac{A^2(z)}{\int_z^L A^2(z') dz' + \left(\frac{1}{\eta_r} - 1 \right) \int_0^L A^2(z') dz'} \end{aligned}$$

Un'espressione alternativa si può ottenere osservando che:

$$\begin{aligned} \int_z^L A^2(z') dz' &= \int_0^L A^2(z') dz' - \int_0^z A^2(z') dz' \implies \\ \alpha(z) &= \frac{1}{2} \frac{A^2(z)}{\frac{1}{\eta_r} \int_0^L A^2(z') dz' - \int_0^z A^2(z') dz'} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Su queste relazioni si basa la procedura di tapering. A fronte della necessaria variazione della costante di attenuazione α , occorrerebbe mantenere il più possibile invariato il valore della costante di fase β , ossia dell'angolo di puntamento, in modo che tutte le sezioni irradiano nella stessa direzione.

Dalle considerazioni precedenti appare evidente l'importanza di disporre in fase di progetto di un parametro geometrico regolando il quale si ottenga un'ampia variazione di α , mentre il β resti pressoché costante. Variando longitudinalmente tale parametro si effettuerà il tapering.

Una tale indipendenza della costante di attenuazione da quella di fase si potrà ottenere in pratica solo approssimativamente ed il diagramma di radiazione ottenuto risulterà solitamente distorto rispetto a quello desiderato. Per minimizzare questo scostamento si può procedere ad un ulteriore passo di ottimizzazione, sfruttando un secondo parametro geometrico rispetto al quale sia minima la variazione di α e massima quella di β , in modo da compensare l'errore di fase, ossia appunto le variazioni della costante di fase (e dell'angolo di puntamento) lungo l'antenna.

5.5.1 Estensione al caso di presenza di perdite nei materiali

Nella situazione reale di presenza di perdite, la costante di attenuazione sarà data da due contributi: $\alpha = \alpha_r + \alpha_d$, ove α_d è dovuta alle dissipazioni nei materiali (eventuali dielettrici e conduttori) e α_r alla radiazione. Nell'ipotesi di piccole perdite si può pensare valida la sovrapposizione degli effetti (tecnica perturbativa).

Se ora si vuole estendere a questa situazione la procedura di tapering, è ragionevole supporre che α_d non vari lungo z . Si può allora scrivere:

$$P(z) = P(0) e^{-2 \int_0^z [\alpha_d + \alpha_r(z')] dz'} \quad (5.15)$$

Il rate di variazione della potenza trasportata lungo la guida (negativo) si può esprimere ora attraverso la somma di due contributi, come:

$$\frac{dP(z)}{dz} = \left(\frac{dP}{dz} \right)_d + \left(\frac{dP}{dz} \right)_r = -2 \alpha_d P(z) - 2 \alpha_r(z) P(z)$$

Per la potenza irradiata dall'antenna nel tratto $[0, z]$ vale ancora la (5.12):

$$P_r(z) = c \int_0^z A^2(z') dz'$$

ed il suo rate di variazione (positivo) è uguale ed opposto al contributo dovuto alle perdite per radiazione nella formula precedente, per cui:

$$\frac{dP_r(z)}{dz} = c A^2(z) = 2 \alpha_r(z) P(z) \implies \frac{dP(z)}{dz} + 2 \alpha_d P(z) = -c A^2(z) \quad (5.16)$$

equazione differenziale lineare non omogenea, a coefficienti costanti.

Per risolverla è sufficiente moltiplicare i due membri per $e^{2\alpha_d z}$, ottenendo

$$\frac{d}{dz} [P(z) e^{2\alpha_d z}] = -c A^2(z) e^{2\alpha_d z}$$

dalla quale, integrando i due membri fra 0 e z :

$$\begin{aligned} P(z) e^{2\alpha_d z} - P(0) &= -c \int_0^z A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz' \implies \\ P(z) &= \left[P(0) - c \int_0^z A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz' \right] e^{-2\alpha_d z} \end{aligned} \quad (5.17)$$

D'altra parte, per l'efficienza di radiazione si può scrivere:

$$\eta_r = \frac{P_r(L)}{P(0)} = \frac{c}{P(0)} \int_0^L A^2(z') dz' \implies \quad (5.18)$$

$$P(0) = \frac{c}{\eta_r} \int_0^L A^2(z') dz' \quad (5.19)$$

che sostituita nella precedente espressione (5.17) di $P(z)$ fornisce:

$$P(z) = \left[\frac{1}{\eta_r} \int_0^L A^2(z') dz' - \int_0^z A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz' \right] c e^{-2\alpha_d z}$$

Pertanto, dalla formula (5.16) per dP_r/dz segue

$$\alpha_r(z) = \frac{c A^2(z)}{2 P(z)}$$

e, in definitiva:

$$\alpha_r(z) = \frac{1}{2} \frac{A^2(z) e^{2\alpha_d z}}{\frac{1}{\eta_r} \int_0^L A^2(z') dz' - \int_0^z A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz'} \quad (5.20)$$

Nel caso $\alpha_d = 0$ si riottiene evidentemente la (5.14) precedentemente vista.

Per il calcolo dell'efficienza, dalla (5.17)

$$P(L) = \left[P(0) - c \int_0^L A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz' \right] e^{-2\alpha_d L}$$

dividendo per $P(0)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{2\alpha_d L} \frac{P(L)}{P(0)} &= 1 - \frac{c}{P(0)} \int_0^L A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz' \implies \\ P(0) &= \frac{c \int_0^L A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz'}{1 - \frac{P(L)}{P(0)} e^{2\alpha_d L}} = \frac{c \int_0^L A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz'}{1 - e^{-2 \int_0^L \alpha_r(z') dz'}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

avendo usato nell'ultimo passaggio la (5.15):

$$\frac{P(L)}{P(0)} = e^{-2 \int_0^L [\alpha_d + \alpha_r(z')] dz'}$$

Si ha infine dalle (5.18) e (5.21):

$$\eta_r = \left[1 - e^{-2 \int_0^L \alpha_r(z') dz'} \right] \frac{\int_0^L A^2(z') dz'}{\int_0^L A^2(z') e^{2\alpha_d z'} dz'}$$

Nel caso di antenna uniforme in presenza di perdite intrinseche, la distribuzione d'apertura (decrescente esponenzialmente) è del tipo

$$A(z) = \begin{cases} A e^{-(\alpha_r + \alpha_d)z} & \text{per } 0 \leq z \leq L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e dalla formula precedente si ottiene, risolvendo gli integrali:

$$\eta_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_d + \alpha_r} [1 - e^{-2(\alpha_d + \alpha_r)L}] \quad (5.22)$$

Un'espressione alternativa per η_r in cui non compaia la distribuzione di ampiezza si può ottenere nel modo seguente.

$$\eta_r = \frac{P_r(L)}{P(0)} = \frac{1}{P(0)} \int_0^L \frac{dP_r(z)}{dz} dz$$

Per la (5.16) e per la (5.15) risulta:

$$\int_0^L \frac{2\alpha_r(z) P(z)}{P(0)} dz = \int_0^L 2\alpha_r(z) e^{-2 \int_0^z [\alpha_r(z') + \alpha_d] dz'} dz$$

Nel caso di struttura uniforme (α_r costante) si ritrova ancora l'espressione appena vista (5.22).

Se si assume infine anche α_d variabile con z , l'equazione differenziale da risolvere diventa a coefficienti variabili:

$$\frac{dP(z)}{dz} + 2\alpha_d(z)P(z) = -cA^2(z)$$

In questo caso si risolve moltiplicando ambo i membri per $e^{2\int_0^z \alpha_d(z') dz'}$, ottenendo:

$$\frac{d}{dz} \left[P(z) e^{2\int_0^z \alpha_d(z') dz'} \right] = -cA^2(z) e^{2\int_0^z \alpha_d(z') dz'}$$

Integrando i due membri fra 0 e z si ha:

$$P(z) e^{2\int_0^z \alpha_d(z') dz'} - P(0) = -c \int_0^z A^2(z') e^{2\int_0^{z'} \alpha_d(z'') dz''} dz'$$

Peraltro è comunque sempre vera la (5.19):

$$P(0) = \frac{c}{\eta_r} \int_0^L A^2(z') dz'$$

da cui:

$$P(z) = \left[\frac{1}{\eta_r} \int_0^L A^2(z') dz' - \int_0^z A^2(z') e^{2\int_0^{z'} \alpha_d(z'') dz''} dz' \right] c e^{-2\int_0^z \alpha_d(z') dz'}$$

e dalla (5.16):

$$\alpha_r(z) = \frac{cA^2(z)}{2P(z)}$$

si ricava

$$\alpha_r(z) = \frac{1}{2} \frac{A^2(z) e^{2\int_0^z \alpha_d(z') dz'}}{\frac{1}{\eta_r} \int_0^L A^2(z') dz' - \int_0^z A^2(z') e^{2\int_0^{z'} \alpha_d(z'') dz''} dz'}$$

Per il caso α_d costante si ritorna all'espressione precedente (5.20).

Capitolo 6

Scattering elettromagnetico

Tutto in natura si modella secondo la sfera, il cono ed il cilindro.

(Paul Cézanne)

6.1 Scattering di un'onda piana da cilindro indefinito perfettamente conduttore. Incidenza normale

Si tratta di uno dei pochi problemi canonici di diffusione (*scattering*) o diffrazione, per i quali è disponibile una soluzione analitica in forma chiusa o almeno, come vedremo, sotto forma di una serie (altri esempi sono la diffrazione da semipiano e la diffrazione da una sfera). Questi problemi dunque sono anche importanti come banchi di prova (*benchmarks*) per metodi numerici che risultano molto più generali, potendosi applicare ad ostacoli di configurazione arbitraria.

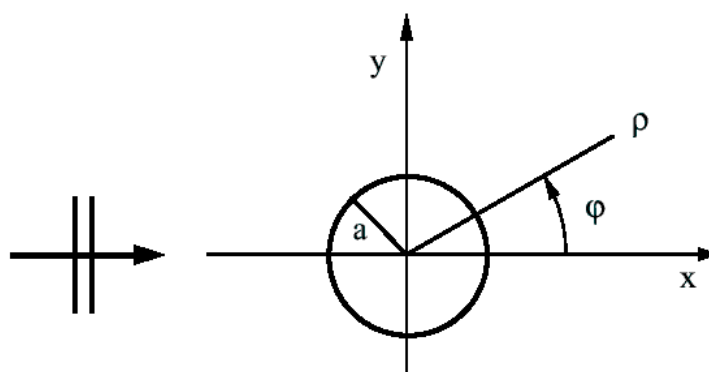


Figura 6.1: scattering di onda piana da cilindro indefinito perfettamente conduttore, incidenza normale.

Si consideri un'onda piana uniforme che incida normalmente all'asse (z) del cilindro perfettamente conduttore. Il campo incidente è quindi indipendente da z . Si può dimostrare che la polarizzazione più generale (polarizzazione ellittica) è esprimibile come la sovrapposizione di un caso di polarizzazione E (campo elettrico parallelo all'asse del cilindro) o $\text{TM}^{(z)}$, e di un altro di polarizzazione H (campo magnetico parallelo all'asse del cilindro) o $\text{TE}^{(z)}$.

Il campo totale sarà espresso, come in tutti i problemi di scattering, dalla somma del campo incidente (definito come quello che ci sarebbe se l'ostacolo non ci fosse) e del campo scatterato o diffuso o diffratto, dovuto alla presenza dell'ostacolo.

Per la simmetria del problema anche il campo scatterato (elettrico nel caso di polarizzazione E , magnetico per polarizzazione H) sarà diretto lungo z e non dipenderà da z , ed il problema si presenta di fatto in forma scalare e indipendente da z (problema bidimensionale). Sempre per la simmetria, il campo scatterato dovrà assumere a grande distanza la struttura di un'onda cilindrica uscente (non necessariamente isotropa), e quindi dovrà dipendere dalla distanza ϱ come

$$\frac{e^{-jk\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \quad k \equiv k_t$$

ove con k_t si è al solito indicato il numero d'onda trasverso rispetto all'asse z .

6.1.1 Caso di polarizzazione E o $\text{TM}^{(z)}$

Per trovare la soluzione conviene esprimere il campo elettrico incidente $E_z^i \equiv E^i$ (il campo magnetico invece avrà componenti H_ϱ^i e H_φ^i) mediante uno sviluppo in serie di Fourier bilatera rispetto all'angolo φ , con periodo 2π : φ è l'angolo tra la direzione di incidenza (presa per semplicità come asse x , cfr. Fig. 6.1) e quella di osservazione. Dovrà allora aversi:

$$\underline{E}^i = E_z^i(x) \underline{z}_o = E^i(x) \underline{z}_o$$

con

$$E^i(x) = E_o e^{-jkx} = E^i(\varrho, \varphi) = E_o e^{-jk\varrho \cos \varphi} = E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(\varrho) e^{jn\varphi}$$

ove i coefficienti di Fourier (che dipenderanno in generale da ϱ) sono dati da

$$a_n(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jk\varrho \cos \varphi} e^{-jn\varphi} d\varphi$$

A questo punto si può utilizzare la nota rappresentazione integrale delle funzioni di Bessel di prima specie J_n , sempre ricorrenti in problemi in coordinate cilindriche:

$$J_n(z) = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jz \cos \varphi} e^{jn\varphi} d\varphi \quad \implies \quad 2\pi j^n J_n(z) = \int_0^{2\pi} e^{jz \cos \varphi} e^{jn\varphi} d\varphi$$

Dal confronto degli integrali segue:

$$2\pi a_n(\varrho) = 2\pi j^{-n} J_{-n}(-k\varrho)$$

Essendo per le note proprietà di parità delle funzioni cilindriche

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (\text{parità rispetto all'ordine, vale anche per le funzioni di Bessel di } 2^a \text{ specie } Y_n, \text{ nonché per le}) \quad (6.1)$$

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z) \quad (\text{parità rispetto all'argomento, vale solo per la } J_n) \quad (6.2)$$

segue che

$$a_n(\varrho) = j^{-n} (-1)^n (-1)^n J_n(k\varrho) = j^{-n} J_n(k\varrho) \implies$$

$$E^i = E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(k\varrho) e^{jn\varphi}$$

Si può vedere, tra l'altro, in modo analogo che per un'onda incidente viaggiante nel verso opposto si avrebbe

$$E^i = E_o e^{jkx} = E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{+n} J_n(k\varrho) e^{jn\varphi}$$

Si osservi che era ragionevole supporre che nell'espressione del campo incidente fossero coinvolte le funzioni J_n e non le Y_n , perché il campo si deve mantenere finito per $\varrho = 0$, mentre le Y_n , come è noto, divergono nell'origine. Si noti infatti che il campo incidente è il campo in assenza del cilindro, quindi esiste anche per $\varrho = 0$.

Anche il campo scatterato, che si può pensare generato dalle correnti superficiali indotte dal campo incidente sulla superficie del cilindro perfettamente conduttore, si può scrivere come una serie di Fourier del tipo:

$$E^s(\varrho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\varrho) e^{jn\varphi}$$

Le funzioni $c_n(\varrho) e^{jn\varphi}$ devono essere soluzioni dell'equazione di Helmholtz omogenea scritta in coordinate cilindriche, la quale, separando le variabili, dà luogo, come è noto, all'equazione differenziale di Bessel di ordine n per quanto riguarda la dipendenza radiale. Poiché stiamo considerando un campo che si espande in una regione illimitata, si tratterà di funzioni di Hankel di seconda specie (avendo assunto una dipendenza dal tempo del tipo $e^{j\omega t}$) di ordine n . Ricordiamo che si aveva (nel caso più generale con ν complesso, z complesso)

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + j Y_\nu(z) \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - j Y_\nu(z)$$

per cui si può scrivere

$$E^s(\varrho, \varphi) = E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k\varrho) e^{jn\varphi}$$

dove ora i coefficienti c_n sono delle costanti ed il termine j^{-n} e l'ampiezza E_o sono stati inseriti per uniformare l'espressione a quella del campo incidente, il che implica semplicemente una ridefinizione dei coefficienti stessi. Si noti che l'espressione del campo scatterato è un'onda cilindrica in generale anisotropa (dipendenza da φ).

La somma di E^i ed E^s , cioè il campo totale, che è tangenziale al cilindro, deve annullarsi in tutti i punti della superficie del cilindro perfettamente conduttore, cioè per $\varrho = a$. In virtù dell'ortogonalità (che come è noto implica l'indipendenza lineare) delle funzioni esponenziali fra 0 e 2π , espressa dalla nota relazione

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jm\varphi} e^{-jn\varphi} d\varphi = \delta_{mn}$$

(si tratta di un prodotto scalare sui complessi), si può imporre la condizione di annullamento termine a termine e si ottiene:

$$J_n(ka) + c_n H_n^{(2)}(ka) = 0, \quad \forall n \quad \implies \quad c_n = -\frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}$$

Questi coefficienti rappresentano la cosiddetta espansione in multipoli (come viene detta a volte in letteratura) del campo. Una volta determinato il campo elettrico totale, il campo magnetico si può ricavare dalla prima equazione di Maxwell.

Tenendo conto delle proprietà (6.1) di parità rispetto all'ordine (che valgono come già visto anche per $H_n^{(2)}$) si vede che $c_n = c_{-n}$: quindi la serie di Fourier del campo scatterato è in realtà una serie unilatera di coseni [per le stesse proprietà, ed essendo inoltre $j^{-n} = (-j)^n = (-1)^n j^n \Rightarrow j^n = (-1)^n j^{-n}$]. L'espressione del campo scatterato è infatti la seguente:

$$\begin{aligned} E^s(\varrho, \varphi) &= E_o \left[c_o H_o^{(2)}(k\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k\varrho) e^{jn\varphi} + \sum_{n=-1}^{-\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k\varrho) e^{jn\varphi} \right] = \\ &= E_o \left\{ c_o H_o^{(2)}(k\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[j^{-n} H_n^{(2)}(k\varrho) e^{jn\varphi} + j^n H_{-n}^{(2)}(k\varrho) e^{-jn\varphi} \right] \right\} = \\ &= E_o \left[c_o H_o^{(2)}(k\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n j^{-n} H_n^{(2)}(k\varrho) 2 \cos(n\varphi) \right] = \\ &= E_o \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n c_n j^{-n} H_n^{(2)}(k\varrho) \cos(n\varphi) \end{aligned}$$

avendo indicato con ϵ_n il cosiddetto simbolo di Neumann, uguale a 1 se $n = 0$, uguale a 2 se $n > 0$.

Consideriamo ora la forma asintotica della soluzione precedente per grandi ϱ (rispetto a λ , $k\varrho \gg 1$), ossia in condizioni di campo (scatterato) lontano. Si ricordi l'espressione asintotica della $H_\nu^{(2)}(z)$ per grandi valori dell'argomento in modulo (si riportano anche per completezza, e perché illuminanti, le espressioni asintotiche delle altre funzioni di Bessel, nonché delle funzioni di Bessel modificate I_ν e K_ν , soluzioni dell'equazione di Bessel modificata e legate alle funzioni di Bessel e di Hankel di argomento immaginario puro):

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[j \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] & H_\nu^{(2)}(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[-j \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ J_\nu(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) & Y_\nu(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ I_\nu(z) &\cong \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} e^z & K_\nu(z) &\cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \end{aligned}$$

(ν, z in generale complessi). Queste espressioni mettono in risalto il carattere di onde cilindriche progressive delle $H^{(1)}$ e $H^{(2)}$ e quello di onde cilindriche stazionarie delle J e Y . Valgono infine le relazioni:

$$J_n(-jz) = (-j)^n I_n(z) \qquad H_n^{(2)}(-jz) = \frac{2}{\pi} j^{n+1} K_n(z)$$

Si ha allora per il campo scatterato:

$$\begin{aligned} E^s(\varrho, \varphi) &\cong E_o \sqrt{\frac{2}{\pi k \varrho}} e^{-j(k\varrho - \pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n c_n j^{-n} e^{jn\pi/2} \cos(n\varphi) = \\ &= \frac{E_o}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}} e^{-j(k\varrho - \pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n c_n \cos(n\varphi) \qquad k\varrho \gg 1 \end{aligned}$$

essendo $e^{jn\pi/2} = (e^{j\pi/2})^n = j^n$. Si noti che in campo lontano si è verificata la separazione fra la dipendenza radiale e quella angolare. In particolare la serie dei coseni rappresenta il cosiddetto diagramma di scattering, analogo al diagramma di radiazione di un'antenna.

La soluzione analitica rigorosa ottenuta è in forma di serie, quindi occorrerà un troncamento per il suo effettivo calcolo numerico. La convergenza della serie può essere più o meno veloce, secondo l'andamento dei coefficienti complessi c_n . Calcolandoli numericamente in modulo in funzione del raggio normalizzato del cilindro ka , si hanno i risultati riportati in Tab. 6.1. Come si vede, i coefficienti c_n decrescono in modulo tanto più lentamente quanto più grande è ka . In pratica il calcolo numerico della serie diventa già molto lento quando il raggio del cilindro è dell'ordine di 10λ .

Si consideri ora la soluzione nel caso particolare, di notevole importanza, di cilindro filiforme, ossia $ka \ll 1$. In tale ipotesi si vede che l'onda diffratta diventa isotropa. Per analizzare i coefficienti sono utili stavolta le note espressioni delle funzioni di Bessel per

ka	.1	.2	1	5
n				
0	5.451 E-1	6.754 E-1	9.934 E-1	4.989 E-1
1	7.731 E-3	2.992 E-2	4.908 E-1	9.114 E-1
2	9.785 E-6	1.550 E-4	6.944 E-2	1.256 E-1
3		2.598 E-7	3.361 E-3	9.282 E-1
4			7.442 E-5	8.976 E-1
5			9.591 E-7	4.989 E-1
6				1.802 E-1
7				4.223 E-2
8				6.525 E-3
9				7.110 E-4
10				5.841 E-5

Tabella 6.1: modulo dei coefficienti di scattering in polarizzazione E .

piccoli valori in modulo dell'argomento (z complesso, n intero):

$$J_n(z) \cong \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad n \geq 0$$

$$Y_n(z) \cong \frac{2}{\pi} \ln\left(\gamma \frac{z}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma'\right] \quad Y_n(z) \cong -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^n \quad n \geq 1$$

con $\gamma \cong 1.781$ costante di Eulero e $\gamma' = \ln \gamma \cong 0.5772$. Inserendo queste nell'espressione dei coefficienti si ha:

$$c_o = -\frac{J_o(ka)}{J_o(ka) - j Y_o(ka)} \cong -\frac{J_o(ka)}{-j Y_o(ka)} \cong -j \frac{\pi}{2 \ln\left(\gamma \frac{ka}{2}\right)}$$

(essendo Y_o il termine dominante a denominatore, visto che l'argomento è piccolo)

$$c_n \cong -j \frac{J_n(ka)}{Y_n(ka)} \cong j \frac{1}{n!} \left(\frac{ka}{2}\right)^n \frac{\pi}{(n-1)!} \left(\frac{ka}{2}\right)^n = j \pi n \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{ka}{2}\right)^n\right]^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

Dalle espressioni dei coefficienti deriva che se ka è piccolo ($ka \ll 1$) si può conservare nella serie del campo scatterato il solo termine di ordine zero (perché qualsiasi potenza è più veloce nell'andare a zero dell'inverso del logaritmo) e scrivere:

$$E^s(\varrho, \varphi) \cong E^s(\varrho) = E_o c_o H_o^{(2)}(k\varrho) \cong E_o \frac{-j\pi}{2 \ln\left(\gamma \frac{ka}{2}\right)} H_o^{(2)}(k\varrho) \quad ka \ll 1$$

Questa è un'onda che non dipende da φ (isotropa, diagramma di scattering costante), e nel campo lontano si avrà, riprendendo l'espressione asintotica per grandi argomenti della funzione $H_o^{(2)}$:

$$E^s(\varrho) \cong E_o \frac{-j e^{j\pi/4}}{2 \ln \left(\gamma \frac{k a}{2} \right)} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}} e^{-jk\varrho} = E_o \frac{e^{-j\pi/4}}{2 \ln \left(\gamma \frac{k a}{2} \right)} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}} e^{-jk\varrho} \quad k a \ll 1, \quad k \varrho \gg 1$$

6.1.2 Caso di polarizzazione H o $TE^{(z)}$

In questo caso è il vettore $\underline{H}$ ad essere parallelo all'asse del cilindro. Per i campi magnetici incidente e diffratto si potranno scrivere degli sviluppi analoghi al caso TM, ossia del tipo:

$$\underline{H}^i = H_z^i(x) \underline{z}_o = H^i(x) \underline{z}_o$$

con

$$H^i(x) = H_o e^{-jkx} = H^i(\varrho, \varphi) = H_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(k\varrho) e^{jn\varphi}$$

$$H^s(\varrho, \varphi) = H_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k\varrho) e^{jn\varphi}$$

Occorre ora ugualmente imporre l'annullamento della componente tangenziale del campo elettrico totale sulla superficie del cilindro. Si parta dalla seconda equazione di Maxwell (in mezzi privi di perdite) scritta per punti esterni al cilindro (quindi omogenea per il campo totale):

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E}$$

Si ricordi ancora l'espressione del rotore di un generico vettore $\underline{A}$ in coordinate curvilinee ortogonali generalizzate q_1, q_2, q_3 con versori $\underline{q}_{10}, \underline{q}_{20}, \underline{q}_{30}$ e coefficienti metrici h_1, h_2, h_3 (cfr. Campi I):

$$\nabla \times \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \underline{q}_{10} & h_2 \underline{q}_{20} & h_3 \underline{q}_{30} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Il fattore moltiplicativo si può portare dentro il determinante, dividendo ad esempio per $h_1 h_2 h_3$ la prima riga della matrice. Si ricordi che, in particolare, in coordinate cilindriche

si ha $h_1 = 1$, $h_2 = \varrho$, $h_3 = 1$. Per cui:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H} &= \begin{vmatrix} \underline{\varrho}_o & \underline{\varphi}_o & \underline{z}_o \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\varrho & \varrho H_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\varrho}_o & \underline{\varphi}_o & \underline{z}_o \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\underline{\varrho}_o}{\varrho} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \underline{\varphi}_o \frac{\partial H}{\partial \varrho} = j\omega\varepsilon (E_\varrho \underline{\varrho}_o + E_\varphi \underline{\varphi}_o) \end{aligned}$$

da cui

$$E_\varrho = \frac{1}{j\omega\varepsilon \varrho} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad E_\varphi = \frac{j}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial \varrho}$$

In particolare qui si utilizza la seconda relazione, poiché occorrono le componenti tangenziali.

Imponendo che E_φ^{tot} vada a zero per $\varrho = a$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{j}{\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial H^i}{\partial \varrho} + \frac{\partial H^s}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=a} &= 0 \\ H_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} k J'_n(k a) e^{jn\varphi} + H_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n k H_n^{(2)'}(k a) e^{jn\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

dove l'apice indica come di consueto la derivata rispetto all'intero argomento. Per l'ortogonalità delle funzioni esponenziali segue:

$$J'_n(k a) + c_n H_n^{(2)'}(k a) = 0 \quad \implies \quad c_n = -\frac{J'_n(k a)}{H_n^{(2)'}(k a)}$$

Per $n \neq 0$, dalle relazioni di parità rispetto all'ordine (6.1) risulta:

$$J'_{-n} = (-1)^n J'_n \quad H_{-n}^{(2)'} = (-1)^n H_n^{(2)'}$$

per cui $c_{-n} = c_n$ (come avveniva per la polarizzazione E).

Si sfruttano ora le espressioni per le relazioni di ricorrenza, valide in generale per funzioni cilindriche $C_\nu(z)$, soluzioni dell'equazione di Bessel di ordine ν , cioè per arbitrarie combinazioni lineari delle funzioni di Bessel e di Hankel di ordine ν . In proposito è interessante notare che la coppia delle relazioni di ricorrenza definisce proprio le funzioni cilindriche, e in questo senso esiste un parallelismo fra l'equazione differenziale del secondo ordine di Bessel e la coppia di relazioni di ricorrenza:

$$C_{\nu-1}(z) - C_{\nu+1}(z) = 2 C'_\nu(z) \quad (6.3)$$

$$C_{\nu-1}(z) + C_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} C_\nu(z) \quad (6.4)$$

con ν, z complessi.

La prima relazione di ricorrenza può essere utilizzata per il calcolo (analitico e numerico) delle derivate delle funzioni cilindriche, note le funzioni stesse, la seconda è impiegabile per il calcolo ricorsivo delle funzioni cilindriche (la ricorrenza è utilizzabile in linea di principio in entrambi i versi, per ordini crescenti o decrescenti, ma non è detto che la procedura numerica sia in entrambi i casi stabile¹). Si noti che sottraendo e sommando le due relazioni di ricorrenza (6.3) e (6.4), si ottiene questa coppia alternativa (utilizzabile ancora per il calcolo delle derivate):

$$C'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} C_\nu(z) - C_{\nu+1}(z) \quad (6.5)$$

$$C'_\nu(z) = -\frac{\nu}{z} C_\nu(z) + C_{\nu-1}(z) \quad (6.6)$$

Dalla relazione di ricorrenza (6.5) si ricava, per $\nu = 0$

$$J'_0(z) = -J_1(z) \quad Y'_0(z) = -Y_1(z)$$

da cui

$$c_o = -\frac{J_1(ka)}{J_1(ka) - j Y_1(ka)}$$

che nell'ipotesi di cilindro filiforme ($ka \ll 1$) diventa (trascurando ancora una volta la J_1 a denominatore e riprendendo le espressioni delle funzioni di Bessel per piccoli argomenti)

$$c_o \cong -\frac{\frac{ka}{2}}{-j \left(-\frac{1}{\pi}\right) \frac{2}{ka}} = j\pi \left(\frac{ka}{2}\right)^2$$

Considerando adesso valori positivi di n , dalla relazione di ricorrenza (6.3) si ottiene:

$$c_n = -\frac{J_{n-1}(ka) - J_{n+1}(ka)}{J_{n-1}(ka) - J_{n+1}(ka) - j[Y_{n-1}(ka) - Y_{n+1}(ka)]} \quad (6.7)$$

Si osservi che per piccoli ka il termine dominante a numeratore dell'espressione dei c_n è quello con l'ordine più piccolo, cioè J_{n-1} , mentre a denominatore prevalgono le Y , e tra esse il termine con l'ordine più grande, cioè Y_{n+1} . Si ha allora:

$$c_n \cong -\frac{J_{n-1}(ka)}{j Y_{n+1}(ka)} \cong j \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{ka}{2}\right)^{n-1} \left(-\frac{\pi}{n!}\right) \left(\frac{ka}{2}\right)^{n+1} = -j\pi n \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{ka}{2}\right)^n\right]^2$$

¹In particolare si trova che la stabilità si verifica solo nel verso decrescente. Questo significa che nel verso crescente si possono calcolare con sicurezza solo le Y_n , in virtù del loro comportamento asintotico, ma non le J_n .

con $n = 1, 2, 3, \dots$. In particolare si ricava che:

$$c_1 (= c_{-1}) \cong -j\pi \left(\frac{ka}{2} \right)^2 \cong -c_o$$

Si noti che, contrariamente al caso di polarizzazione E , c_o e $c_{\pm 1}$ hanno lo stesso modulo, mentre i c_n con $|n| > 1$ risultano trascurabili. Dunque nel caso di polarizzazione H bisogna, anche nell'ipotesi filiforme, prendere in considerazione non solo l'ordine zero, ma anche gli ordini ± 1 . Questo porta come conseguenza l'anisotropia del campo scatterato, per il quale si ha infatti

$$\begin{aligned} H^s(\varrho, \varphi) &\cong H_o \left[c_o H_o^{(2)}(k\varrho) - j c_1 H_1^{(2)}(k\varrho) e^{j\varphi} + j c_1 H_{-1}^{(2)}(k\varrho) e^{-j\varphi} \right] = \\ &= H_o \left[c_o H_o^{(2)}(k\varrho) - j c_1 H_1^{(2)}(k\varrho) 2 \cos \varphi \right] \cong \\ &\cong H_o \left[j\pi \left(\frac{ka}{2} \right)^2 H_o^{(2)}(k\varrho) - j(-j)\pi \left(\frac{ka}{2} \right)^2 H_1^{(2)}(k\varrho) 2 \cos \varphi \right] = \\ &= H_o \pi \left(\frac{ka}{2} \right)^2 \left[j H_o^{(2)}(k\varrho) - H_1^{(2)}(k\varrho) 2 \cos \varphi \right] \quad ka \ll 1 \end{aligned}$$

Confrontando questa espressione con l'analoga per il campo elettrico diffuso in polarizzazione E si vede che, nell'ipotesi filiforme, in un fissato punto di osservazione, il rapporto tra l'ampiezza dell'onda scatterata (E^s o H^s rispettivamente) e quella dell'onda incidente (E_o o H_o) dipende dal parametro ka , e va come

$$\frac{1}{\left| \ln \left(\gamma \frac{ka}{2} \right) \right|} \quad \text{cioè come} \quad \frac{1}{|\ln(ka)|}$$

nel caso di polarizzazione E , e come $(ka)^2$ per la polarizzazione H . Questo significa che l'onda E è scatterata più intensamente dell'onda H perché, per piccoli ka

$$\frac{1}{|\ln(ka)|} \gg (ka)^2$$

Questo è poi anche il motivo per cui un allineamento (*array*) di fili perfettamente conduttori paralleli ha delle proprietà polarizzanti (è un modo per costruire un polarizzatore a microonde), in quanto lascia passare solo la polarizzazione H , mentre un reticolo costituito da due allineamenti di fili ortogonali fra loro, che agisce efficacemente su entrambe le polarizzazioni, ha effetti schermanti.

La ragione fisica di questa differente efficienza di scattering può ricercarsi intuitivamente nel tipo di correnti che le due polarizzazioni inducono nel conduttore filiforme (parallele all'asse per la E , e quindi libere di scorrere, e ortogonali all'asse per la H , circolari, "impedite" per così dire dalla sottigliezza del filo).

Infine nel campo lontano, usando le espressioni asintotiche per le funzioni $H_o^{(2)}$ e $H_1^{(2)}$, si ha:

$$\begin{aligned} H^s(\varrho, \varphi) &\cong H_o \pi \left(\frac{k a}{2} \right)^2 \left[j \sqrt{\frac{2}{\pi k \varrho}} e^{-j(k \varrho - \pi/4)} - \sqrt{\frac{2}{\pi k \varrho}} e^{-j(k \varrho - \pi/2 - \pi/4)} 2 \cos \varphi \right] = \\ &= -H_o \left(\frac{k a}{2} \right)^2 e^{-j\pi/4} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}} e^{-jk \varrho} (1 - 2 \cos \varphi) \quad k a \ll 1, k \varrho \gg 1 \end{aligned}$$

Come si vede il campo è anisotropo, con ampiezza massima dalla parte dell'onda incidente ($\varphi = \pi$).

6.2 Strutture cilindriche dielettriche

Si consideri ora il caso di scattering di onda piana da cilindro di materiale dielettrico perfetto immerso nel vuoto, con incidenza normale ed in polarizzazione E (Fig. 6.2). Per il campo incidente si può usare evidentemente la stessa espressione vista per il cilindro conduttore:

$$\underline{E}^i = z_o E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(k_o \varrho) e^{jn\varphi}$$

In questo caso è opportuno precisare che $k = k_o = \omega \sqrt{\mu_o \varepsilon_o}$ (si ricordi che per il campo incidente è come se l'ostacolo non ci fosse). Per il campo scatterato nel vuoto all'esterno del cilindro si può porre analogamente:

$$\underline{E}^s = z_o E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k_o \varrho) e^{jn\varphi}$$

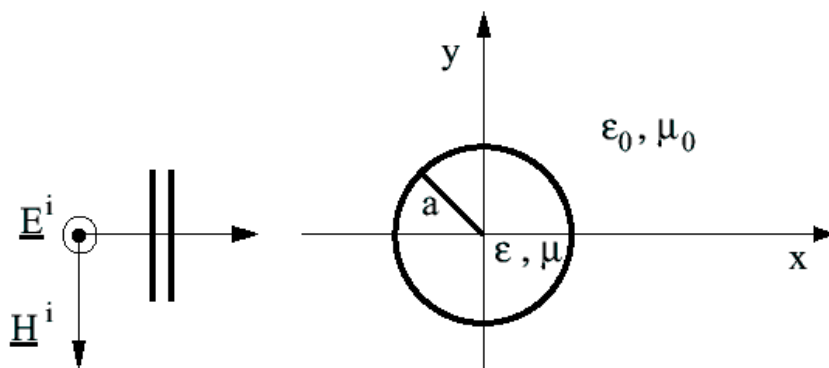


Figura 6.2: scattering di onda piana da cilindro indefinito dielettrico, incidenza normale.

In questo caso, inoltre, ci sarà anche un campo all'interno del cilindro dielettrico, che si potrà scrivere come (soluzione del tipo onda stazionaria per il campo totale):

$$\underline{E}^d = \underline{z}_o E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} a_n J_n(k_d \varrho) e^{jn\varphi}$$

ove $k_d = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$.

In questo caso occorre imporre la continuità delle componenti tangenziali di $\underline{E}$ e di $\underline{H}$ all'interfaccia, per ricavare sia i coefficienti c_n che gli a_n . Si noti che il campo incidente ora va considerato solo all'esterno per l'espressione del campo totale: la situazione è analoga al problema, in geometria cartesiana, della riflessione e rifrazione di onda piana da interfaccia piana. Per brevità si riporta solo il risultato:

$$c_n = \frac{J'_n(k_o a) J_n(k_d a) - \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} J_n(k_o a) J'_n(k_d a)}{\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} J'_n(k_d a) H_n^{(2)}(k_o a) - J_n(k_d a) H_n^{(2)'}(k_o a)}$$

$$a_n = \frac{J_n(k_o a) H_n^{(2)'}(k_o a) - J'_n(k_o a) H_n^{(2)}(k_o a)}{J_n(k_d a) H_n^{(2)'}(k_o a) - \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} J'_n(k_d a) H_n^{(2)}(k_o a)}$$

Nel caso di polarizzazione H si possono assumere espressioni analoghe per il campo magnetico, e risulta per i coefficienti (in pratica si scambiano di ruolo ε_r e μ_r):

$$c_n = \frac{J'_n(k_o a) J_n(k_d a) - \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} J_n(k_o a) J'_n(k_d a)}{\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} J'_n(k_d a) H_n^{(2)}(k_o a) - J_n(k_d a) H_n^{(2)'}(k_o a)}$$

$$a_n = \frac{J_n(k_o a) H_n^{(2)'}(k_o a) - J'_n(k_o a) H_n^{(2)}(k_o a)}{J_n(k_d a) H_n^{(2)'}(k_o a) - \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} J'_n(k_d a) H_n^{(2)}(k_o a)}$$

Un altro caso interessante nelle applicazioni è quello di un cilindro conduttore rivestito di un dielettrico (Fig. 6.3). Anche in questo caso occorre considerare il campo incidente e quello scatterato nella regione esterna e il campo trasmesso all'interno del rivestimento. Stavolta nel dielettrico vanno considerate anche le funzioni di Bessel Y_n e quindi ci saranno da determinare coefficienti aggiuntivi. L'espressione del campo nel dielettrico sarà del tipo:

$$\underline{E}^d = \underline{z}_o E_o \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} \left[a_n J_n(k_d \varrho) + b_n Y_n(k_d \varrho) \right] e^{jn\varphi}$$

Per ricavare i coefficienti a_n , b_n , c_n occorre imporre la continuità delle componenti tangenziali di $\underline{E}$ e di $\underline{H}$ all'interfaccia dielettrica, nonché l'annullamento delle componenti

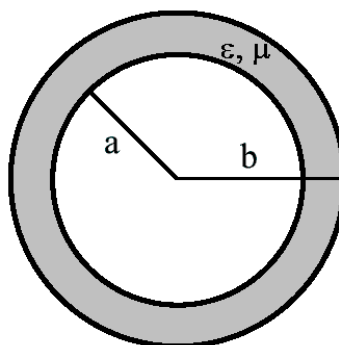


Figura 6.3: cilindro conduttore rivestito di un dielettrico.

tangenziali di $\underline{E}$ sulla superficie del conduttore. La situazione è analoga al problema, in geometria cartesiana, dell'incidenza di un'onda piana dall'alto su uno slab dielettrico su piano di massa.

Infine si può considerare il caso di un cilindro dielettrico (*core*) ricoperto di un mantello (*cladding*) dielettrico. In questo caso occorre considerare i campi incidente e scatterato all'esterno, trasmesso dentro il mantello e trasmesso nel nucleo dielettrico. Compariranno degli ulteriori coefficienti d_n . I quattro insiemi di coefficienti incogniti si possono ottenere dalle quattro condizioni di continuità delle componenti tangenziali di $\underline{E}$ e di $\underline{H}$ alle due interfacce. La situazione è simile al problema dell'incidenza di un'onda piana dall'alto su uno slab asimmetrico: il nucleo può tuttavia avere indice di rifrazione maggiore di quello del mantello.

6.3 Incidenza obliqua

È interessante osservare come le espressioni precedenti si generalizzano per il caso di incidenza obliqua. Per quanto riguarda la polarizzazione, si verifica che cilindri perfettamente conduttori, infiniti e lisci non depolarizzano l'onda incidente obliqua, cioè non introducono componenti aggiuntive nel campo scatterato rispetto a quelle del campo incidente. Non è invece così per cilindri dielettrici, o per cilindri conduttori rivestiti di dielettrico, che nel caso di incidenza obliqua introducono cross-polarizzazione (a differenza del caso di incidenza normale). Inoltre si verifica una depolarizzazione nel caso (realistico) di cilindri di lunghezza finita e se la superficie presenta corrugazioni.

Consideriamo dapprima un cilindro perfettamente conduttore, infinito e liscio, che mantiene quindi la polarizzazione, nel caso $\text{TM}^{(z)}$ (polarizzazione E). Prendiamo come piano di riferimento xz quello contenente il vettore d'onda incidente. Si ha pertanto (Fig. 6.4):

$$\underline{E}^i(x, z) = E_x^i(x, z) \underline{x}_o + E_z^i(x, z) \underline{z}_o = E_o (\underline{x}_o \cos \vartheta_i + \underline{z}_o \sin \vartheta_i) e^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$$

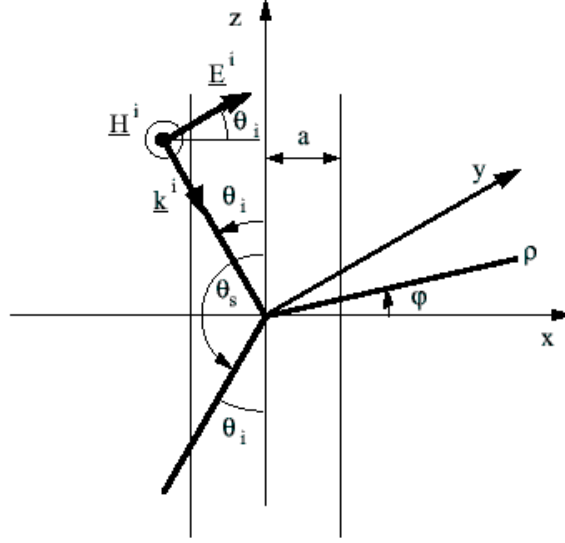


Figura 6.4: scattering di onda piana da cilindro indefinito perfettamente conduttore, incidenza obliqua.

con

$$k_x^i = k \sin \vartheta_i \quad k_z^i = -k \cos \vartheta_i$$

Come nel caso di incidenza normale, anche qui si può, per la parte dipendente da $x = \varrho \cos \varphi$, sfruttare la periodicità rispetto a φ e sviluppare in serie di Fourier la componente E_z^i :

$$E_z^i(\varrho, \varphi, z) = E_o \sin \vartheta_i e^{jk \cos \vartheta_i z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(k \varrho \sin \vartheta_i) e^{jn\varphi}$$

ove si può anche porre $k \varrho \sin \vartheta_i = k_t^i \varrho$, con $k_t^i = k_x^i = k \sin \vartheta_i$.

Per la componente lungo z del campo scatterato E_z^s si può scrivere invece:

$$E_z^s(\varrho, \varphi, z) = E_o \sin \vartheta_s e^{-jk_z^s z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k \varrho \sin \vartheta_s) e^{jn\varphi}$$

con

$$k_z^s = k \cos \vartheta_s$$

La presenza di una componente E_x^i del campo incidente darà luogo a componenti trasverse E_ϱ^i, E_φ^i . Similmente esisteranno tali componenti per il campo scatterato. Bisognerà allora imporre sulla superficie del cilindro l'annullamento non solo di E_z^{tot} , ma anche di

E_φ^{tot} : però tali relazioni risultano dipendenti, e quindi se ne può usare una sola, ad esempio quella di E_z^{tot} per coerenza con il caso precedente di incidenza normale.

Dall'applicazione della predetta condizione si ha (ponendo $\varrho = a$):

$$E_o \left[\sin \vartheta_i e^{jk \cos \vartheta_i z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(k a \sin \vartheta_i) e^{jn\varphi} + \right. \\ \left. + \sin \vartheta_s e^{-jk \cos \vartheta_s z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k a \sin \vartheta_s) e^{jn\varphi} \right] = 0$$

Questa può essere soddisfatta per ogni z a patto che

$$\sin \vartheta_s = \sin \vartheta_i \quad k_z^s = k_z^i \implies \cos \vartheta_s = -\cos \vartheta_i \implies \vartheta_s = \pi - \vartheta_i \\ c_n = -\frac{J_n(k a \sin \vartheta_i)}{H_n^{(2)}(k a \sin \vartheta_i)} = -\frac{J_n(k_i^i a)}{H_n^{(2)}(k_i^i a)}$$

(nel caso di incidenza normale con $\vartheta_i = \pi/2$ si ritrovano i valori noti), sicché il campo scatterato diviene:

$$E_z^s(\varrho, \varphi, z) = E_o \sin \vartheta_i e^{-jk_z^i z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k_i^i \varrho) e^{jn\varphi} \\ = E_o \sin \vartheta_i e^{jk \cos \vartheta_i z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} c_n H_n^{(2)}(k \varrho \sin \vartheta_i) e^{jn\varphi}$$

Si noti che, a differenza del campo incidente, il campo scatterato non giace solo nel piano xz ($\varphi = 0$), ma può spaziare per tutti gli angoli φ lungo un cono intorno al semiasse delle z negative e di semiapertura ϑ_i (analogia con i rimbalzi dei raggi in una guida dielettrica circolare, e quindi sempre in geometria cilindrica).

Dalle equazioni di Maxwell omogenee

$$\nabla \times \underline{E}^s = -j\omega\mu \underline{H}^s \\ \nabla \times \underline{H}^s = j\omega\varepsilon \underline{E}^s$$

che devono valere per il campo scatterato, si possono ricavare, a partire da E_z^s , le componenti del campo magnetico scatterato H_ϱ^s, H_φ^s ($H_z^s = 0$ essendo il caso TM^(z)) e le componenti E_ϱ^s, E_φ^s . Quindi in questo caso si ha un campo scatterato a 5 componenti, e non più a 3: questo è legato al fatto che per incidenza obliqua il problema non è più bidimensionale.

Si noti inoltre che tutte le componenti del campo hanno una dipendenza da z comune (e pari a quella del campo incidente):

$$e^{jk \cos \vartheta_i z} = e^{-jk_z z} \quad \text{con} \quad k_z = -k \cos \vartheta_i = k_z^i = k_z^s$$

In sostanza la situazione è analoga a quanto accade per i modi di propagazione in una guida circolare e si verifica che tutte le componenti del campo elettromagnetico possono ottenersi a partire dalla conoscenza di E_z .

Dualmente, nel caso $TE^{(z)}$, il campo si può ricavare dalla conoscenza di H_z . Nel caso di polarizzazione generica le componenti E_z e H_z fungono dunque da potenziali scalari (cfr. Capitolo 1).

Nell'ipotesi filiforme ($ka \ll 1$) si ottiene ancora (usando le espressioni per piccoli argomenti delle funzioni di Bessel) che l'onda scatterata in polarizzazione E è isotropa (indipendenza da φ).

Nel caso di un cilindro finito di lunghezza L i campi scatterati nel caso di incidenza obliqua si propagano in tutte le direzioni, in contrasto col caso del cilindro indefinito in cui l'energia è concentrata lungo una superficie conica, come appena visto. Tuttavia, se la lunghezza del cilindro diventa molto maggiore del suo raggio ($L \gg a$), allora l'energia sarà scatterata prevalentemente nella direzione $\vartheta_s = \pi - \vartheta_i$.

Quando la lunghezza L del cilindro è pari a multipli di mezza lunghezza d'onda, nei campi scatterati appaiono fenomeni di risonanza: tuttavia, al crescere di L oltre diverse lunghezze d'onda, tali fenomeni divengono trascurabili.

6.4 Metodo di Richmond per un allineamento di fili

Si consideri ora un allineamento (*array*) di N cilindri filiformi paralleli infinitamente lunghi e perfettamente conduttori. Questi allineamenti sono spesso usati in pratica come elementi costruttivi in luogo di strutture continue piane o curve, per ridurre il peso e la resistenza al vento (ad esempio come riflettori parabolici per antenne). Inoltre sono usati, come si vedrà, per simulare il comportamento elettromagnetico di strutture continue.

Il caso ideale di infiniti fili (o infiniti cilindri) uguali, equidistanti e disposti con gli assi paralleli fra loro e complanari, risulta più facile da studiare, perché si possono sfruttare le proprietà delle strutture periodiche (cfr. teorema di Floquet, armoniche spaziali, multipli di un certo numero d'onda). Ovviamente questa schematizzazione non è più soddisfacente se l'array analizzato ha marcate deviazioni dalla configurazione planare, se la larghezza dell'array è solo di poche lunghezze d'onda, o se la spaziatura o il raggio dei fili variano rapidamente lungo l'array.

Si può mostrare che il diagramma (*pattern*) di scattering dell'allineamento di cilindri approssima molto bene quello della corrispondente struttura continua se si prende convenientemente fitto: tali allineamenti sono dunque utili per ottenere informazioni sul comportamento di strutture cilindriche bidimensionali di forma arbitraria.

Si supponga un allineamento di cilindri nello spazio libero, con gli assi paralleli all'asse z . L'onda incidente si assume di tipo $TM^{(z)}$ (polarizzazione E), per cui, considerando il caso più generale di incidenza obliqua rispetto a z :

$$\begin{aligned} H_z^i &= 0 \\ E_z^i(x, y, z) &= E^i(x, y) e^{-jk_z z} \end{aligned}$$

In genere il campo elettrico avrà anche componenti rispetto a x ed y , ma la componente longitudinale, come si è visto, è sufficiente a determinare il campo elettromagnetico.

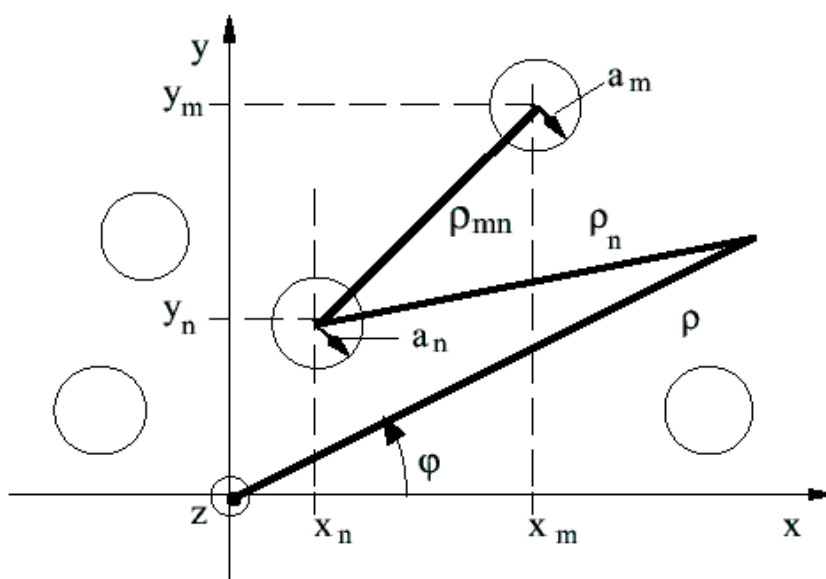


Figura 6.5: sezioni trasverse dei fili e sistema di riferimento impiegato.

L'onda incidente non è necessariamente piana, ma può essere un insieme discreto di onde piane, oppure un'onda cilindrica [generata per esempio da una cosiddetta sorgente di linea (*line source*), ossia un filo indefinito di spessore infinitesimo percorso da corrente], o comunque in generale uno spettro continuo di onde piane viaggianti in direzioni diverse (spettro angolare) e dotate della stessa polarizzazione. In effetti, come vedremo, i soli dati necessari sul campo incidente sono il suo numero d'onda lungo z , la sua frequenza (e da k_z e la frequenza si può ricavare il numero d'onda trasverso k_t), e la funzione $E^i(x, y)$ valutata sull'asse di ogni filo, $E^i(x_n, y_n)$.

La densità di corrente $\underline{J}$ indotta sulla superficie del filo n -simo di raggio a_n avrà soltanto componente longitudinale (essendo $H_z^i = 0$), e si potrà scrivere in serie di Fourier (per la solita periodicità angolare), usando coordinate cilindriche centrate sull'asse del filo stesso.

6.4.1 Campo elettrico prodotto da correnti longitudinali

Si consideri a questo punto in generale il campo elettrico prodotto da un insieme di correnti elettriche $\underline{J}$ (considerate ora come correnti impresse) dirette lungo z e con dipendenza da z del tipo $e^{-jk_z z}$.

L'equazione di Helmholtz non omogenea per il campo elettrico, valida in generale, è la seguente (cfr. Campi elettromagnetici I):

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = j\omega\mu \underline{J} - \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{J}}{j\omega\varepsilon} \quad (\underline{J}_m \equiv 0)$$

Siccome nel nostro caso $\underline{J}$ ha solo la componente lungo z , proiettiamo tale equazione lungo

l'asse z :

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_z + k^2 E_z &= \nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = \nabla_t^2 E_z + k_t^2 E_z = j\omega\mu J_z - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 J_z}{\partial z^2} = \\ &= \left(j\omega\mu + \frac{k_z^2}{j\omega\varepsilon} \right) J_z = \frac{-k^2 + k_z^2}{j\omega\varepsilon} J_z = -\frac{k_t^2}{j\omega\varepsilon} J_z = j\omega\mu \frac{k_t^2}{k^2} J_z\end{aligned}$$

Elidendo gli esponenziali che danno la dipendenza da z , si possono pensare E_z e J_z dipendenti solo da x e da y . La funzione di Green relativa a tale equazione trasversa deve soddisfare la:

$$\nabla_t^2 G(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}') + k_t^2 G(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}') = -\delta(\underline{\varrho} - \underline{\varrho}') \quad \left(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}' \text{ vettori posizione nel piano} \right. \\ \left. \text{trasverso } xy: \underline{\varrho} = \underline{r} - z \underline{z}_o \right)$$

il che equivale, a parte fattori di proporzionalità (che sarà sufficiente reintrodurre nell'integrale finale di convoluzione), a considerare una corrente filiforme (sorgente di linea) centrata in $\underline{\varrho}'$.

La soluzione di questa equazione che soddisfi la condizione di radiazione nello spazio libero (funzione di Green bidimensionale per l'equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche e per lo spazio libero) si dimostra (cfr. paragrafo 8.4.1) essere proporzionale alla funzione di Hankel del secondo tipo di ordine zero:

$$G(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}') = -\frac{j}{4} H_o^{(2)}(k_t |\underline{\varrho} - \underline{\varrho}'|)$$

Come si vede, ricordando l'espressione asintotica per grandi argomenti della funzione di Hankel, si ha un'onda cilindrica elementare, così come la funzione di Green tridimensionale per l'equazione di Helmholtz in coordinate sferiche e per lo spazio libero, già nota (cfr. Campi elettromagnetici I), risultava un'onda sferica elementare.

Nota la funzione di Green, la soluzione per il campo elettrico è data da un integrale di convoluzione bidimensionale

$$\begin{aligned}E_z(\underline{\varrho}) &= -j\omega\mu \frac{k_t^2}{k^2} \left(-\frac{j}{4} \right) \int_S H_o^{(2)}(k_t |\underline{\varrho} - \underline{\varrho}'|) J_z(\underline{\varrho}') dS' = \\ &= -\frac{\omega\mu}{4} \frac{k_t^2}{k^2} \int_S H_o^{(2)}(k_t |\underline{\varrho} - \underline{\varrho}'|) J_z(\underline{\varrho}') dS'\end{aligned}$$

Se in particolare, come nel nostro caso, J_z è in realtà una corrente superficiale J_{zs} [ampere/m] distribuita su un cilindro circolare di raggio a , si potrà scrivere

$$J_z(\underline{\varrho}') = J_z(\varrho', \varphi') = \delta(\varrho' - a) J_{zs}(\varphi') = \delta(\varrho' - a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{jn\varphi'}$$

ove si è usato il solito sviluppo in serie di Fourier rispetto all'angolo. Si noti che in questo caso la δ ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza (si ricordi che la δ ha le dimensioni fisiche dell'inverso del suo argomento).

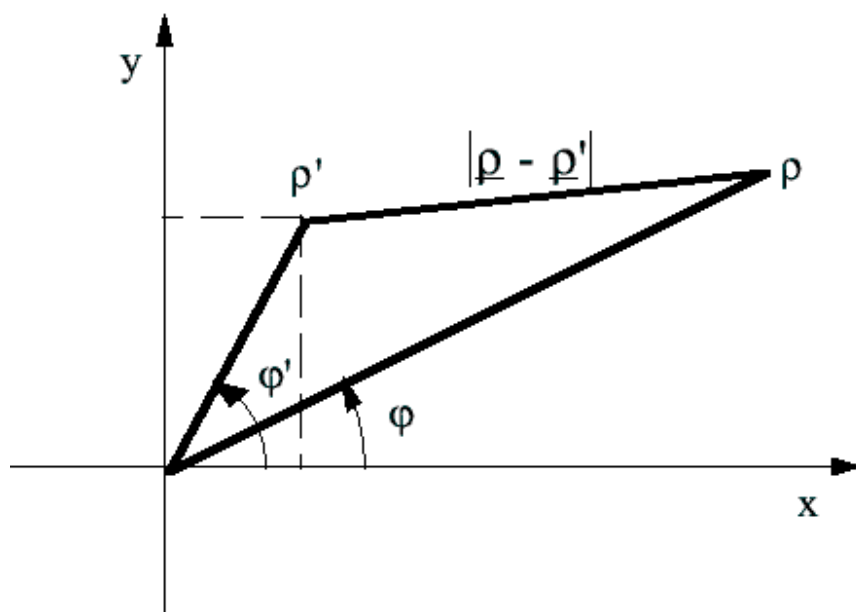


Figura 6.6: sistema di riferimento per l'applicazione della formula di Graf.

A questo punto è utile introdurre la cosiddetta formula di Graf, o teorema di addizione delle funzioni di Hankel. Si ha che:

$$H_o^{(1,2)}(k_t |\underline{\varrho} - \underline{\varrho}'|) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi - \varphi')} \cdot \begin{cases} J_m(k_t \varrho) H_m^{(1,2)}(k_t \varrho') & \varrho \leq \varrho' \\ J_m(k_t \varrho') H_m^{(1,2)}(k_t \varrho) & \varrho \geq \varrho' \end{cases}$$

Si noti che i ruoli di ϱ e di ϱ' si scambiano nei due casi, cosa che avviene tipicamente nelle espressioni delle funzioni di Green, come si vedrà estesamente nel capitolo 8. Questa formula ci permette in sostanza di esprimere un'onda cilindrica centrata in $\underline{\varrho}'$ mediante una sovrapposizione di onde cilindriche centrate nell'origine.

Tornando al nostro E_z si ha, ad esempio nei punti esterni al cilindro di corrente:

$$\begin{aligned} E_z(\underline{\varrho}) &= E_z(\varrho, \varphi) = \\ &= -\frac{\omega\mu}{4} \frac{k_t^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m^{(2)}(k_t \varrho) e^{jm\varphi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \delta(\varrho' - a) J_m(k_t \varrho') e^{j(n-m)\varphi'} \varrho' d\varrho' d\varphi' = \\ &= -\frac{\omega\mu}{4} \frac{k_t^2}{k^2} (2\pi a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n J_n(k_t a) H_n^{(2)}(k_t \varrho) e^{jn\varphi} \quad \varrho \geq a \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto della mutua ortogonalità delle funzioni esponenziali, espressa dalla formula

$$\int_0^{2\pi} e^{jn\varphi'} e^{-jm\varphi'} d\varphi' = 2\pi \delta_{nm}$$

Per i punti interni al cilindro di corrente, si devono soltanto scambiare i ruoli di ϱ e ϱ' . Perciò si ottiene globalmente:

$$E_z(\varrho, \varphi) = -\frac{\omega\mu}{4} \frac{k_t^2}{k^2} (2\pi a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{jn\varphi} \cdot \begin{cases} J_n(k_t a) H_n^{(2)}(k_t \varrho) & \varrho \geq a \\ J_n(k_t \varrho) H_n^{(2)}(k_t a) & \varrho \leq a \end{cases}$$

con ovvio raccordo per $\varrho = a$.

Nel caso particolare di corrente isotropa (distribuzione uniforme, indipendenza da φ), come avviene approssimativamente nel caso di cilindro filiforme (raggio piccolo rispetto a λ), si ha il solo coefficiente b_o nello sviluppo, e si ottiene

$$E_z(\varrho) = -\frac{\omega\mu}{4} \frac{k_t^2}{k^2} I \cdot \begin{cases} J_o(k_t a) H_o^{(2)}(k_t \varrho) & \varrho \geq a \\ J_o(k_t \varrho) H_o^{(2)}(k_t a) & \varrho \leq a \end{cases}$$

ove si può indicare con I [ampere] la quantità $(2\pi a b_o)$, intensità della corrente nel cilindro, visto che b_o [ampere/m] è la densità lineica di corrente e $2\pi a$ la lunghezza della circonferenza. In particolare per $a \rightarrow 0$ [$J_o(k_t a) \rightarrow 1$] l'espressione per $\varrho \geq a$ fornisce il campo irradiato da una sorgente di linea, di corrente I , posta nell'origine.

Convienne infine introdurre per semplicità una corrente modificata I' , incorporando le costanti (con riferimento all'espressione del campo esterno),

$$I' = \frac{\omega\mu}{4} \frac{k_t^2}{k^2} J_o(k_t a) I$$

sicché risulta:

$$E_z(\varrho) = -I' H_o^{(2)}(k_t \varrho) \quad \varrho \geq a$$

6.4.2 Metodo del *point-matching*

Tornando adesso al nostro problema di scattering da N fili paralleli, siccome i fili sono supposti essere conduttori perfetti, la componente lungo z del campo elettrico totale (incidente + scatterato) deve annullarsi sulla superficie di ciascun filo, ma anche ovunque all'interno del filo. In particolare, se tale condizione è imposta al centro del filo m -simo, si ottiene

$$\frac{H_o^{(2)}(k_t a_m)}{J_o(k_t a_m)} I'_m + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N H_o^{(2)}(k_t \varrho_{mn}) I'_n = E^i(x_m, y_m) \quad m = 1, 2, \dots, N$$

dove ϱ_{mn} è la distanza fra il filo m -simo ed il filo n -simo

$$\varrho_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$$

e per il primo addendo si è impiegata l'espressione per il campo interno, nella quale si è posto $J_o(k_t \varrho) = J_o(0) = 1$.

Il metodo impiegato è in sostanza un *point-matching* (primo esempio di metodo dei momenti applicato all'elettromagnetismo, con l'impiego di funzioni delta di Dirac). La formula precedente fornisce un *set* di N equazioni per le N correnti incognite I'_n a coefficienti complessi, che va risolto numericamente, dopodiché si ha:

$$E_z^s(x, y, z) = -e^{-jk_z z} \sum_{n=1}^N I'_n H_o^{(2)}(k_t \varrho_n) = -e^{-jk_z z} \sum_{n=1}^N I'_n H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \right]$$

Si è fatta l'ipotesi che ogni filo abbia un *pattern* di scattering circolare, ossia isotropo, quando calcoliamo il suo campo scatterato sull'asse di un altro filo. Considerando la soluzione esatta per lo scattering di un'onda piana da singolo filo di raggio a , si vede che questa è una buona approssimazione se $ka < 0.2$, a patto che i fili non siano troppo vicini. Ad esempio la distanza tra i centri di fili adiacenti (supposti di uguale raggio) dovrebbe essere di almeno 6 raggi se $ka = 0.2$. Questa spaziatura minima è suggerita anche quando ka è minore di 0.2.

Se il punto di osservazione è a grande distanza dai fili (campo lontano), si può applicare la solita espressione asintotica per la funzione di Hankel, in questo caso di ordine zero, per grandi argomenti:

$$H_o^{(2)}(k_t \varrho_n) \cong \sqrt{\frac{2j}{\pi k_t \varrho_n}} e^{-jk_t \varrho_n} \quad k_t \varrho_n \gg 1$$

essendo $e^{j\pi/4} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = \sqrt{j}$

Un'ulteriore semplificazione si ottiene notando che la distanza ϱ_n tra il centro del filo n -simo (x_n, y_n) ed il punto di osservazione (ϱ, φ) è data da²:

$$\varrho_n \cong \varrho - x_n \cos \varphi - y_n \sin \varphi$$

Allora a questo punto si può porre sotto la radice semplicemente $\varrho_n \cong \varrho$ e, usando come di consueto l'approssimazione più accurata all'esponente, si ha:

$$E_z^s(\varrho, \varphi, z) \cong -e^{-jk_z z} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_t \varrho}} e^{-jk_t \varrho} \sum_{n=1}^N I'_n e^{jk_t (x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi)}$$

Come si vede, in campo lontano le dipendenze dalle variabili radiale e angolare si separano (come di consueto), e si può definire come diagramma di scattering la sommatoria, dipendente solo dalla variabile φ .

Invece di considerare come incognite del problema le correnti nei fili, come è avvenuto storicamente in letteratura, è possibile lavorare direttamente sul campo elettrico. Si pone cioè per il campo scatterato in un punto esterno ai fili:

$$E_z^s(x, y, z) = e^{-jk_z z} \sum_{n=1}^N E_n H_o^{(2)}(k_t \varrho_n)$$

²se ci si trova a grande distanza, e quindi $\underline{\varrho}_n$ è un vettore praticamente parallelo a $\underline{\varrho}$ (vedi Fig. 6.7).

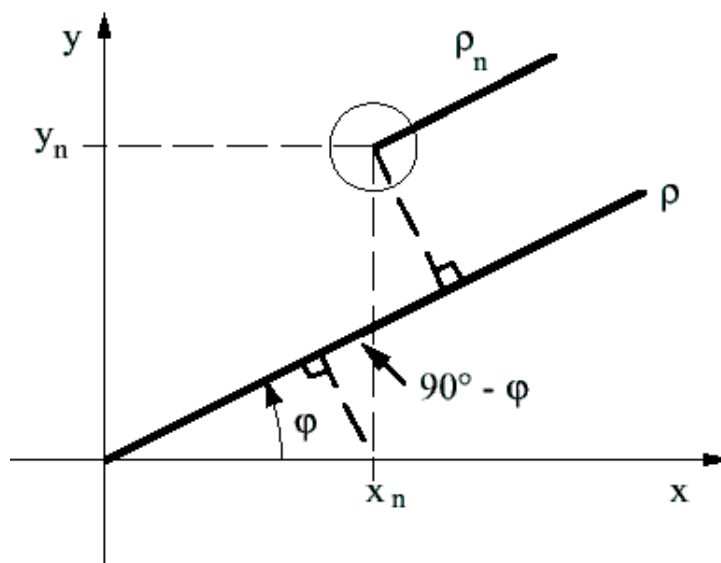


Figura 6.7: approssimazione di campo lontano.

D'altra parte, sull'asse del filo m -simo centrato in (x_m, y_m) e di raggio a_m si ha:

$$E_z^s(x_m, y_m, z) = e^{-jk_z z} \sum_{n=1}^N C_{mn} E_n$$

con

$$C_{mn} = \begin{cases} H_o^{(2)}(k_t \varrho_{mn}) & n \neq m \\ \frac{H_o^{(2)}(k_t a_m)}{J_o(k_t a_m)} & n = m \end{cases}$$

Imponendo l'annullamento del campo totale in corrispondenza dei centri degli N fili, si ha il sistema di equazioni

$$\sum_{n=1}^N C_{mn} E_n = -E^i(x_m, y_m) \quad m = 1, 2, \dots, N$$

Si noti che $C_{mn} = C_{nm}$ (matrice dei coefficienti simmetrica). Risolvendo si ottengono i coefficienti E_n .

Per ogni modello cosiddetto a griglia di fili (*wire-grid*) la questione importante è quale raggio dei fili scegliere, e quale spaziatura tra essi. Largamente usata è la regola della stessa area, ossia l'area (laterale) totale dei fili nella griglia, ovviamente per unità di altezza, deve

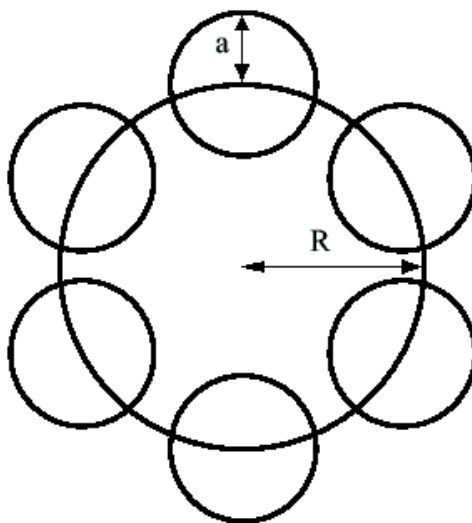


Figura 6.8: cilindro di raggio R simulato da $N = 6$ fili di raggio a .

risultare uguale all'area (laterale) della superficie da modellare. In questo senso fili troppo sottili sono insoddisfacenti come fili troppo spessi.

Ad esempio consideriamo un cilindro di raggio R simulato con N fili uguali di raggio a (Fig. 6.8). La regola della stessa area (per unità di altezza) è soddisfatta quando $N 2\pi a = 2\pi R$ (per cui deve essere $a = R/N$). In questo caso poi è nota la soluzione analitica del problema di scattering da parte del cilindro grande, e quindi l'errore del modello a griglia di fili è più agevolmente calcolabile. In particolare, nel calcolo della serie della soluzione analitica ci si può generalmente fermare ad un numero di termini pari alla parte intera di $2kR$, per ottenere sufficiente accuratezza.

All'interno del cilindro grande il campo scatterato è pari esattamente al campo incidente cambiato di segno, in modo da produrre un campo totale nullo, come deve essere. Un modo per ottenere una stima dell'errore commesso usando i fili è allora controllare se il campo totale all'interno della griglia effettivamente si annulla. Ciò è utile ad esempio anche per verificare le proprietà schermanti di un allineamento reale di fili (si pensi alla realizzazione di una camera schermata). Si trova che il campo all'interno della griglia cilindrica risulta particolarmente sensibile ad una variazione del raggio dei fili, sicché risulta un buon indicatore di errore.

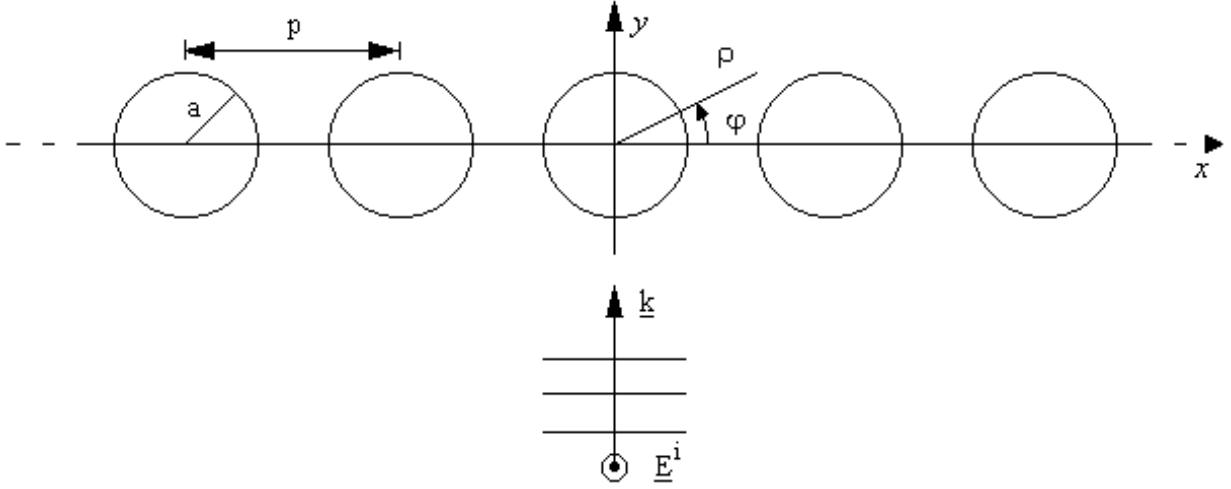


Figura 6.9: scattering da reticolo periodico di cilindri indefiniti.

6.5 Scattering di onda piana da un reticolo periodico di cilindri indefiniti, perfettamente conduttori. Polarizzazione E — Incidenza normale

La geometria del problema di scattering è schematizzata in Fig. 6.9. Si consideri inizialmente il caso in cui la direzione di incidenza (giacente sul piano trasverso) risulti ortogonale alla congiungente i centri dei cilindri. Allora, per l'invarianza della struttura rispetto a traslazioni per multipli del periodo p e per la simmetria dell'eccitazione, ogni cilindro deve produrre lo stesso campo, con la consueta formula:

$$E_z^s = E^s(\varrho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(2)}(k \varrho) e^{jn\varphi}$$

dove, appunto, i coefficienti c_n sono uguali per ciascun cilindro (nell'espressione precedente per semplicità è stata considerata, con riferimento alle espressioni del § 6.1, un'ampiezza E_o del campo unitaria ed è stato incorporato nei coefficienti il fattore j^{-n}).

Inoltre, data la simmetria della struttura e del campo incidente, il campo prodotto dal generico cilindro dev'essere simmetrico rispetto alla direzione dell'onda incidente:

$$E^s(\varrho, \varphi) = E^s(\varrho, \pi - \varphi)$$

e questo implica (utilizzando ora per comodità l'indice m)

$$\begin{aligned} \sum_m c_m H_m^{(2)}(k \varrho) e^{jm\varphi} &= \sum_m c_m H_m^{(2)}(k \varrho) e^{jm(\pi - \varphi)} = \\ &= \sum_m c_m H_m^{(2)}(k \varrho) (-1)^m e^{-jm\varphi} \end{aligned}$$

ove si è utilizzata la relazione $e^{\pm jm\pi} = (-1)^m$. Sostituendo m con $-n$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_n c_{-n} H_{-n}^{(2)}(k \varrho) (-1)^{-n} e^{jn\varphi} &= \sum_n c_{-n} (-1)^n H_n^{(2)}(k \varrho) (-1)^{-n} e^{jn\varphi} = \\ &= \sum_n c_{-n} H_n^{(2)}(k \varrho) e^{jn\varphi} \end{aligned}$$

avendo sfruttato la proprietà di parità rispetto all'ordine delle funzioni $H_n^{(2)}$. Dal confronto membro a membro (per l'ortogonalità delle funzioni esponenziali) di quest'ultima con la prima espressione segue allora:

$$c_{-n} = c_n$$

Si consideri ora il campo prodotto su un generico fissato cilindro da un altro che si trovi alla sua sinistra (cfr. Fig. 6.10) a distanza lp (l intero positivo)

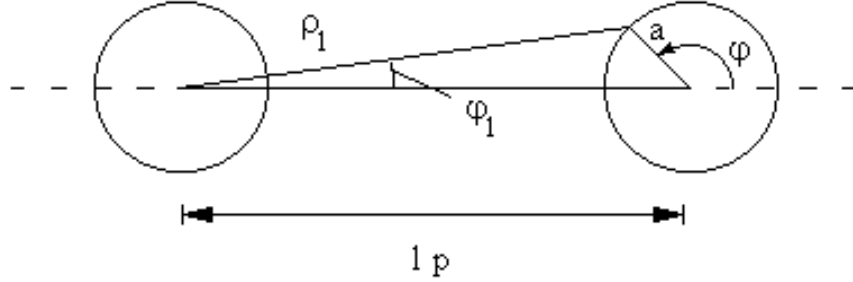


Figura 6.10: geometria di riferimento per il calcolo del campo prodotto su un generico cilindro da un altro posto alla sua sinistra.

$$E_l^s(\varrho_l, \varphi_l) = \sum_m c_m H_m^{(2)}(k \varrho_l) e^{jm\varphi_l} = \sum_m c_m (-1)^m H_m^{(2)}(k \varrho_l) e^{-jm\varphi_l}$$

ove si è cambiato m in $-m$ e si è sfruttata ancora la proprietà di parità.

A questo punto conviene utilizzare la formula di Graf vista nel § 6.4, la quale si applica alla situazione generale rappresentata in Fig. 6.11. Risultata:

$$H_m^{(2)}(k \varrho) e^{\pm jm\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{m+n}^{(2)}(k d) J_n(k a) e^{\pm jn\alpha}$$

In sostanza si esprime un'onda cilindrica centrata in C mediante una sovrapposizione di infinite onde cilindriche centrate in A .

Applicando al nostro caso la formula col segno negativo, e sfruttando la parità dei coefficienti, si ottiene:

$$\begin{aligned} E_l^s(\varrho_l, \varphi_l) &= \sum_m c_m (-1)^m \sum_n H_{m+n}^{(2)}(k lp) J_n(k a) e^{-jn(\pi-\varphi)} = \\ &= \sum_n e^{jn\varphi} J_n(k a) \sum_m c_m (-1)^{m+n} H_{m+n}^{(2)}(k lp) = E_l^s(a, \varphi) \end{aligned}$$

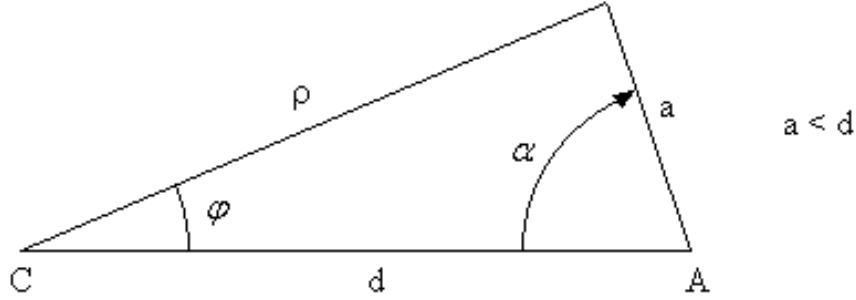


Figura 6.11: geometria per l'applicazione della formula di Graf.

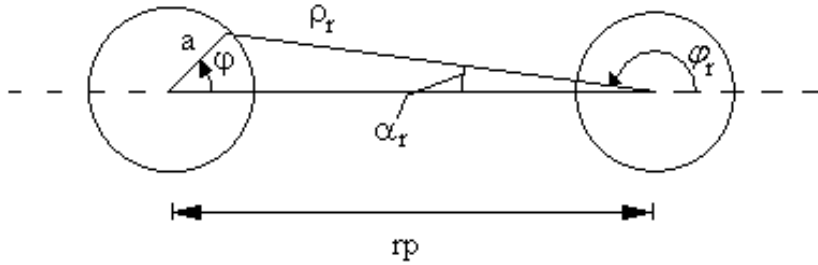


Figura 6.12: geometria di riferimento per il calcolo del campo prodotto su un generico fissato cilindro da un altro posto alla sua destra.

Si consideri poi il contributo che, sul fissato cilindro, deriva da un altro che si trovi alla sua destra (cfr. Fig. 6.12) a distanza $r\rho$ (r intero positivo). Si ha in questo caso, per quanto visto in precedenza:

$$E_r^s(\varrho_r, \alpha_r) = \sum_m c_m H_m^{(2)}(k \varrho_r) e^{jm\varphi_r} = \sum_m c_m H_m^{(2)}(k \varrho_r) e^{jm(\pi - \alpha_r)} = \sum_m c_m H_m^{(2)}(k \varrho_r) e^{jm\alpha_r}$$

ove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta sostituendo m con $-m$. Applicando ancora la formula di Graf col segno positivo si ha:

$$E_r^s(\varrho_r, \alpha_r) = \sum_m c_m \sum_n H_{m+n}^{(2)}(k r \rho) J_n(k a) e^{jn\varphi} = E_r^s(a, \varphi)$$

Perciò i campi scatterati complessivi che arrivano sul cilindro fissato dai cilindri alla sua sinistra e alla sua destra sono (sommando su l e su r):

$$E_L^s(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} E_l^s(a, \varphi) = \sum_n e^{jn\varphi} J_n(k a) \sum_m c_m (-1)^{m+n} \sum_{l=1}^{\infty} H_{m+n}^{(2)}(k l \rho)$$

$$E_R^s(a, \varphi) = \sum_{r=1}^{\infty} E_r^s(a, \varphi) = \sum_n e^{jn\varphi} J_n(k a) \sum_m c_m \sum_{r=1}^{\infty} H_{m+n}^{(2)}(k r \rho)$$

Inoltre, come al solito, il campo prodotto dall'onda incidente sulla superficie del cilindro fissato può scriversi (avendo soppresso, come già visto, in tutti i campi il fattore di ampiezza comune E_o , come pure il fattore comune j^{-n}):

$$E^i(a, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(ka) e^{jn\varphi}$$

La somma dei tre campi E^i , E_R^s , E_L^s dev'essere uguale e opposta al campo prodotto dal cilindro fissato (scritto per $\varrho = a$). Imponendo tale condizione e uguagliando termine a termine, per l'ortogonalità degli esponenziali, si ottiene:

$$J_n(ka) \left[1 + \sum_m c_m \sum_{r=1}^{\infty} H_{m+n}^{(2)}(krp) + \sum_m c_m (-1)^{m+n} \sum_{l=1}^{\infty} H_{m+n}^{(2)}(klp) \right] = -c_n H_n^{(2)}(ka)$$

ovvero, sostituendo r con l :

$$c_n = -\frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \left\{ 1 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \left[1 + (-1)^{m+n} \right] \sum_{l=1}^{\infty} H_{m+n}^{(2)}(klp) \right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Si osservi che nel limite di grandi periodi, per cui il secondo addendo nella parentesi graffa può venire trascurato, si riottiene la ben nota soluzione per il cilindro isolato. Nel caso generale si noti che, in virtù del fattore fra parentesi quadre, ogni c_n è legato solo ai coefficienti con la stessa parità, cioè se n è dispari è legato solo a m dispari, se n è pari a m pari.

Si noti inoltre che le serie che compaiono nella formula finale sono indipendenti dal raggio a dei cilindri e dipendono solo dal rapporto fra il periodo p e la lunghezza d'onda. La convergenza può anche risultare molto lenta. Inoltre si verificano divergenze per valori interi del rapporto p/λ (risonanze).

Infine, come si è visto, trattandosi di una struttura periodica, è stato sufficiente imporre la condizione al contorno su un cilindro soltanto.

6.5.1 Incidenza obliqua rispetto alla congiungente i centri

Nel caso in cui l'incidenza dell'onda piana non sia ortogonale (sul piano trasverso) alla congiungente i centri dei cilindri si ha la situazione di Fig. 6.13.

Si osservi ora che quando si passa dal cilindro s al cilindro $s+1$, la situazione dei due cilindri è fisicamente indistinguibile, eccetto il fatto che la fase del campo incidente cambia di $kp \sin \theta_i$. I coefficienti c_{sn} avranno allora la forma:

$$c_{sn} = c_{on} e^{-j s k p \sin \theta_i} \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Il risultato finale che si ottiene per i coefficienti $c_{on} \equiv c_n$ è il seguente:

$$c_n = -\frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \left\{ 1 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{-j(n-m)\theta_i} \sum_{l=1}^{\infty} H_{n-m}^{(2)}(klp) \left[e^{-j l k p \sin \theta_i} + (-1)^{n-m} e^{j l k p \sin \theta_i} \right] \right\}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

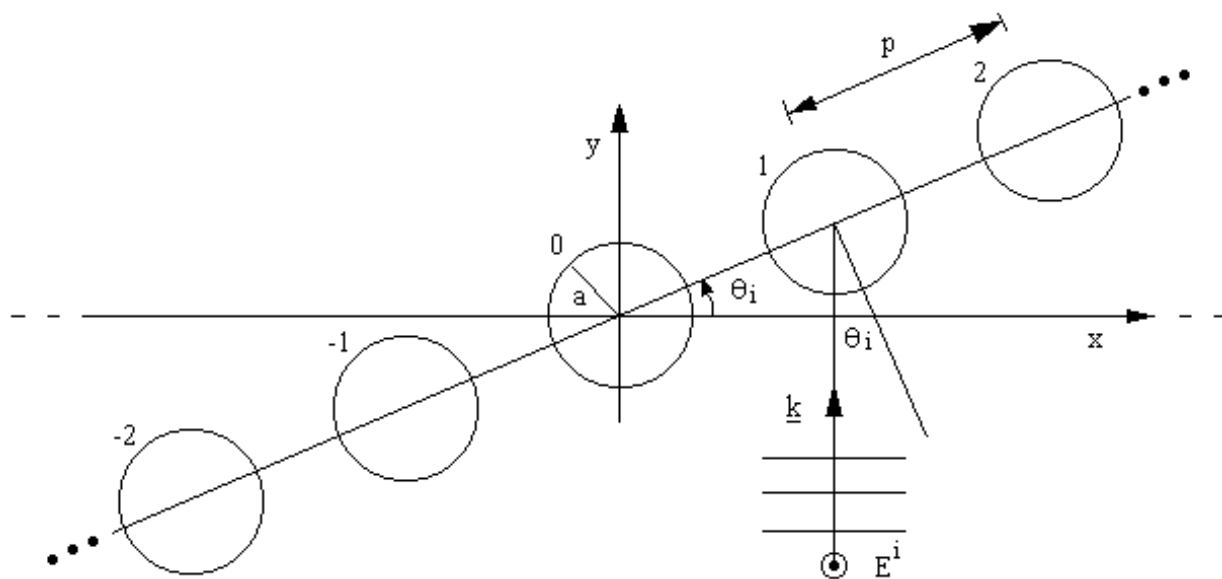


Figura 6.13: incidenza obliqua rispetto alla congiungente i centri dei cilindri.

Si noti che nel caso di incidenza normale ($\theta_i = 0$) si riottiene la formula precedente. Infatti:

$$c_n = -\frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \left\{ 1 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \left[1 + (-1)^{n-m} \right] \sum_{l=1}^{\infty} H_{n-m}^{(2)}(klp) \right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

D'altra parte era $c_{-m} = c_m$, per cui cambiando m in $-m$ si ottiene proprio il risultato già visto.

6.6 Scattering di un'onda piana da un cilindro sottile di lunghezza finita

Per considerare un esempio più realistico, si prenda nuovamente in esame un'onda piana uniforme viaggiante nella direzione x e avente il campo elettrico polarizzato linearmente lungo z :

$$\underline{E}^i = E_z^i(x) \underline{z}_o$$

con

$$E_z^i(x) = E_o e^{-jkx} = E_o e^{-jk\rho \cos \varphi} \quad (\text{polarizzazione } E \text{ o } \text{TM}^{(z)})$$

Si consideri quest'onda incidente su un cilindro sottile (filo) di raggio a piccolo rispetto a λ , tipicamente minore di $\lambda/10$, e lunghezza finita L , giacente lungo l'asse z . In questo caso si ha approssimativamente sulla superficie del cilindro

$$E_z^i(a, \varphi) = E_o e^{-jka \cos \varphi} \simeq E_o$$

Inoltre, come si è già visto, considerare il cilindro filiforme implica tener conto solo del flusso di corrente nella direzione z (e non di quello trasverso nella direzione φ), e considerare tale corrente longitudinale uniforme all'interno della sezione. In sostanza, allora, l'effetto è lo stesso di una corrente concentrata proprio sull'asse z .

Ci si può allora ridurre, per il calcolo del potenziale vettore (che sarà anch'esso diretto lungo z), al calcolo di un integrale unidimensionale nel quale sparisce anche la dipendenza da φ

$$A_z^s(\varrho, z) = \int_0^L \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} I(z') dz'$$

ove nel nostro caso si ha (essendo sull'asse)

$$x' = y' = 0 \implies R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

In particolare, sulla superficie del filo si ha:

$$A_z^s(a, z) = \int_0^L K(z - z') I(z') dz'$$

avendo posto per il cosiddetto nucleo o kernel

$$K(z - z') = \frac{e^{-jk\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} = \frac{e^{-jkD}}{4\pi D}$$

con $D = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$.

Per il campo scatterato, si ha (cfr. Campi Elettromagnetici I):

$$\begin{aligned} \underline{E}^s(\varrho, z) &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} (\nabla\nabla \cdot \underline{A} + k^2 \underline{A}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left\{ \nabla \left[\frac{\partial A_z^s(\varrho, z)}{\partial z} \right] + k^2 A_z^s(\varrho, z) \underline{z}_o \right\} = \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 A_z^s(\varrho, z)}{\partial \varrho \partial z} \underline{\varrho}_o + \frac{\partial^2 A_z^s(\varrho, z)}{\partial z^2} \underline{z}_o \right] + \frac{1}{j\omega\varepsilon} k^2 A_z^s(\varrho, z) \underline{z}_o \end{aligned}$$

Quest'espressione, presa la componente tangenziale e calcolata per $\varrho = a$, deve essere pari a $-E_o \underline{z}_o$, per la condizione di annullamento del campo tangenziale totale sulla superficie del filo:

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{d^2 A_z^s(a, z)}{dz^2} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} k^2 A_z^s(a, z) = -E_o$$

cioè

$$-j\omega\varepsilon E_o = \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \int_0^L K(z - z') I(z') dz'$$

Diversi approcci sono stati usati con questa equazione integro-differenziale nell'incognita $I(z)$. L'approccio diretto è di applicare l'operatore all'integrando ed ottenere:

$$-j\omega\varepsilon E_o = \int_0^L G(z - z') I(z') dz'$$

con

$$G(z - z') = \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2 \right) K(z - z')$$

che è una forma della cosiddetta equazione integrale di Pocklington. Eseguendo le derivate si ottiene:

$$G(z - z') = K(z - z') \left(\frac{2jk}{D} + \frac{2 + a^2 k^2}{D^2} - \frac{3jk a^2}{D^3} - \frac{3a^2}{D^4} \right)$$

Una forma alternativa si può ottenere dalla

$$-j\omega\varepsilon E_o = \int_0^L \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2 \right) K(z - z') I(z') dz'$$

mediante un'integrazione per parti. Si ha infatti

$$\int_0^L \frac{\partial^2 K(z - z')}{\partial z'^2} I(z') dz' = \frac{\partial K(z - z')}{\partial z'} I(z') \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial K(z - z')}{\partial z'} I'(z') dz'$$

ove si sono sfruttate le proprietà

$$\frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{\partial K}{\partial z'} \quad \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial z'^2}$$

Il primo addendo si elide (la corrente si deve annullare agli estremi del filo). Integrando nuovamente per parti si ottiene

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{\partial K(z - z')}{\partial z'} I'(z') dz' &= -K(z - z') I'(z') \Big|_0^L + \int_0^L K(z - z') I''(z') dz' \\ \Rightarrow -K(z - L) I'(L) + K(z) I'(0) + \int_0^L K(z - z') [I''(z') + k^2 I(z')] dz' &= -j\omega\varepsilon E_o \end{aligned}$$

Si può vedere che la corrente è simmetrica (pari) rispetto al punto medio del filo, pertanto si può ridefinire l'origine delle z in modo da avere

$$-j\omega\varepsilon E_o = \int_{-L/2}^{L/2} G^e(z, z') I(z') dz'$$

e, per il fatto che $I(z)$ è pari:

$$-j\omega\varepsilon E_o = \int_0^{L/2} G^e(z, z') I(z') dz'$$

avendo posto ora

$$G^e(z, z') = \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2 \right) [2 K^e(z, z')]$$

ove ho scomposto $K(z - z')$, vista come funzione di z' , in parte pari (*even*) e parte dispari (*odd*):

$$K(z - z') = \underbrace{\frac{K(z - z') + K(z + z')}{2}}_{\text{pari (even)}} + \underbrace{\frac{K(z - z') - K(z + z')}{2}}_{\text{dispari (odd)}} = K^e(z, z') + K^o(z, z')$$

La parte dispari, moltiplicata per una funzione pari, dà una funzione dispari, e quindi integrale nullo. La parte pari produce un fattore 2 che si elide col denominatore.

Con questa nuova funzione di Green l'equazione integrale si può risolvere col metodo dei momenti, mentre in passato venivano utilizzati metodi iterativi. Le integrazioni richieste per ottenere i coefficienti della matrice devono essere eseguite numericamente. Utili risultati possono essere ottenuti usando funzioni a impulso unitario come funzioni di base, ma al crescere del loro numero N questi integrali non convergono bene e il comportamento della soluzione come funzione di N non è troppo regolare. Migliori risultati si ottengono con funzioni di base che corrispondono ad una più regolare approssimazione per la corrente.

In alternativa, per migliorare la convergenza, si può usare un approccio alternativo nell'equazione iniziale

$$-j\omega\varepsilon E_o = \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \int_0^L K(z - z') I(z') dz'$$

Invece di portare dentro le derivate, si può pensare di risolvere quest'ultima equazione differenziale del secondo ordine non omogenea, ottenendo:

$$\int_0^{L/2} 2 K^e(z, z') I(z') dz' = -\frac{j\omega\varepsilon E_o}{k^2} + A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

che è una forma della cosiddetta equazione integrale di Hallen. Questa equazione può essere risolta con migliori proprietà di convergenza dell'equazione di Pocklington. Si noti che $K^e(z, z')$ è funzione pari anche di z per come è stata definita, per cui dev'essere $B = 0$. La rimanente costante A può essere determinata al momento del calcolo della corrente.

Se si usano $N-1$ funzioni di base e si impongono N condizioni da soddisfare, la soluzione del sistema di N equazioni porge gli $N-1$ parametri che definiscono l'approssimazione della corrente. Si può inoltre fare uso del fatto che la corrente è nulla all'estremità del filo.

6.6.1 Scattering di un'onda piana da un cilindro spesso di lunghezza finita

Se il cilindro è spesso, ossia il suo raggio non è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda dell'onda incidente, molte delle approssimazioni fatte non sono più valide. Per prima cosa non si può più assumere sulla superficie del cilindro $E_z^i(x) \simeq E_o$.

Inoltre stavolta la corrente dipende anche dall'azimut φ , e si ha:

$$A_z^s(\varrho, \varphi, z) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} J_{sz}(a, \varphi', z') a d\varphi' dz'$$

in cui a è un coefficiente metrico, ed $R = \sqrt{\varrho^2 + a^2 - 2a\varrho \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}$ per il teorema del coseno o di Carnot.

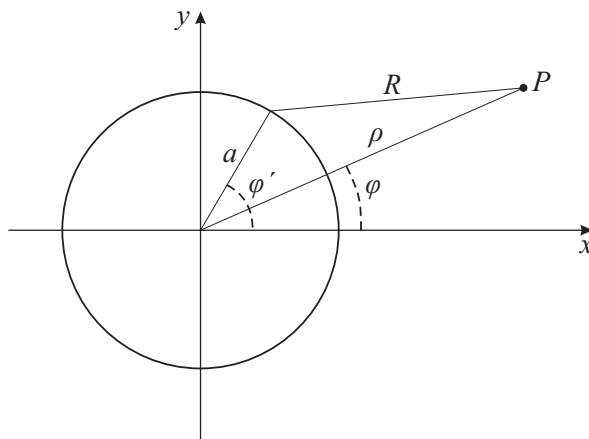


Figura 6.14: rappresentazione grafica del teorema di Carnot.

Il campo elettrico lungo z corrispondente a questo potenziale vettore è:

$$E_z^s(\varrho, \varphi, z) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z^s(\varrho, \varphi, z)$$

Combinando queste equazioni, portando l'operatore all'interno dell'integrale e imponendo la condizione al contorno per $\varrho = a$, si ha la desiderata equazione integrale:

$$-E_o e^{-jka \cos \varphi} = \frac{a}{j\omega\varepsilon} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jkD}}{4\pi D} J_{sz}(a, \varphi', z') d\varphi' dz'$$

che corrisponde all'equazione di Pocklington e dove ora

$$D = \sqrt{4a^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) + (z - z')^2}$$

avendo utilizzato ora la

$$\frac{1 - \cos \alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Inoltre, la corrente alle estremità del cilindro, che era stata prima trascurata, ora deve essere inclusa (perché la corrente ora può fare il giro).

6.7 Scattering da un'iride induttiva in guida d'onda rettangolare

Un esempio di problema di scattering in guida, che è anche un'ulteriore illustrazione dell'uso di tecniche di sviluppo in serie di Fourier, è l'iride induttiva in guida d'onda rettangolare (cfr. Fig. 6.15).

Prendiamo in considerazione i soli modi $\text{TE}^{(z)}$ indipendenti da y , ossia TE_{m0} . In realtà questi sono i soli modi ad essere eccitati dal dominante TE_{10} , che incide su questo tipo di ostacolo, perché il campo incidente è indipendente da y ed anche l'ostacolo è invariante rispetto a y , quindi la dipendenza da y non viene alterata. L'ostacolo però non è invariante rispetto a x , quindi è intuibile che la dipendenza da x del campo incidente sia alterata e vengano quindi eccitati i modi di ordine superiore per soddisfare le nuove condizioni al contorno presenti.

Il generico modo TE_{mo} ha un campo elettrico del tipo (considerando per semplicità ampiezze unitarie):

$$E_{ym}(x, z) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{\pm jk_{zm}z} \quad (E_x, E_z, H_y \equiv 0; \quad H_x, H_z \neq 0)$$

$$k_{zm}^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Inoltre in condizioni operative (propagazione unimodale) vale la relazione:

$$\frac{\pi}{a} < k < \frac{2\pi}{a}$$

sicché k_{z1} è reale (propagazione), mentre gli altri k_{zm} sono puramente immaginari (modi sotto cutoff).

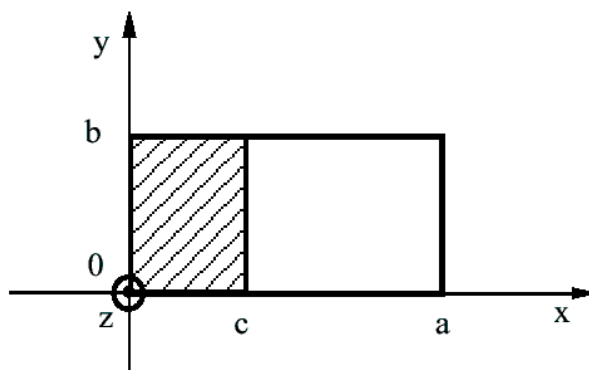


Figura 6.15: sezione di guida d'onda rettangolare in cui è posta un'iride induttiva.

L'onda incidente sull'ostacolo sia dunque il modo dominante, proveniente dalle z negative:

$$E_y^i(x, z) = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jk_{z1}z}$$

e l'iride induttiva, supposta di spessore infinitesimo e conduttrice perfetta sia posta a $z = 0$ (Fig. 6.15). Vi sarà una corrente indotta nella direzione y (legata alla componente tangenziale di campo magnetico H_x e indipendente da y) e sarà prodotto un campo scatterato.

La condizione al contorno da imporre è l'annullamento del campo elettrico tangenziale totale sull'iride: le altre condizioni al contorno sulle pareti laterali sono automaticamente soddisfatte dai modi in guida.

Per conoscere il campo scatterato bisogna conoscere le correnti indotte che lo generano. Si noti che la dipendenza da x della corrente dev'essere diversa da quella del campo incidente, se non altro perché tale corrente esiste solo sull'iride e quindi per $0 \leq x \leq c$. La densità di corrente, tuttavia, si potrà senz'altro esprimere in serie di Fourier unilatera di soli seni, con periodo $2a$ poiché ha supporto limitato tra 0 ed a , nella forma (si tratta in sostanza di uno sviluppo modale della corrente):

$$J_y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) = \sum_{m=1}^{\infty} J_{y_m}(x) \quad (6.8)$$

con i coefficienti c_m dati da

$$c_m = \frac{2}{a} \int_0^a J_y(x') \sin\left(\frac{m\pi}{a} x'\right) dx'$$

Per $z = 0^-$, la componente tangenziale del campo magnetico scatterato è legata alla corrente dalla³:

$$H_x^s(x, 0^-) = -\frac{1}{2} J_y(x) \quad (6.9)$$

In particolare per ciascun modo (vista l'ortogonalità delle funzioni modali)

$$H_{x_m}^s(x, 0^-) = -\frac{1}{2} J_{y_m}(x)$$

Inoltre per ciascun modo (e quindi per ciascuna linea di trasmissione equivalente nella direzione longitudinale z) i campi elettrico e magnetico trasversi rispetto a z sono legati dalla relazione d'impedenza per i TE^(z), considerando onde regressive:

$$E_{y_m}^s(x, 0^-) = \frac{\omega\mu}{k_{z_m}} H_{x_m}^s(x, 0^-) \quad (6.10)$$

(c'è il segno positivo appunto perché consideriamo il campo scatterato all'indietro o riflesso).

Il campo elettrico scatterato, per $z = 0^-$, si ottiene allora dalla (6.10), usando la (6.9) e la (6.8)

$$\begin{aligned} E_y^s(x, 0^-) &= \sum_{m=1}^{\infty} E_{y_m}^s(x, 0^-) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega\mu}{k_{z_m}} H_{x_m}^s(x, 0^-) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega\mu}{k_{z_m}} \left(-\frac{1}{2}\right) J_{y_m}(x) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{\omega\mu}{2k_{z_m}} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \end{aligned}$$

3

$$\underline{J}_s = \underline{n} \times (\underline{H}^i + \underline{H}^s) = 2 \underline{n} \times \underline{H}^i = 2 \underline{n} \times \underline{H}^s$$

perché $\underline{H}^i$ e $\underline{H}^s$ hanno la stessa componente tangenziale sull'ostacolo: in questo caso il campo scatterato coincide con quello riflesso, inoltre $\underline{n} = -\underline{z}_o$.

e per $z < 0$ il campo riflesso:

$$E_y^{s-}(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{\omega\mu}{2k_{z_m}} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{jk_{z_m} z}$$

Sostituendo l'espressione dei c_m e scambiando la serie e l'integrale si ha (l'integrale si può estendere anche solo fino a c , perché altrove le correnti sono nulle):

$$E_y^s(x, 0^-) = - \int_0^c J_y(x') \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega\mu}{k_{z_m} a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx' \quad (6.11)$$

Per ottenere il campo totale tangenziale nullo sull'iride dev'essere:

$$-E_y^s(x, 0^-) = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \quad 0 \leq x \leq c$$

il che conduce all'equazione integrale non omogenea:

$$\int_0^c G(x, x') J_y(x') dx' = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \quad 0 \leq x \leq c$$

dove la funzione di Green per il campo elettrico risulta:

$$G(x, x') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega\mu}{k_{z_m} a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x'\right) \quad (6.12)$$

Questa serie, tuttavia, converge lentamente, come si vedrà nel seguito.

La soluzione dell'equazione integrale col metodo dei momenti è basata sull'approssimazione

$$J_y(x) \cong \sum_{j=1}^N \alpha_j \psi_j(x) \quad (\psi_j \text{ funzioni di base})$$

Moltiplicando l'equazione integrale approssimata per le funzioni peso $w_i(x)$ e integrando in x fra 0 e c si giunge a (portando fuori la sommatoria)

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \int_0^c \int_0^c w_i(x) G(x, x') \psi_j(x') dx' dx \cong \int_0^c w_i(x) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx \quad i = 1, 2, \dots, N$$

che si può scrivere (scambiando la serie con gli integrali)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega\mu}{k_{z_m} a} \left[\int_0^c w_i(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx \right] \left[\int_0^c \psi_j(x') \sin\left(\frac{m\pi}{a} x'\right) dx' \right] &\cong \\ &\cong \int_0^c w_i(x) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6.13)$$

Utilizzando in particolare il metodo di Galerkin (cioè $w_i \equiv \psi_i$) con N funzioni a sottodominio (*subdomain*) impulsive unitarie (cioè delle funzioni rect), definite su N subintervalli di lunghezza $h = c/N$, il primo integrale nella (6.13) risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^c w_i(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx &= \int_{(i-1)h}^{ih} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx = \\ &= \frac{a}{m\pi} \left\{ \cos\left[\frac{m\pi}{a}(i-1)h\right] - \cos\left(\frac{m\pi}{a} ih\right) \right\} = \frac{a}{m\pi} F(m, i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

La quantità in parentesi graffa, indicata con $F(m, i)$, dipende da m , da i e dal parametro h/a , che si può esprimere come

$$\frac{h}{a} = \frac{\frac{c}{N}}{a} = \frac{\frac{c}{a}}{N}$$

Gli altri due integrali sono della stessa forma, e così è possibile scrivere la (6.13) come:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega\mu}{k_{z_m} a} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 F(m, i) F(m, j) \cong \frac{a}{\pi} F(1, i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.14)$$

È conveniente riarrangiare la (6.14) come

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\omega\mu a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 k_{z_m} a} F(m, i) F(m, j) \cong F(1, i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.15)$$

che costituisce un sistema lineare non omogeneo nelle incognite α_j . Si noti ora che il fattore $k_{z_m} a$ è dato da $\sqrt{(ka)^2 - (m\pi)^2}$. Poiché per grandi m questo termine è proporzionale alla prima potenza di m , la serie per la funzione di Green nella (6.12) converge lentamente (si ricordi che la serie armonica diverge, ma invece questa converge, per un teorema di Analisi II). Ora, tuttavia, i due integrali a primo membro della (6.13) introducono ognuno un fattore $1/m$, e pertanto i termini nella serie della (6.15) vanno a zero come $1/m^3$ e questa serie converge rapidamente.

Il termine dominante nell'onda scatterata all'indietro (riflessa) è il termine con $m = 1$ nella (6.11), ed il relativo coefficiente di riflessione a $z = 0$ è

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= \frac{E_{y_1}^s(x, 0^-)}{E_{y_1}^i(x, 0)} = -\frac{\omega\mu}{k_{z_1} a} \int_0^c J_y(x') \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) dx' \cong -\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\omega\mu}{k_{z_1} a} \int_0^c \psi_j(x') \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) dx' = \\ &= -\frac{\omega\mu}{k_{z_1} a} \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{a}{\pi} F(1, j) = -\frac{\omega\mu}{k_{z_1} \pi} \sum_{j=1}^N \alpha_j F(1, j) \end{aligned}$$

avendo usato ancora l'espansione in funzioni di base impulsive unitarie e dove gli α_j sono stati determinati dal precedente sistema (6.15).

In termini circuitali, l'effetto dell'iride nella guida monomodale si può rappresentare come un'impedenza Z in parallelo alla linea di trasmissione del modo dominante

$$Z = Z_o \frac{1 + \Gamma(0)}{1 - \Gamma(0)}$$

e risulta immaginaria positiva, per cui si parla di iride induttiva.

6.7.1 Il metodo del *mode-matching*

Il medesimo problema dell'iride induttiva si può vedere in modo simile nei calcoli (in questo caso particolare), ma concettualmente diverso, applicando il metodo cosiddetto del *mode-matching*. Un qualsiasi circuito a microonde che consista di alcuni tratti interconnessi, ognuno dei quali sia abbastanza semplice da avere una soluzione in termini di un insieme noto di modi, può essere analizzato imponendo la continuità delle componenti di campo (elettrico e magnetico) tangenziale alle varie interfacce fra un tratto e l'altro. Un esempio tipico è la discontinuità longitudinale rappresentata da un cambio di larghezza in una guida d'onda rettangolare (vista dall'alto: a sinistra in Fig. 6.16). La discontinuità può essere anche trasversale (lungo la sezione trasversa) e riguardare allora i modi trasversi e la rete equivalente trasversa (un esempio a destra in Fig. 6.16).

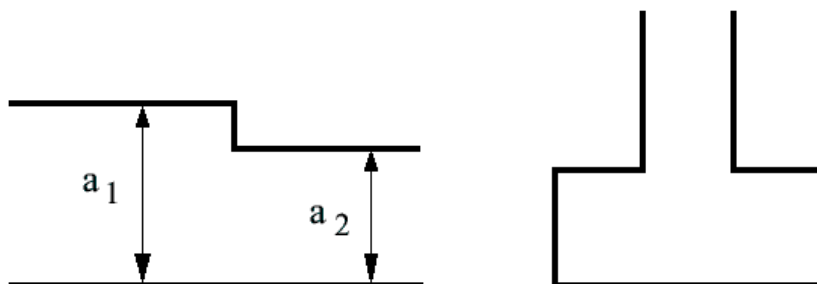


Figura 6.16: a sinistra, cambio di larghezza in guida rettangolare; a destra, sezione trasversale della guida a *groove*.

I campi elettrico e magnetico su ciascun lato dell'interfaccia possono allora essere espansi in serie delle funzioni modali note, serie che poi ovviamente andranno troncate in pratica nell'imporre la continuità, e questo costituisce l'approssimazione introdotta dal metodo. L'uso di funzioni peso (cfr. metodo dei momenti) porta ancora una volta ad un *set* di equazioni algebriche lineari.

Si consideri ancora (cfr. Fig. 6.15) il campo elettrico incidente del modo TE_{10} nel verso positivo delle z

$$E_y^i(x, z) = \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jk_{z1}z}$$

Il corrispondente campo magnetico incidente trasverso è dato da:

$$H_x^i(x, z) = -\frac{k_{z1}}{\omega\mu} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jk_{z1}z}$$

Il campo elettrico riflesso (scatterato all'indietro) ha l'espressione

$$E_y^r(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{jk_{zm}z}$$

ove r_m è il coefficiente in riflessione del modo m -simo. Per il corrispondente campo magnetico trasverso si ha:

$$H_x^r(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{zm}}{\omega\mu} r_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{jk_{zm}z}$$

Il campo elettrico totale tangenziale si deve annullare sull'iride:

$$E_y^i(x, 0) + E_y^r(x, 0^-) = 0 \quad 0 \leq x \leq c$$

ossia:

$$\sum_{m=1}^{\infty} r_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \quad 0 \leq x \leq c \quad (6.16)$$

Si osservi che se la precedente relazione dovesse essere vera per $0 \leq x \leq a$, implicherebbe $r_1 = -1$ e gli altri coefficienti nulli, il che poi significherebbe che la guida è chiusa da un corto circuito. Si ricordi infatti che vale la relazione (m, n interi generici, ϵ_n simbolo di Neumann, δ_{mn} simbolo di Kronecker)

$$\frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \delta_{mn}(\epsilon_n - 1) \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 2 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Si noti che si tratta di un'integrazione su un semiperiodo, non su un periodo, quindi la relazione non è ovvia in generale, perché l'ortogonalità dei seni e dei coseni è assicurata solo su un periodo. D'altra parte in questo caso l'integrando è una funzione pari: per il prodotto tra un seno ed un coseno non sarebbe vera, oppure non è vera per due seni se si integra tra $-a/2$ e $a/2$.

Dopo l'ostacolo ($z > 0$) si avrà un campo elettrico trasmesso, che sarà del tipo:

$$E_y^t(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-jk_{zm}z}$$

ove t_m è il coefficiente in trasmissione del modo m -simo. Per il campo magnetico trasverso si avrà l'espressione:

$$H_x^t(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{k_{z_m}}{\omega\mu} t_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-jk_{z_m} z}$$

D'altra parte, per la continuità del campo elettrico tangenziale dove l'iride non c'è:

$$\begin{aligned} E_y^i(x, 0) + E_y^r(x, 0^-) &= E_y^t(x, 0^+) & c < x \leq a \\ \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} t_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \end{aligned}$$

Quest'ultima uguaglianza si può pensare valida su tutto l'intervallo $0 \leq x \leq a$, perché un campo elettrico tangenziale nullo da ambo i lati è anche continuo. Si possono allora applicare le relazioni di ortogonalità, da cui

$$1 + r_1 = t_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = t_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad r_1 + r_1 = 2r_1 = t_1 - 1 + r_1 \quad \text{e} \quad r_m = t_m \quad (m > 1)$$

Considerando ora la condizione di continuità per la componente tangenziale del campo magnetico H_x dove l'iride non c'è, si ha:

$$\begin{aligned} H_x^i(x, 0) + H_x^r(x, 0^-) &= H_x^t(x, 0^+) & c < x \leq a \\ -\frac{k_{z_1}}{\omega\mu} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{z_m}}{\omega\mu} r_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{z_m}}{\omega\mu} t_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) & c < x \leq a \end{aligned}$$

Da cui segue, per le relazioni viste tra i coefficienti

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{z_m}}{\omega\mu} r_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) = 0 \quad c < x \leq a \quad (6.17)$$

Si osservi incidentalmente che se gli r_m fossero tutti reali, essendo inoltre k_{z_1} reale e gli altri k_z immaginari, si avrebbe che la parte reale a primo membro della formula precedente dovrebbe annullarsi separatamente:

$$k_{z_1} r_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) = 0 \quad c < x \leq a$$

da cui $r_1 = 0$, cioè il modo dominante risulterebbe completamente trasmesso, pur in presenza di un ostacolo. Per cui gli r_m in generale saranno complessi.

Se si troncano le serie nelle (6.16) e (6.17) ad un certo valore N , si ottengono le approssimazioni relative. A questo punto si può ad esempio dividere l'intervallo $[0, a]$ in N subintervalli ed usare funzioni peso con cui moltiplicare ambo i membri e poi integrare. In particolare si possono usare come pesi le stesse funzioni modali (procedura alla Galerkin).

6.8 Riepilogo di relazioni di ortogonalità per le funzioni armoniche

Si noti che negli integrali successivi la quantità a non è il periodo delle funzioni sotto il segno di integrale, quindi l'ortonormalità non è scontata. Si osservi però che i primi due integrandi sono funzioni pari.

$$\frac{1}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{\delta_{mn}}{\epsilon_n} \quad (6.18a)$$

$$\frac{1}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{\delta_{mn}(\epsilon_n - 1)}{2} \quad (6.18b)$$

$$\frac{1}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{n}{\pi} \frac{(-1)^{m+n} - 1}{(m+n)(m-n)} \quad (6.18c)$$

con ϵ_n simbolo di Neumann e δ_{mn} simbolo di Kronecker:

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 2 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Casi particolari in cui l'integrale in (6.18c) vale zero: $m = 0$, $m = n$ [si potrebbero quindi aggiungere i due fattori moltiplicativi $(1 - \delta_{mn})(1 - \delta_{m0})$]. Si presti attenzione al fatto che questa è l'unica delle tre espressioni (6.18) sensibile al segno (in particolare al solo segno di m).

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = 0 \quad (\text{sempre, integrando dispari})$$

$$\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_n} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m + n \text{ pari} \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{m+n} + \frac{(-1)^{\frac{m-n-1}{2}}}{m-n} \right] & \text{se } m + n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$m + n \text{ pari} \iff m - n \text{ pari}$$

$$m + n \text{ dispari} \iff m - n \text{ dispari}$$

$$\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \begin{cases} \frac{\epsilon_n - 1}{2} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m + n \text{ pari} \\ -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{m+n} - \frac{(-1)^{\frac{m-n-1}{2}}}{m-n} \right] & \text{se } m + n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx &= 0 \quad (\text{sempre, integrando dispari}) \\
\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx &= \frac{\delta_{mn}}{\epsilon_n} \\
\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx &= \frac{\delta_{mn}(\epsilon_n - 1)}{2} \\
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jn\varphi} e^{-jm\varphi} d\varphi &= \delta_{nm}
\end{aligned}$$

(si tratta per quest'ultima di un prodotto scalare nel campo complesso)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_x(x-x')} dk_x &= \delta(x - x') \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(k_x - k'_x)x} dx &= \delta(k_x - k'_x)
\end{aligned}$$

A proposito di quest'ultima relazione si ricordi la proprietà

$$\delta(ct) = \frac{\delta(t)}{|c|}$$

per cui, introdotta la frequenza spaziale $\nu_x = k_x/2\pi$, risulta

$$\delta(k_x - k'_x) = \frac{1}{2\pi} \delta(\nu_x - \nu'_x)$$

Capitolo 7

Rappresentazioni integrali del campo

7.1 Applicazione del teorema di equivalenza per la formulazione di equazioni integrali

Esistono diverse tecniche attraverso le quali è possibile ottenere una rappresentazione integrale del campo. Nel seguito verrà considerato esclusivamente un metodo basato sull'applicazione dei teoremi dell'analisi vettoriale direttamente al campo elettromagnetico e sull'introduzione di una opportuna funzione di Green. Questa tecnica è spesso indicata come teorema di equivalenza. Una altrettanto valida rappresentazione può, tuttavia, essere ottenuta a partire dai potenziali vettori o dal teorema di reciprocità [95], [253]. È importante, peraltro, notare che le caratteristiche delle equazioni integrali per il campo dipendono strettamente dalla rappresentazione scelta, che quindi può essere più o meno conveniente a seconda del problema considerato.

Si consideri una regione di spazio V_1 , indicata schematicamente in Fig. 7.1, riempita da un dielettrico omogeneo e delimitata da una superficie S , in cui siano eventualmente presenti delle sorgenti impresse elettriche e magnetiche $\underline{J}^i$ e $\underline{M}^i$. Il versore della normale alla superficie S verrà indicato con $\underline{n}$ e si intende orientato verso l'interno, mentre la regione esterna sarà indicata come V_2 e può essere limitata o illimitata.

All'interno del volume V_1 il campo elettrico soddisfa all'equazione delle onde vettoriale:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E}(\underline{r}) - k^2 \underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \underline{J}^i(\underline{r}) - \nabla \times \underline{M}^i(\underline{r}) \quad \text{con } k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \quad (7.1)$$

È necessario a questo punto definire la funzione di Green per il campo elettrico (volendo ne basta una, non ne servono necessariamente due come si è scelto di fare nel Capitolo 3). Poiché in generale il problema è di natura vettoriale, conviene definire la funzione di Green in forma diadica, come soluzione della seguente equazione:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') - k^2 \underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') = \underline{\underline{I}} \delta(\underline{r} - \underline{r}') \quad (7.2)$$

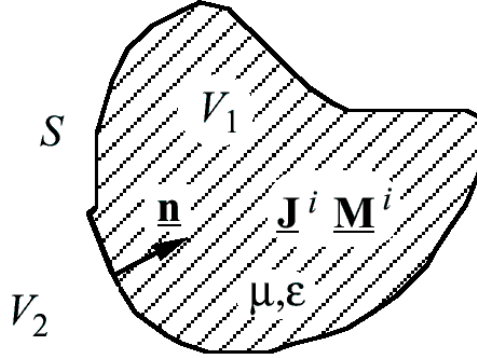


Figura 7.1: volume di riferimento per l'applicazione del teorema di equivalenza.

Si consideri ora la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \underline{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \underline{G} - \nabla \times \nabla \times \underline{E} \cdot \underline{G} = \\ = \underline{E} \cdot \underline{I} \delta(\underline{r} - \underline{r}') + \left(j\omega\mu \underline{J}^i + \nabla \times \underline{M}^i \right) \cdot \underline{G} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Il primo membro della (7.3) può essere espresso in una forma più conveniente, utilizzando l'identità diadica

$$\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{D}) = \nabla \times \underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{A} \cdot \nabla \times \underline{D}$$

da cui risulta

$$-\nabla \cdot \left[\underline{E} \times (\nabla \times \underline{G}) + (\nabla \times \underline{E}) \times \underline{G} \right] = \underline{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \underline{G} - \nabla \times \nabla \times \underline{E} \cdot \underline{G} \quad (7.4)$$

Al secondo membro della (7.3) e al primo della (7.4) può essere ora applicato il teorema della divergenza riferito al volume V_1 , ottenendo per $\underline{r}' \in V_1$, regione verso cui punta il versore $\underline{n}$, il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{I} \delta(\underline{r} - \underline{r}') dV = \\ = \oint_S \underline{n}(\underline{r}) \cdot \left\{ \underline{E}(\underline{r}) \times [\nabla \times \underline{G}(\underline{r}, \underline{r}')] + [\nabla \times \underline{E}(\underline{r})] \times \underline{G}(\underline{r}, \underline{r}') \right\} dS + \\ - \int_{V_1} \left[j\omega\mu \underline{J}^i(\underline{r}) + \nabla \times \underline{M}^i(\underline{r}) \right] \cdot \underline{G}(\underline{r}, \underline{r}') dV \end{aligned} \quad (7.5)$$

Se nella (7.5) si scambia il prodotto scalare con il versore della normale $\underline{n}$ con il prodotto vettore e si utilizza la prima equazione di Maxwell per esprimere il rotore del campo elettrico in funzione del campo magnetico (supponendo che sulla superficie S non ci siano correnti

imprese magnetiche), si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}') = & - \oint_S \underline{M}_S^e(\underline{r}) \cdot \nabla \times \underline{G}(\underline{r}, \underline{r}') dS - j\omega\mu \oint_S \underline{J}_S^e(\underline{r}) \cdot \underline{G}(\underline{r}, \underline{r}') dS + \\ & - \int_{V_1} \left[j\omega\mu \underline{J}^i(\underline{r}) + \nabla \times \underline{M}^i(\underline{r}) \right] \cdot \underline{G}(\underline{r}, \underline{r}') dV \quad \underline{r}' \in V_1 \end{aligned} \quad (7.6)$$

ove si sono introdotte le cosiddette correnti superficiali equivalenti, legate alle componenti tangenziali del campo elettromagnetico

$$\begin{cases} \underline{J}_S^e(\underline{r}) = \underline{n}(\underline{r}) \times \underline{H}(\underline{r}) \\ \underline{M}_S^e(\underline{r}) = \underline{E}(\underline{r}) \times \underline{n}(\underline{r}) \end{cases} \quad (\underline{n} \text{ verso l'interno}) \quad (7.7)$$

Scambiando ora di ruolo per comodità i vettori $\underline{r}$ ed $\underline{r}'$ ed indicando con ∇' l'operatore differenziale nabla applicato alla variabile $\underline{r}'$, si ottiene infine la cercata rappresentazione integrale (detta di Stratton-Chu) del campo elettrico nel volume V_1 , in termini delle componenti tangenziali del campo elettromagnetico sulla superficie di contorno S :

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}) = & - \oint_S \underline{M}_S^e(\underline{r}') \cdot \nabla' \times \underline{G}(\underline{r}', \underline{r}) dS' - j\omega\mu \oint_S \underline{J}_S^e(\underline{r}') \cdot \underline{G}(\underline{r}', \underline{r}) dS' + \\ & - \int_{V_1} \left[j\omega\mu \underline{J}^i(\underline{r}') + \nabla' \times \underline{M}^i(\underline{r}') \right] \cdot \underline{G}(\underline{r}', \underline{r}) dV' \quad \underline{r} \in V_1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Per dualità si può facilmente ricavare la rappresentazione integrale del campo magnetico, supponendo stavolta che sulla superficie S non ci siano correnti impresse elettriche.

$$\begin{aligned} \underline{H}(\underline{r}) = & \oint_S \underline{J}_S^e(\underline{r}') \cdot \nabla' \times \underline{G}_h(\underline{r}', \underline{r}) dS' - j\omega\varepsilon \oint_S \underline{M}_S^e(\underline{r}') \cdot \underline{G}_h(\underline{r}', \underline{r}) dS' + \\ & - \int_{V_1} \left[j\omega\varepsilon \underline{M}^i(\underline{r}') - \nabla' \times \underline{J}^i(\underline{r}') \right] \cdot \underline{G}_h(\underline{r}', \underline{r}) dV' \quad \underline{r} \in V_1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Nella (7.9) la diade $\underline{G}_h$ è anch'essa definita come soluzione dell'equazione (7.2), ma si può in generale richiedere che soddisfi a diverse condizioni al contorno rispetto alla funzione di Green utilizzata per esprimere il campo elettrico, e quindi è in generale diversa.

Si osservi che i secondi membri delle (7.8) e (7.9) sono pari rispettivamente ai campi elettrico e magnetico solo per $\underline{r} \in V_1$, mentre se il punto di osservazione cade al di fuori del volume V_1 considerato, tali quantità sono identicamente nulle, per le note proprietà della funzione delta di Dirac presente a primo membro della (7.5). Pur con tali limitazioni la (7.8) e la (7.9) costituiscono la rappresentazione integrale cercata e possono essere utilizzate per formulare equazioni integrali, qualora siano note le correnti impresse e le componenti tangenziali del campo elettromagnetico sulla superficie S . Tuttavia il loro utilizzo presume la conoscenza delle espressioni delle diadi di Green che vi compaiono.

Come si è detto, la (7.2) non definisce univocamente le diadi $\underline{G}$ o $\underline{G}_h$, poiché rimangono da specificare le condizioni al contorno. Queste possono essere scelte nella maniera più

conveniente, sia per ridurre la complessità della rappresentazione integrale, sia per ottenere una espressione di $\underline{\underline{G}}$ nota o particolarmente semplice ([90], [4]). La possibilità di determinare queste funzioni di Green in forma chiusa (o semichiusa) è tuttavia limitata a geometrie canoniche (tipicamente di tipo planare, cilindrico o sferico [90]). Nel seguito si farà sempre riferimento alla funzione di Green dello spazio libero, che si ottiene dalla (7.2) imponendo che siano soddisfatte le condizioni di radiazione all'infinito. In tal caso non vi è differenza fra le diadi $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{G}}_h$, le quali hanno entrambe, come si mostrerà fra breve, la seguente espressione [90]

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') = \left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) g(\underline{r}, \underline{r}') \quad (7.10)$$

ove la funzione g rappresenta la funzione di Green scalare per l'equazione di Helmholtz nello spazio libero, avente la ben nota espressione:

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (7.11)$$

La funzione di Green (7.10) si presta bene alla formulazione di equazioni integrali per oggetti tridimensionali di forma arbitraria.

Dalla (7.11) si vede che la funzione di Green ha un comportamento singolare quando il punto di osservazione $\underline{r}$ tende al punto di sorgente $\underline{r}'$. Questa è una caratteristica generale della funzione di Green ed ha importanti conseguenze analitiche e numeriche, che verranno esaminate con attenzione nel § 7.2.

7.1.1 Calcolo della funzione di Green diadica per l'equazione delle onde nello spazio libero

Si ricordino le formule (Campi I) in cui veniva introdotta la funzione di Green nello spazio libero per l'equazione di Helmholtz (per il potenziale vettore, ma se l'equazione differenziale e le condizioni al contorno sono le stesse, la funzione di Green è la stessa):

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\underline{J}_i$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_V \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{J}_i(\underline{r}') dV'$$

Quest'ultima si può scrivere ovviamente in forma diadica

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_V \underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}_i(\underline{r}') dV'$$

avendo posto

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{\underline{I}}$$

Si tratta evidentemente di una diade simmetrica.

La funzione di Green scalare

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

è soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 g + k^2 g = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

mentre si è visto in precedenza che la funzione di Green diadica $\underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}')$ è soluzione della:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\underline{G}} - k^2 \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{I}} \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Prendendo la divergenza di quest'ultima si ottiene (ricordando che anche per le diadi la divergenza di un rotore è identicamente nulla):

$$-k^2 \nabla \cdot \underline{\underline{G}} = \nabla \cdot [\underline{\underline{I}} \delta(\underline{r} - \underline{r}')]]$$

A questo punto si ricordi l'identità diadica (del tutto analoga alla corrispondente vettoriale)

$$\nabla \cdot (f \underline{\underline{D}}) = \nabla f \cdot \underline{\underline{D}} + f \nabla \cdot \underline{\underline{D}}$$

da cui si ottiene (essendo la diade unitaria una diade costante)

$$-k^2 \nabla \cdot \underline{\underline{G}} = \nabla \delta(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{\underline{I}} = \nabla \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Tornando adesso all'equazione differenziale per $\underline{\underline{G}}$ ed espandendo i rotori si ha (per la nota identità che vale anche per le diadi):

$$\nabla \nabla \cdot \underline{\underline{G}} - \nabla^2 \underline{\underline{G}} - k^2 \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{I}} \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Sfruttando la

$$\nabla \cdot \underline{\underline{G}} = -\frac{1}{k^2} \nabla \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

si ha

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{\underline{G}} + k^2 \underline{\underline{G}} &= -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla \delta - \underline{\underline{I}} \delta \\ \Rightarrow \quad (\nabla^2 + k^2) \underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') &= -\left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \delta(\underline{r} - \underline{r}') \end{aligned}$$

D'altra parte $-\delta(\underline{r} - \underline{r}') = (\nabla^2 + k^2) g(\underline{r}, \underline{r}')$ e quindi

$$(\nabla^2 + k^2) \underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') = \left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) (\nabla^2 + k^2) g(\underline{r}, \underline{r}')$$

(equazione di Helmholtz non omogenea in $\underline{\underline{G}}$).

Si osservi ora che $\underline{\underline{I}}(\nabla^2 + k^2)g = (\nabla^2 + k^2)\underline{\underline{I}}g$, essendo $\underline{\underline{I}}\nabla^2 g = \nabla^2(\underline{\underline{I}}g)$ dal momento che $\underline{\underline{I}}$ è una diade costante. Inoltre $\nabla\nabla(\nabla^2 + k^2)g = (\nabla^2 + k^2)\nabla\nabla g$ essendo $\nabla\nabla(\nabla^2 g) = \nabla^2(\nabla\nabla g)$, per via del teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Per cui risulta infine:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') &= (\nabla^2 + k^2) \left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right) g(\underline{r}, \underline{r}') \\ \Rightarrow (\nabla^2 + k^2) \left[\underline{\underline{G}} - \left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right) g \right] &= 0 \end{aligned}$$

Una particolare soluzione di questa equazione è ovviamente:

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') = \left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right) g(\underline{r}, \underline{r}')$$

L'integrale generale sarà ovviamente ottenuto aggiungendo soluzioni dell'equazione omogenea associata, per soddisfare le condizioni al contorno. Tuttavia la funzione

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

soddisfa alle condizioni di radiazione all'infinito, e così pure la $\underline{\underline{G}}$ da essa costruita, visto che si ha (come si è visto nel paragrafo 4.6)

$$\nabla g = - \left(jk + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) g \underline{u}$$

essendo $\underline{u} = \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$$\nabla\nabla g = \left[\left(-k^2 + j \frac{3k}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \right) \underline{u}\underline{u} - \left(\frac{jk}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \right) \underline{\underline{I}} \right] g(\underline{r}, \underline{r}')$$

È utile in proposito ricordare, nel caso unidimensionale, la formula di Leibnitz per la derivata n -sima di $1/x$:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x} \right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Allo stesso modo, nel nostro spazio tridimensionale, applicando il ∇ alla funzione g , che va come $1/|\underline{r}-\underline{r}'|$, si ottengono termini che vanno come $1/|\underline{r}-\underline{r}'|^2$, applicandolo due volte si ottengono termini che vanno come $1/|\underline{r}-\underline{r}'|^3$.

Concludendo, per il teorema di unicità la diade di Green così costruita è la soluzione del nostro problema.

7.2 Conseguenze del comportamento singolare della funzione di Green

Nel § 7.1 si è visto come, grazie alle proprietà della funzione di Green, definita dalla (7.2), sia possibile esprimere il campo elettromagnetico all'interno di un certo volume V_1 in funzione delle sue componenti tangenziali sulla superficie S , che racchiude il volume stesso, e delle correnti di volume interne.

Tale rappresentazione, tuttavia, presenta alcune difficoltà, qualora si voglia valutare il campo nei punti in cui sono presenti sorgenti. In tal caso la funzione di Green diviene infinita, poiché si verifica la condizione $\underline{r} = \underline{r}'$, e le funzioni integrande che compaiono nella (7.8) e nella (7.9) sono illimitate. Ciò non significa che la rappresentazione non sia più valida (è chiaro che lavorando con la delta di Dirac siamo abituati agli infiniti), ma diviene necessario impiegare opportune procedure di limite, al fine di valutare il contributo delle singolarità.

Nel seguito verranno considerate nulle le correnti impresse interne, poiché nella formulazione delle equazioni integrali possono sempre essere sostituite, come si farà nel § 7.3, dalla presenza di un opportuno campo incidente (ossia dal campo da esse generato nello spazio libero occupato dal mezzo che riempie la regione V_1 , cioè il campo che ci sarebbe se la discontinuità non ci fosse). Si segue insomma l'impostazione tipica dei problemi di scattering (concentrandoci quindi sul campo scatterato, dovuto alla presenza della discontinuità rappresentata dal mezzo diverso che riempie la regione V_2).

Si osservi che, poiché i secondi membri delle (7.8) e (7.9) eguagliano i campi elettrico e magnetico all'interno del volume V_1 , ma sono identicamente nulli all'esterno, essi presentano un comportamento fortemente discontinuo quando il punto $\underline{r}$ attraversa la superficie di contorno S . Appare ragionevole attendersi che ciò sia dovuto alla singolarità della funzione di Green e che, pertanto, il suo contributo non sia affatto trascurabile.

Nel seguito si proverà, utilizzando la funzione di Green dello spazio libero, che il contributo del termine di sorgente ($\underline{r} = \underline{r}'$) è responsabile del brusco annullamento dei secondi membri delle (7.8) e (7.9). In particolare è possibile provare che, per esempio nella (7.8), l'integrale superficiale contenente il rotore della funzione di Green diadica, quando il punto $\underline{r}$ attraversa S , presenta una discontinuità pari al campo elettrico tangenziale, mentre l'altro integrale superficiale in cui compare la funzione di Green diadica non derivata subisce una brusca variazione pari alla componente normale del campo elettrico [90]. La conclusione duale si ottiene per la (7.9).

Per dimostrare tale risultato è necessario riscrivere la (7.8), facendovi comparire esplicitamente la funzione di Green scalare per l'equazione di Helmholtz g . Facendo uso della (7.10) e di alcune formule di analisi vettoriale (annullamento del rotore di un gradiente, dell'identità diadica $\nabla \times (f \underline{\underline{D}}) = \nabla f \times \underline{\underline{D}} + f \nabla \times \underline{\underline{D}}$, del tutto analoga alla corrispondente vettoriale, lo scambio punto-croce e le proprietà della diade unitaria) si ottiene la seguente

espressione:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}) = & - \oint_S \underline{M}_S^e(\underline{r}') \times \nabla' g(\underline{r}', \underline{r}) dS' - j\omega\mu \oint_S \underline{J}_S^e(\underline{r}') g(\underline{r}', \underline{r}) dS' + \\ & - \frac{j\omega\mu}{k^2} \oint_S \underline{J}_S^e(\underline{r}') \cdot \nabla' \nabla' g(\underline{r}', \underline{r}) dS' \quad \underline{r} \in V_1 \end{aligned} \quad (7.12)$$

L'ultimo integrale della (7.12) contiene ancora un termine diadico, una doppia operazione di gradiente su g , che conviene in certi casi riscrivere in una forma più semplice. A tale scopo, si noti che poiché vale la seguente uguaglianza (per come è fatta la funzione g e come si può verificare dall'espressione esplicita del gradiente)

$$\nabla' g(\underline{r}', \underline{r}) = -\nabla g(\underline{r}', \underline{r}) \quad (7.13)$$

l'ultimo integrale della (7.12) può essere riscritto nella seguente forma, impiegando il teorema di inversione dell'ordine delle derivate e anche l'identità $\nabla \cdot (f \underline{A}) = \nabla f \cdot \underline{A} + f \nabla \cdot \underline{A}$

$$\begin{aligned} \oint_S \underline{J}_S^e(\underline{r}') \cdot \nabla' \nabla' g(\underline{r}', \underline{r}) dS' &= -\nabla \oint_S \underline{J}_S^e(\underline{r}') \cdot \nabla' g(\underline{r}', \underline{r}) dS' = \\ &= -\nabla \oint_S \nabla' \cdot [\underline{J}_S^e(\underline{r}') g(\underline{r}', \underline{r})] dS' + \nabla \oint_S [\nabla' \cdot \underline{J}_S^e(\underline{r}')] g(\underline{r}', \underline{r}) dS' = \\ &= -\oint_S [\nabla'_S \cdot \underline{J}_S^e(\underline{r}')] \nabla' g(\underline{r}', \underline{r}) dS' \end{aligned} \quad (7.14)$$

dove ∇'_S indica la proiezione dell'operatore ∇' sulla superficie S (si è in sostanza spostato un nabla dalla funzione di Green sulla corrente). La (7.14) è stata ottenuta in quanto

$$\oint_S \nabla' \cdot [\underline{J}_S^e(\underline{r}') g(\underline{r}', \underline{r})] dS' = \oint_S \nabla'_S \cdot [\underline{J}_S^e(\underline{r}') g(\underline{r}', \underline{r})] dS' = 0 \quad (7.15)$$

L'annullamento deriva dal teorema di Gauss bidimensionale, essendo S una superficie chiusa.

È possibile dimostrare che, anche per le correnti superficiali equivalenti, vale una equazione di continuità come per correnti reali [95]:

$$\begin{cases} \nabla_S \cdot [\underline{n}(\underline{r}) \times \underline{H}(\underline{r})] = \nabla_S \cdot \underline{J}_S^e(\underline{r}) = -j\omega \varrho_S^e = -j\omega [\varepsilon \underline{n}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r})] \\ \nabla_S \cdot [\underline{E}(\underline{r}) \times \underline{n}(\underline{r})] = \nabla_S \cdot \underline{M}_S^e(\underline{r}) = -j\omega \varrho_{m_S}^e = -j\omega [\mu \underline{n}(\underline{r}) \cdot \underline{H}(\underline{r})] \end{cases} \quad (7.16)$$

avendo così definito delle densità superficiali di carica (elettrica e magnetica) equivalenti.

Se si riscrive la (7.12), tenendo conto dei risultati espressi dalle (7.14) e (7.16), si ottiene (si è ripristinato l'ordine degli argomenti $\underline{r}$, $\underline{r}'$ nella funzione g)

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}) = & \oint_S [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{E}(\underline{r}')] \times \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' - j\omega\mu \oint_S [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{H}(\underline{r}')] g(\underline{r}, \underline{r}') dS' + \\ & + \oint_S [\underline{n}(\underline{r}') \cdot \underline{E}(\underline{r}')] \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' \quad \underline{r} \in V_1 \end{aligned} \quad (7.17)$$

ove non ci sono più termini diadici.

Le singolarità presenti nella (7.17) derivano dalla funzione di Green scalare e dal suo gradiente. Per quanto riguarda g , il suo comportamento è proporzionale a $1/|\underline{r} - \underline{r}'|$, ed essa risulta sommabile (cioè integrabile e con integrale finito), quando $\underline{r} \rightarrow \underline{r}'$, su una superficie (cfr. Analisi II). Più complessa, invece, è la valutazione del contributo del gradiente di g , che crescendo per $\underline{r} \rightarrow \underline{r}'$ come $1/|\underline{r} - \underline{r}'|^2$ richiede la definizione di integrale principale di Cauchy (cfr. Analisi II). Si consideri il punto $\underline{r}$ tendente alla superficie S e sia S_o l'intorno su S del punto limite di $\underline{r}$ sulla superficie stessa, come indicato in Fig. 7.2

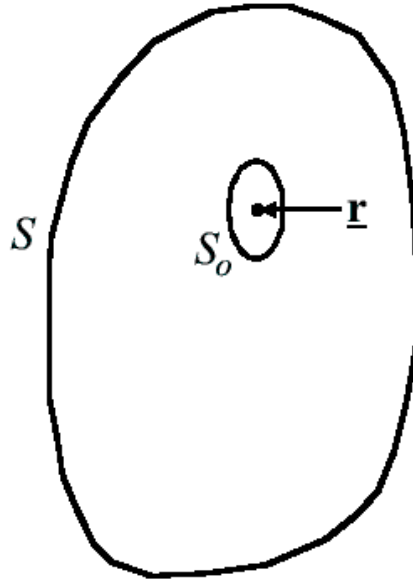


Figura 7.2: procedura di limite per il calcolo dell'integrale principale di Cauchy.

Poiché gli unici integrali da esaminare sono quelli contenenti il gradiente della funzione di Green scalare, si può considerare il seguente limite:

$$\lim_{S_o \rightarrow 0} \lim_{\underline{r} \rightarrow S} \left\{ \int_{S_o} [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{E}(\underline{r}')] \times \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' + \int_{S-S_o} [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{E}(\underline{r}')] \times \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' + \right. \\ \left. + \int_{S_o} [\underline{n}(\underline{r}') \cdot \underline{E}(\underline{r}')] \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' + \int_{S-S_o} [\underline{n}(\underline{r}') \cdot \underline{E}(\underline{r}')] \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' \right\} \quad (7.18)$$

Per ragioni fisiche il campo elettrico deve essere limitato o comunque variare molto più lentamente del gradiente della funzione di Green quando $\underline{r}$ è molto vicino a S . Ai fini dell'integrazione su S_o nel precedente limite, il campo elettrico può pertanto essere considerato costante, pari al valore che assume nel punto limite, e portato fuori dal segno di integrale.

Per quanto riguarda la funzione di Green, può essere trascurata la variazione del fattore esponenziale, dato che in S_o la quantità $k|\underline{r} - \underline{r}'|$ è molto piccola: in altri termini si consi-

dera soltanto il comportamento statico di g . Grazie a queste semplificazioni il calcolo del precedente limite può essere facilmente svolto e si ricava il seguente risultato [90, pag. 135], [105]:

$$\lim_{S_o \rightarrow 0} \lim_{\underline{r} \rightarrow S} \int_{S_o} \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' = \begin{cases} +\frac{n(\underline{r})}{2} & \text{se } \underline{r} \rightarrow S \text{ da } V_1 \\ -\frac{n(\underline{r})}{2} & \text{se } \underline{r} \rightarrow S \text{ da } V_2 \end{cases} \quad (7.19)$$

Gli integrali su S_o nella (7.18) forniscono, quindi, il seguente contributo (dove il doppio segno è riferito alla (7.19))

$$\begin{aligned} \pm \left[\underline{n}(\underline{r}) \times \underline{E}(\underline{r}) \right] \times \frac{n(\underline{r})}{2} \pm \left[\underline{n}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) \right] \frac{n(\underline{r})}{2} = \\ = \pm \frac{1}{2} \underline{E}_\tau(\underline{r}) \pm \frac{1}{2} E_n(\underline{r}) \underline{n}(\underline{r}) = \pm \frac{\underline{E}(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in S \end{aligned} \quad (7.20)$$

mentre quelli estesi al resto della superficie $S - S_o$ devono essere valutati come integrali principali e cioè ponendo $\underline{r}$ direttamente su S e considerando S_o come una piccola superficie circolare centrata in $\underline{r}$, il cui raggio viene fatto tendere a zero.

Si osservi che la (7.20) permette di affermare che, per $\underline{r} \in S$, la metà del valore del campo è data dal contributo singolare nel punto di osservazione, mentre l'altra metà è fornita dal valore dei due integrali principali riguardanti tutti gli altri punti della superficie e dall'integrale proprio. Questi due contributi si sommano a dare il campo totale se $\underline{r}$ tende a S da V_1 , mentre si sottraggono e danno campo nullo se $\underline{r}$ proviene da V_2 , come deve essere:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}) = \pm \frac{\underline{E}(\underline{r})}{2} + \oint_S^* \left\{ \left[\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{E}(\underline{r}') \right] \times \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') + \left[\underline{n}(\underline{r}') \cdot \underline{E}(\underline{r}') \right] \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') \right\} dS' + \\ - j\omega\mu \oint_S \left[\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{H}(\underline{r}') \right] g(\underline{r}, \underline{r}') dS' \quad \underline{r} \in S \end{aligned} \quad (7.21)$$

ove con l'asterisco si è indicato l'integrale principale. Come anticipato, infine, dalle (7.18) e (7.20) è facile dedurre che la discontinuità nel campo tangenziale deriva dal termine integrale superficiale nella (7.8) legato al rotore della funzione di Green diadica, mentre la discontinuità della componente normale è fornita dall'altro integrale di superficie della (7.8), in cui compare semplicemente $\underline{G}$.

L'analisi precedente può essere evidentemente applicata anche alla rappresentazione del campo magnetico, per la quale si ottengono risultati del tutto duali.

Si è visto infine come sia possibile rappresentare il campo elettromagnetico in una certa regione limitata, racchiusa da una superficie chiusa S . Tuttavia i risultati ottenuti sono validi anche nel caso in cui la regione di spazio sia illimitata, poiché la funzione di Green scelta soddisfa alle condizioni di radiazione all'infinito. Se, ad esempio, si vuole ricavare una rappresentazione del campo per la regione esterna ad S , in Fig. 7.1 indicata come V_2 , è sufficiente applicare il teorema della divergenza per le diadi al volume delimitato da S e da

una sfera di raggio sufficientemente grande da contenere tutte le sorgenti (il teorema della divergenza vale anche per regioni a connessione superficiale non semplice). Grazie appunto alle proprietà della funzione di Green, gli integrali relativi alla superficie sferica tendono a zero quando il suo raggio viene fatto tendere ad infinito. L'espressione che si ottiene per il campo elettrico esterno, in tal caso, è formalmente identica alle (7.12) o (7.17), a condizione che il versore della normale si intenda ora orientato verso l'esterno (cioè verso l'interno della regione V_2) e che i parametri caratteristici del mezzo μ , ε e k si riferiscano al materiale che occupa la regione V_2 .

7.3 Equazioni integrali per lo scattering

Si intende ora tornare al problema della formulazione di equazioni integrali, la cui soluzione permetta di calcolare il campo elettromagnetico. A tale scopo si è già osservato che, qualora siano presenti sorgenti impresse, risulta sempre conveniente sostituirle con il campo da esse prodotto, che verrà indicato come campo incidente. Questa scelta consente di trattare in maniera unificata sia l'eccitazione da parte di correnti impresse vicine, sia problemi di scattering per configurazioni di campo incidente particolarmente significative o convenienti. Senza perdita di generalità, quindi, si considererà solo il problema dello scattering tridimensionale da un oggetto finito in spazio libero, illuminato da una configurazione nota di campo $\underline{E}^i$, $\underline{H}^i$.

Possono essere individuate due regioni: quella occupata dall'oggetto, che si supporrà costituito di materiale isotropo ed omogeneo, eventualmente dissipativo, e quella esterna ad esso, rappresentante il resto dello spazio. I campi sulla superficie di separazione S tra le due regioni, che è anche la superficie di contorno dell'oggetto, con riferimento alla rappresentazione relativa ad una qualsiasi delle due regioni, possono essere così espressi:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{E}(\underline{r})}{2} = & \underline{E}^i(\underline{r}) - j\omega\mu \oint_S [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{H}(\underline{r}')] g(\underline{r}, \underline{r}') dS' + \\ & + \oint_S^* \left\{ [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{E}(\underline{r}')] \times \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') + [\underline{n}(\underline{r}') \cdot \underline{E}(\underline{r}')] \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') \right\} dS' \quad \underline{r} \in S \end{aligned} \quad (7.22)$$

e, dualmente

$$\begin{aligned} \frac{\underline{H}(\underline{r})}{2} = & \underline{H}^i(\underline{r}) + j\omega\varepsilon \oint_S [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{E}(\underline{r}')] g(\underline{r}, \underline{r}') dS' + \\ & + \oint_S^* \left\{ [\underline{n}(\underline{r}') \times \underline{H}(\underline{r}')] \times \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') + [\underline{n}(\underline{r}') \cdot \underline{H}(\underline{r}')] \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') \right\} dS' \quad \underline{r} \in S \end{aligned} \quad (7.23)$$

Una volta scritte le (7.22) e (7.23), per ottenere l'equazione integrale che risolve il problema non rimane che imporre le condizioni al contorno.

Consideriamo il caso importante di un oggetto perfettamente conduttore: si dovrà imporre che il campo elettrico tangenziale sia nullo, ovvero $\underline{n} \times \underline{E} = 0$ sulla superficie S . Partendo dalla (7.22) e tenendo conto della (7.16), si ottiene la seguente equazione integrale (che in questo caso applichiamo al volume V_2 , per cui $\underline{n}(\underline{r})$ è il versore della normale uscente dal volume racchiuso dalla superficie conduttrice ed entrante in V_2):

$$\underline{n}(\underline{r}) \times \underline{E}^i(\underline{r}) = \underline{n}(\underline{r}) \times \oint_S \left[j\omega\mu \underline{J}_S(\underline{r}') g(\underline{r}, \underline{r}') + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla' \cdot \underline{J}_S(\underline{r}') \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') \right] dS' \quad \underline{r} \in S \quad (7.24)$$

Si ricordi che il primo termine in parentesi quadra dà luogo ad un integrale proprio, il secondo ad uno improprio. La (7.24), che risulta un'equazione integrale per le correnti incognite, è indicata in letteratura con l'acronimo EFIE (Electric Field Integral Equation) ed è largamente usata per determinare il campo diffratto da oggetti conduttori [253], [252]. Si noti che in questo caso la corrente superficiale è una corrente effettiva, non una corrente equivalente.

Se si parte invece dalla rappresentazione integrale per il campo magnetico si ricava la seguente equazione, che in letteratura viene indicata con la sigla MFIE (Magnetic Field Integral Equation), tenendo conto del fatto che $\underline{n} \times \underline{E} = \underline{n} \cdot \underline{H} = 0$:

$$\frac{\underline{J}_S(\underline{r})}{2} - \underline{n}(\underline{r}) \times \oint_S^* \underline{J}_S(\underline{r}') \times \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}') dS' = \underline{n}(\underline{r}) \times \underline{H}^i(\underline{r}) \quad \underline{r} \in S \quad (7.25)$$

Se il corpo investito dalla radiazione incidente non è perfettamente conduttore (e le correnti risultano equivalenti), in generale non si può considerare l'equazione integrale per il solo campo elettrico o magnetico, poiché esse risultano accoppiate. Diviene necessario, in tal caso, risolvere un sistema di equazioni integrali.

7.4 Formulazione bidimensionale

In molti casi di interesse pratico e teorico accade che è sufficiente determinare la dipendenza del campo da due sole variabili spaziali. Ciò può verificarsi sia perché il campo è realmente indipendente da una variabile, sia perché la dipendenza da una delle coordinate è nota a priori, in virtù delle caratteristiche geometriche della struttura. In particolare questo accade quando la geometria è caratterizzata dalla proprietà di uniformità lungo una direzione ed il problema della dipendenza dalle coordinate trasversali rispetto a tale direzione diviene separabile da quello relativo alla coordinata longitudinale. Questo è il caso delle guide d'onda di sezione arbitraria, per le quali è nota la forma funzionale della dipendenza dalla coordinata longitudinale, mentre rimane da risolvere il problema elettromagnetico sui piani trasversali. Un'analoga semplificazione si incontra nello studio della diffrazione di un'onda piana da parte di un corpo cilindrico indefinito di sezione arbitraria.

È quindi utile disporre di una rappresentazione del campo che tenga conto di tali semplificazioni e renda più agevole l'analisi di questa classe di problemi. Vi sono diversi metodi attraverso i quali è possibile raggiungere tale obiettivo. Per continuità con l'approccio

seguito nei §§ precedenti, la rappresentazione in questione, che verrà indicata come bidimensionale, sarà ottenuta a partire da quella generale tridimensionale, precedentemente illustrata.

Si consideri una struttura cilindrica di sezione arbitraria, la cui direzione di uniformità sarà considerata coincidente con l'asse z , come indicato in Fig. 7.3. In tal caso si può supporre che tutte le componenti del campo abbiano una dipendenza da z del tipo $e^{-j\beta z}$. Ciò accade qualora si considerino le soluzioni modali guidate dalla struttura o il campo incidente abbia una dipendenza da z di tipo esponenziale. L'integrazione sulla superficie S nelle (7.22) e (7.23) può in tal caso essere suddivisa in un'integrazione sul bordo della sezione ed in una rispetto alla coordinata longitudinale z . Il vantaggio offerto dalla semplificazione descritta consiste nel poter risolvere l'integrazione lungo z analiticamente (come al solito, attraverso una trasformazione di Fourier).

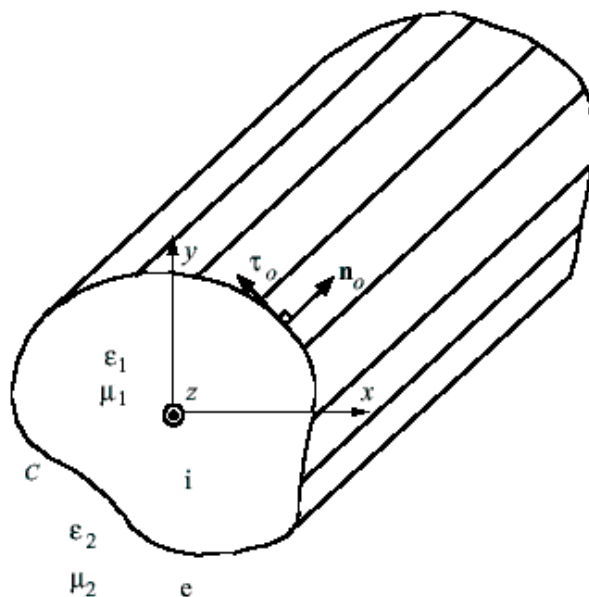


Figura 7.3: struttura scatterante o guidante cilindrica di sezione arbitraria.

Per illustrare in dettaglio questo procedimento, si riprenda l'equazione (7.12) per il campo elettrico e si assuma che per le correnti equivalenti che vi compaiono si possa porre, in virtù della geometria cilindrica:

$$\begin{cases} \underline{J}_S^e(\underline{r}) = \underline{J}_S^e(\underline{\varrho}) e^{-j\beta z} \\ \underline{M}_S^e(\underline{r}) = \underline{M}_S^e(\underline{\varrho}) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (7.26)$$

dove si è posto $\underline{r} = \underline{\varrho} + z \underline{z}_o$. Con queste posizioni, indicando con C il contorno della sezione,

la (7.12) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{\varrho}) e^{-j\beta z} = e^{-j\beta z} \left\{ - \oint_C \underline{M}_S^e(\underline{\varrho}') \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla' g(\underline{\varrho}', z'; \underline{\varrho}, z) e^{-j\beta(z'-z)} dz' \right] dC' + \right. \\ \left. - j\omega\mu \oint_C \underline{J}_S^e(\underline{\varrho}') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\underline{\varrho}', z'; \underline{\varrho}, z) e^{-j\beta(z'-z)} dz' \right] dC' + \right. \\ \left. - \frac{j\omega\mu}{k^2} \oint_C \underline{J}_S^e(\underline{\varrho}') \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla' \nabla' g(\underline{\varrho}', z'; \underline{\varrho}, z) e^{-j\beta(z'-z)} dz' \right] dC' \right\} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Si può vedere che le integrazioni rispetto a z' , che compaiono nella precedente espressione, possono tutte essere ricondotte alla valutazione della trasformata di Fourier della funzione di Green scalare e della sua derivata rispetto a z' , per le quali valgono i seguenti risultati [95]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{|\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|^2 + (z' - z)^2}}}{4\pi\sqrt{|\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|^2 + (z' - z)^2}} e^{-j\beta(z' - z)} dz' = \frac{1}{4j} H_o^{(2)}(k_t |\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|) \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{-jk\sqrt{|\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|^2 + (z' - z)^2}}}{4\pi\sqrt{|\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|^2 + (z' - z)^2}} \right] e^{-j\beta(z' - z)} dz' = \\ = j\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{|\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|^2 + (z' - z)^2}}}{4\pi\sqrt{|\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|^2 + (z' - z)^2}} e^{-j\beta(z' - z)} dz' = \frac{\beta}{4} H_o^{(2)}(k_t |\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Nelle (7.28) e (7.29) $k_t = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ è il numero d'onda trasverso e $H_o^{(2)}$ rappresenta la funzione di Hankel di ordine zero di seconda specie. Poiché dalla (7.29) si deduce che la derivata rispetto a z' corrisponde ad una moltiplicazione per $j\beta$, l'operatore ∇' diviene equivalente all'operatore $\nabla'_t + j\beta \underline{z}_o$.

Convienne introdurre nella sezione trasversa un sistema di coordinate cartesiane locali con coefficienti metrici unitari, i cui versori coincidano in ogni punto sul contorno C rispettivamente con il versore normale e tangente nel punto stesso (vedi Fig. 7.3), in modo che $\underline{z}_o = \underline{n}_o \times \underline{\tau}_o$. Si potrà, dunque, scrivere:

$$\begin{cases} \underline{J}_S^e(\underline{\varrho}) = J_\tau^e(\underline{\varrho}) \underline{\tau}_o + J_z^e(\underline{\varrho}) \underline{z}_o \\ \underline{M}_S^e(\underline{\varrho}) = M_\tau^e(\underline{\varrho}) \underline{\tau}_o + M_z^e(\underline{\varrho}) \underline{z}_o \\ \nabla_t = \underline{n}_o \frac{\partial}{\partial n} + \underline{\tau}_o \frac{\partial}{\partial \tau} \end{cases} \quad (7.30)$$

Se nella (7.27) si elimina la comune dipendenza esponenziale da z e si introducono i

risultati espressi dalle precedenti relazioni, si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{\varrho}) = \oint_C \left\{ -\underline{M}_S^e(\underline{\varrho}') \times (\nabla'_t + j\beta \underline{z}_o) - j\omega\mu \underline{J}_S^e(\underline{\varrho}') + \right. \\ \left. - \frac{j}{\omega\varepsilon} \left[\underline{J}_\tau^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial \tau'} + j\beta \underline{J}_z^e(\underline{\varrho}') \right] (\nabla'_t + j\beta \underline{z}_o) \right\} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' \end{aligned} \quad (7.31)$$

dove

$$g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) = \frac{1}{4j} H_o^{(2)}(k_t |\underline{\varrho}' - \underline{\varrho}|)$$

è la funzione di Green scalare bidimensionale in coordinate cilindriche.

Procedendo in maniera duale, può essere derivata l'espressione per il campo magnetico:

$$\begin{aligned} \underline{H}(\underline{\varrho}) = \oint_C \left\{ \underline{J}_S^e(\underline{\varrho}') \times (\nabla'_t + j\beta \underline{z}_o) - j\omega\varepsilon \underline{M}_S^e(\underline{\varrho}') + \right. \\ \left. - \frac{j}{\omega\mu} \left[\underline{M}_\tau^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial \tau'} + j\beta \underline{M}_z^e(\underline{\varrho}') \right] (\nabla'_t + j\beta \underline{z}_o) \right\} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' \end{aligned} \quad (7.32)$$

Nel § 7.2 si è mostrato come sia possibile spostare una delle operazioni di derivazione nell'ultimo integrale della (7.12) dalla funzione di Green alla corrente. Tale espediente permette di ridurre la singolarità dell'integrando per $\underline{r} = \underline{r}'$, in modo da rendere possibile la valutazione della (7.12) sulla superficie di contorno, attraverso una opportuna procedura di limite (integrale principale). Appare superfluo ripetere qui tale derivazione, poiché le corrispondenti espressioni nel caso bidimensionale possono essere immediatamente dedotte a partire dalle (7.22) e (7.23), utilizzando le posizioni espresse dalla (7.26) e le relazioni (7.28) e (7.29).

Nelle (7.31) e (7.32), invece, tutte le operazioni di derivazione agiscono sulla funzione di Green. Ciò rende più complessa la valutazione del campo sul contorno, ma può presentare alcuni vantaggi nel momento in cui si deve procedere alla risoluzione numerica delle equazioni integrali.

7.5 Valutazione del contributo delle singolarità della funzione di Green

Nel § 7.4 si è visto come sia possibile esprimere il campo in una struttura cilindrica in funzione delle sue componenti tangenziali e longitudinali sulla superficie della struttura. Si vuole ora estendere la rappresentazione espressa dalle (7.31) e (7.32) anche a punti giacenti esattamente sul bordo C . Si è già accennato al fatto che nelle (7.31) e (7.32) sono presenti termini singolari che non possono essere trattati utilizzando l'approccio descritto nel § 7.2. Nel seguito, quindi, tutti i termini contenenti una singolarità verranno esaminati in dettaglio, al fine di ricavare come le (7.31) e (7.32) debbano essere valutate su C .

Se si utilizza l'espressione di nabra trasverso data dalla (7.30), si ottiene per la (7.31), separando i contributi nelle varie direzioni:

$$\begin{aligned}
 \underline{E}(\underline{\varrho}) = & \oint_C \underline{n}'_o \left[-j\beta M_\tau^e(\underline{\varrho}') + M_z^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial \tau'} + \right. \\
 & \left. + \frac{\beta}{\omega\varepsilon} J_z^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{j}{\omega\varepsilon} J_\tau^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau' \partial n'} \right] g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' + \\
 & + \oint_C \underline{\tau}'_o \left[-M_z^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial n'} - j\omega\mu J_\tau^e(\underline{\varrho}') + \frac{\beta}{\omega\varepsilon} J_z^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{j}{\omega\varepsilon} J_\tau^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} \right] g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' + \\
 & + z_o \oint_C \left[M_\tau^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial n'} - j\omega\mu J_z^e(\underline{\varrho}') + \frac{\beta}{\omega\varepsilon} J_\tau^e(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial \tau'} + \frac{j\beta^2}{\omega\varepsilon} J_z^e(\underline{\varrho}') \right] g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau'
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Nell'ipotesi in cui il punto di osservazione cada su un tratto regolare del contorno (ci potrebbe infatti essere il problema delle punte), il campo tangenziale è una funzione continua e limitata. La valutazione della (7.33) può, allora, essere effettuata semplicemente valutando il comportamento delle diverse derivate della funzione di Green che vi compaiono. Infatti, la singolarità della semplice g_t è di tipo logaritmico (visto che così va la $H_o^{(2)}$) e risulta integrabile. Al fine di semplificare la trattazione verrà considerato un contorno C poligonale. Tale approssimazione non è in realtà riduttiva, poiché ogni contorno regolare può essere ben approssimato da una poligonale, anzi di fatto è spesso proprio ciò che si fa al momento della risoluzione numerica. Inoltre, poiché siamo interessati a punti molto vicini a quello di osservazione, se questo non coincide con un punto angoloso, in un suo intorno il bordo può considerarsi rettilineo. La trattazione del caso in cui il punto coincida con un vertice del contorno può essere trovata in [95].

Si consideri un intorno simmetrico C_a , di lunghezza $2a$, di un punto $\underline{\varrho}^o$ in un tratto regolare del contorno. Siano $\underline{\varrho}$ il punto di osservazione, tendente a $\underline{\varrho}^o$ lungo la normale al contorno passante per $\underline{\varrho}^o$, e $\underline{\varrho}'$ il punto di integrazione sul segmento C_a . Si sceglie un riferimento cartesiano locale con origine in $\underline{\varrho}^o$, in modo che τ coincida con y e n con x . Le coordinate di $\underline{\varrho}^o$, $\underline{\varrho}$ e $\underline{\varrho}'$ sono rispettivamente $(0, 0)$, $(x, 0)$ e $(0, y')$. La Fig. 7.4 mostra schematicamente il segmento C_a e le grandezze su esso definite.

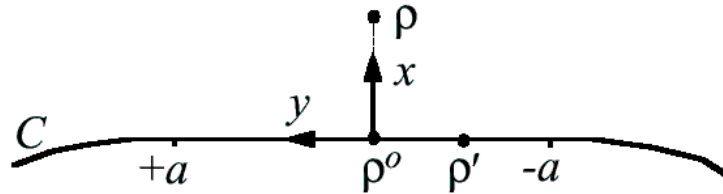


Figura 7.4:

La valutazione del contributo dei vari termini singolari consiste nel calcolo, quando $\underline{\varrho}$ è molto vicino a $\underline{\varrho}^o$, del relativo integrale su C_a , che viene poi considerato nel limite per

$x \rightarrow 0$ e per $a \rightarrow 0$. Da un esame della (7.33), detta f la generica componente delle correnti superficiali equivalenti, si deduce che occorre considerare quattro casi, che coinvolgono derivate prime o derivate seconde della funzione di Green rispetto alle coordinate trasverse. Consideriamo qui le derivate prime.

I caso

$$\begin{aligned} \lim_{C_a \rightarrow 0} \lim_{\underline{g} \rightarrow \underline{g}^o} \int_{C_a} f(\underline{g}') \frac{\partial}{\partial \tau'} g_t(\underline{g}', \underline{g}) d\tau' = \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-a}^a f(y') \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{x^2 + (y')^2} \right] dy' \end{aligned} \quad (7.34)$$

L'integrale a secondo membro può essere svolto per parti, fornendo:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[f(a) - f(-a) \right] \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left(k_t \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \right. \\ \left. - \int_{-a}^a \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{x^2 + (y')^2} \right] \frac{df(y')}{dy'} dy' \right\} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Per le ipotesi di regolarità di f , l'integrale che compare nella (7.35) ha limite nullo, poiché la funzione di Hankel di ordine zero ha una singolarità solo logaritmica. Per quanto riguarda il primo termine, la quantità in parentesi quadra è infinitesima per $a \rightarrow 0$. Per sapere di che ordine, possiamo applicare il teorema di Lagrange (cfr. Analisi I) alla funzione f sull'intervallo $[-a, a]$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[f(a) - f(-a) \right] \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left(k_t \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right\} = \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \left[f'(\xi) 2a \frac{1}{4j} H_o^{(2)}(k_t a) \right] = 0 \end{aligned} \quad \xi \in (-a, a) \quad (7.36)$$

Si conclude che il contributo complessivo delle singolarità dei termini contenenti la derivata tangenziale di g_t è nullo.

II caso

$$\begin{aligned} \lim_{C_a \rightarrow 0} \lim_{\underline{g} \rightarrow \underline{g}^o} \int_{C_a} f(\underline{g}') \frac{\partial}{\partial n'} g_t(\underline{g}', \underline{g}) d\tau' = \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-a}^a f(y') \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{(x' - x)^2 + (y')^2} \right] \right\}_{x'=0} dy' \end{aligned} \quad (7.37)$$

Svolgendo la derivazione indicata a secondo membro si ricava la seguente espressione:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{f(y')}{4j} \frac{-k_t x}{\sqrt{x^2 + (y')^2}} H_o^{(2)'} \left[k_t \sqrt{x^2 + (y')^2} \right] dy' \quad (7.38)$$

Per valutare la (7.38) conviene ricordare che $H_o^{(2)'}(u) = -H_1^{(2)}(u)$ e quindi utilizzare l'espressione asintotica della $H_1^{(2)}(u)$, data dalla relazione [227]:

$$H_1^{(2)}(u) \cong \frac{2j}{\pi u} \quad \text{per } u \rightarrow 0 \quad (7.39)$$

L'integrale che si ottiene a seguito di queste semplificazioni è il seguente:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{f(y')}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y')^2} dy' = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{f(y')}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y'} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y'}{x} \right) \right] dy' \quad (7.40)$$

Se si integra la (7.40) per parti e si osserva che il termine integrale, non contenendo alcuna singolarità, non contribuisce al limite, si ricava (l'arcotangente è una funzione dispari):

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \left[f(a) + f(-a) \right] \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} \left(\frac{a}{x} \right) \right\} = \begin{cases} +\frac{f(0)}{2} & \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ -\frac{f(0)}{2} & \text{per } x \rightarrow 0^- \end{cases} \quad (7.41)$$

La (7.41) pone in evidenza che il limite fornisce due valori differenti a seconda che si consideri x tendente a zero da valori positivi o negativi. Poiché si è assunto che l'asse x abbia la stessa orientazione della normale, x tendente a zero da valori positivi corrisponde a considerare il limite per $\underline{\varrho} \rightarrow \underline{\varrho}^o$ dalla regione verso la quale punta il versore normale, mentre, viceversa, se $x \rightarrow 0^-$ si sta tendendo al bordo dalla regione che vede il versore normale uscente. Riassumendo quanto finora visto, si ottiene il seguente risultato.

$$\lim_{C_a \rightarrow 0} \lim_{\underline{\varrho} \rightarrow \underline{\varrho}^o} \int_{C_a} f(\underline{\varrho}') \frac{\partial}{\partial n'} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' = \begin{cases} +\frac{f(\underline{\varrho}^o)}{2} & \text{se } (\underline{\varrho} - \underline{\varrho}^o) \cdot \underline{n}_o > 0 \\ -\frac{f(\underline{\varrho}^o)}{2} & \text{se } (\underline{\varrho} - \underline{\varrho}^o) \cdot \underline{n}_o < 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

I restanti due casi, che coinvolgono le derivate seconde, sono discussi nel § 7.6.

La precedente analisi mostra che, se il punto di osservazione è sul contorno C , alcuni dei termini singolari forniscono un contributo finito che “salta fuori” dal segno di integrale. Il valore complessivo fornito dalle singolarità nella (7.33) può essere facilmente calcolato sfruttando i risultati dei casi I, II, III, IV e risulta essere:

$$\pm \frac{n_o}{2} \left[\frac{\beta}{\omega \varepsilon} J_z^e(\underline{\varrho}) + \frac{j}{\omega \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} J_\tau^e(\underline{\varrho}) \right] \pm \frac{\tau_o}{2} \left[-M_z^e(\underline{\varrho}) \right] \pm \frac{z_o}{2} \left[M_\tau^e(\underline{\varrho}) \right] \quad (7.43)$$

L'indeterminazione nel segno dipende ovviamente dalla regione dalla quale si tende al contorno, secondo quanto espresso dalla (7.42) [e (7.50)]. Ricordando le relazioni che legano le correnti superficiali ai campi elettrico e magnetico si può scrivere:

$$\begin{cases} M_\tau^e = E_z \\ M_z^e = -E_\tau \\ J_\tau^e = -H_z \\ J_z^e = H_\tau \end{cases} \quad (7.44)$$

Esprimendo la (7.43) in funzione delle componenti del campo si ottiene la seguente:

$$\pm \frac{n_o}{2} \left[\frac{\beta}{\omega \varepsilon} H_\tau(\underline{\varrho}) + \frac{1}{j\omega \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} H_z(\underline{\varrho}) \right] \pm \frac{\tau_o}{2} [E_\tau(\underline{\varrho})] \pm \frac{z_o}{2} [E_z(\underline{\varrho})] \quad (7.45)$$

Se si considera la componente lungo $\underline{n}_o$ del rotore del campo magnetico, scritto nel riferimento cartesiano locale relativo al punto di osservazione, e si ricorda che il campo ha una dipendenza da z del tipo $e^{-j\beta z}$, si ottiene:

$$E_n = \frac{1}{j\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \tau} + \frac{\beta}{\omega \varepsilon} H_\tau \quad (7.46)$$

La (7.46) permette di concludere che il contributo complessivo delle singolarità nel punto di osservazione è pari a metà del campo elettrico nel punto stesso, come nel caso tridimensionale:

$$\pm \frac{n_o}{2} E_n(\underline{\varrho}) \pm \frac{\tau_o}{2} E_\tau(\underline{\varrho}) \pm \frac{z_o}{2} E_z(\underline{\varrho}) = \pm \frac{1}{2} \underline{E}(\underline{\varrho}) \quad (7.47)$$

I risultati ottenuti possono essere applicati immediatamente anche alla (7.32), che fornisce l'espressione del campo magnetico, con conclusioni del tutto duali.

La rappresentazione bidimensionale proposta può, dunque, essere utilizzata per esprimere il campo anche sul contorno. In tal caso gli integrali devono essere in generale valutati come integrali principali e ad essi deve essere aggiunto il termine espresso dalla (7.47). Particolare attenzione richiede il calcolo dell'integrale con contributo della singolarità non finito, per il quale è necessario utilizzare la definizione di parte finita.

7.6 Appendice sulle singolarità

III caso

$$\begin{aligned} \lim_{C_a \rightarrow 0} \lim_{\underline{\varrho} \rightarrow \underline{\varrho}^o} \int_{C_a} f(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau' \partial n'} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' = \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-a}^a f(y') \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x'} \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{(x' - x)^2 + (y')^2} \right] \right\}_{x'=0} dy' \end{aligned} \quad (7.48)$$

Poiché nella precedente, come nella (7.34), compare una derivata rispetto alla variabile di integrazione y' , si può procedere con un'integrazione per parti, ottenendo:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{f(a) - f(-a)}{4j} \right] \frac{k_t x}{\sqrt{x^2 + a^2}} H_1^{(2)} \left(k_t \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \right. \\ \left. - \int_{-a}^a \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{(x' - x)^2 + (y')^2} \right] \right\}_{x'=0} \frac{df(y')}{dy'} dy' \right\} \end{aligned} \quad (7.49)$$

Il primo addendo nella (7.49) è evidentemente nullo per $x \rightarrow 0$, mentre il secondo può essere considerato come un integrale del tipo analizzato nel II caso. Si ottiene pertanto il seguente risultato finale:

$$\lim_{C_a \rightarrow 0} \lim_{\underline{\varrho} \rightarrow \underline{\varrho}^o} \int_{C_a} f(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau' \partial n'} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} f(\underline{\varrho}^o) & \text{se } (\underline{\varrho} - \underline{\varrho}^o) \cdot \underline{n}_o > 0 \\ +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} f(\underline{\varrho}^o) & \text{se } (\underline{\varrho} - \underline{\varrho}^o) \cdot \underline{n}_o < 0 \end{cases} \quad (7.50)$$

IV caso

$$\begin{aligned} \lim_{C_a \rightarrow 0} \lim_{\underline{\varrho} \rightarrow \underline{\varrho}^o} \int_{C_a} f(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' &= \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-a}^a f(y') \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{x^2 + (y')^2} \right] dy' \end{aligned} \quad (7.51)$$

Anche in questo caso può essere utilizzata la formula di integrazione per parti, con la quale si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{k_t}{4j} \left[f(a) + f(-a) \right] \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} H_1^{(2)} \left(k_t \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \right. \\ \left. - \int_{-a}^a \frac{df(y')}{dy'} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{4j} H_o^{(2)} \left[k_t \sqrt{x^2 + (y')^2} \right] dy' \right\} \end{aligned} \quad (7.52)$$

L'integrale che compare nella (7.52) ricade nel I caso, a condizione che anche la derivata seconda della f sia regolare, e quindi non fornisce alcun contributo nel punto di osservazione. Per valutare il primo termine occorre fare riferimento alla (7.39), che descrive il comportamento della funzione di Hankel di ordine 1 di seconda specie, per argomenti tendenti a zero.

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{k_t}{4j} \left[f(a) + f(-a) \right] \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} H_1^{(2)} \left(k_t \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right\} &= \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ -\frac{k_t}{4j} \left[f(a) + f(-a) \right] H_1^{(2)}(k_t a) \right\} = -\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(0)}{\pi a} \end{aligned} \quad (7.53)$$

A differenza di tutti i casi precedentemente visti, non si ottiene un limite finito. Ciò pone serie difficoltà per la valutazione numerica dei termini di questo tipo. Una possibile soluzione è quella di suddividere l'integrale sul contorno in due contributi: uno derivante dall'integrazione su $C - C_a$, che non presenta problemi in quanto il punto singolare è escluso, e l'altro corrispondente al contributo di C_a . Se si considera a molto piccolo, ma non nullo, quest'ultimo termine può essere approssimato da $-f(\underline{\varrho}^o)/(\pi a)$. Questo tipo di valutazione corrisponde alla definizione di parte finita secondo Hadamard [5]. Si potrà

pertanto scrivere la seguente formula, che riassume la definizione dell'operatore “Parte Finita”, indicato con PF :

$$\begin{aligned} \lim_{\underline{\varrho} \rightarrow \underline{\varrho}^o} \oint_C f(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}) d\tau' &= PF \left[\oint_C f(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}^o) d\tau' \right] = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_{C-C_a} f(\underline{\varrho}') \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} g_t(\underline{\varrho}', \underline{\varrho}^o) d\tau' - \frac{f(\underline{\varrho}^o)}{\pi a} \right] \end{aligned} \quad (7.54)$$

Capitolo 8

Problemi di Sturm-Liouville in elettromagnetismo

8.1 Introduzione. Problemi di Sturm-Liouville in una variabile.

Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, non omogenea a coefficienti variabili:

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (8.1)$$

dove λ è un parametro in generale complesso indipendente da x . L'intervallo $[a, b]$ può essere in generale anche illimitato.

Le funzioni $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $a_2(x)$ sono reali e si assumono le seguenti proprietà:

1. $a_2(x)$, $\frac{da_1}{dx}$ e $\frac{d^2 a_0}{dx^2}$ sono continue in $[a, b]$ (questa richiesta è legata ad un'eventuale integrazione per parti)
2. $a_0(x) \neq 0$ per $a < x < b$

Si richiede anche ovviamente che $y(x)$ sia due volte derivabile e che $f(x)$, in generale complessa, sia continua a tratti.

Possiamo sempre riscrivere questa equazione differenziale molto generale nella seguente forma canonica detta di Sturm-Liouville:

$$-\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad (8.2)$$

Esplicitando le derivate si ottiene:

$$-\frac{1}{w(x)} p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{w(x)} \frac{dp}{dx} \frac{dy}{dx} + q(x) y(x) - \lambda y(x) = f(x)$$

Effettuando infatti le trasformazioni

$$q(x) \equiv a_2(x) \quad (8.3a)$$

$$p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \quad \text{integrale indefinito, da cui } \frac{dp}{dx} = p(x) \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad (8.3b)$$

$$w(x) = -\frac{p(x)}{a_0(x)} \quad (8.3c)$$

(da cui deriva che $q(x), p(x), w(x)$ sono funzioni reali) si può verificare che sostituendo le (8.3) nella (8.2) si riottiene la (8.1).

La (8.2) si può riscrivere in forma operatoriale come segue:

$$(L - \lambda)y = f \quad \text{oppure} \quad L_\lambda y = f$$

ove $L_\lambda = L - \lambda$ e il cosiddetto operatore di Sturm-Liouville L è definito dalla:

$$L(\cdot) = -\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d(\cdot)}{dx} \right] + q(x) (\cdot)$$

Si noti che la forma $L y = \lambda y + f$ mette insieme in un certo senso problema di autovalori e problema deterministico.

Un primo esempio molto importante in elettromagnetismo è fornito dall'equazione differenziale di Helmholtz unidimensionale (o equazione dei moti armonici) non omogenea

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) = -f(x)$$

In questo caso si ha semplicemente:

$$q(x) \equiv 0 \quad p(x) \equiv 1 \quad w(x) \equiv 1 \quad \lambda = k^2$$

Si consideri come secondo esempio l'equazione di Bessel non omogenea di ordine ν :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = -f(x)$$

Dal confronto con la (8.1) si ha

$$a_0(x) \equiv -1 \quad a_1(x) = -\frac{1}{x} \quad a_2(x) = \frac{\nu^2}{x^2} \quad \lambda = k^2$$

(si avrebbe $\lambda = 1$ nella forma normalizzata dell'equazione, ovvero ponendo $\xi = kx$, cfr. Campi I). Per trasformarla in forma di Sturm-Liouville si usano le (8.3) ottenendo¹

$$q(x) = \frac{\nu^2}{x^2} \quad p(x) = x \quad w(x) = x$$

¹Si noti che il fattore moltiplicativo ϱ appare negli integrali dei prodotti scalari in coordinate polari proprio a causa dell'espressione di $w(x)$ trovata.

per cui l'equazione diventa:

$$-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{\nu^2}{x^2} - k^2 \right) y(x) = f(x)$$

Nel seguito distingueremo tre forme del problema di Sturm-Liouville.

- Nel primo tipo si considera un intervallo limitato $[a, b]$ e valori reali per il parametro λ e per la funzione f .
- Nel secondo tipo si estende l'analisi a valori complessi per λ e per f , e si ottiene quindi in generale una soluzione $y(x)$ complessa².
- Nel terzo tipo l'intervallo $[a, b]$ può anche essere illimitato.

Nella letteratura matematica i problemi del primo e del secondo tipo sono detti problemi di Sturm-Liouville regolari, mentre quelli del terzo tipo sono detti singolari. Problemi del terzo tipo importanti nelle applicazioni di elettromagnetismo sono definiti dalle seguenti situazioni.

1. L'intervallo è semi-infinito, per esempio verso destra $[a, +\infty)$. Si dice allora che in questo problema c'è un punto singolare per $x \rightarrow +\infty$.
2. L'intervallo è $(-\infty, +\infty)$. Allora ci sono punti singolari per $x \rightarrow \pm\infty$.
3. L'intervallo è finito, ma $p(x)$ presenta uno zero in un estremo. In questo caso c'è un punto singolare in quell'estremo.
4. L'intervallo è semi-infinito, per esempio $[a, +\infty)$, e $p(x)$ si annulla nell'estremo finito. In questo caso ci sono punti singolari per $x \rightarrow +\infty$ e nell'estremo finito.

Per il problema del primo tipo (siamo completamente nel campo reale) si considera il seguente prodotto scalare

$$\langle u(x), v(x) \rangle = \int_a^b w(x) u(x) v(x) dx$$

[si noti la presenza della funzione $w(x)$, che gioca il ruolo di funzione peso]. Per il secondo ed il terzo tipo si ha invece (siamo sui complessi)

$$\langle u(x), v(x) \rangle = \int_a^b w(x) u(x) v^*(x) dx$$

²Si osservi tuttavia che l'operatore L è reale (essendo costituito da derivazioni rispetto a variabili reali e moltiplicazioni per funzioni reali), ossia $(Ly)^* = L y^*$. Infatti un operatore L si dice reale se Ly è reale ogni volta che y è reale (un esempio in tre dimensioni è il noto operatore $-\nabla^2$).

Si considerano per il problema di Sturm-Liouville le seguenti condizioni al contorno generali

$$\begin{aligned}\alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + \alpha_{13} y(b) + \alpha_{14} y'(b) &= \alpha \\ \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + \alpha_{23} y(b) + \alpha_{24} y'(b) &= \beta\end{aligned}$$

Per il problema di primo tipo α , β e i coefficienti α_{ij} sono reali. Per il secondo tipo solo gli α_{ij} sono reali (perché la y è in generale complessa).

Si parla di condizioni al contorno omogenee se $\alpha = \beta = 0$. Si hanno invece le cosiddette condizioni non mescolate (*unmixed*) se

$$\begin{aligned}\alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) &= \alpha & \implies & \alpha_{13} = \alpha_{14} = 0 \\ \alpha_{23} y(b) + \alpha_{24} y'(b) &= \beta & \implies & \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0\end{aligned}$$

Le condizioni iniziali (cioè nell'estremo a dell'intervallo) sono del tipo

$$\begin{aligned}y(a) &= \alpha & \implies & \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = 0 \\ y'(a) &= \beta & \implies & \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = 0\end{aligned}$$

Si hanno infine condizioni periodiche [di periodo $(b - a)$] se

$$y(a) = y(b) \quad y'(a) = y'(b)$$

Si tratta di un caso particolare di condizioni omogenee, con inoltre

$$\alpha_{13} = -\alpha_{11} \quad \alpha_{12} = \alpha_{14} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{24} = -\alpha_{22} \quad \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0.$$

Si può dimostrare che le condizioni al contorno *unmixed* porgono un operatore L autoaggiunto, le condizioni iniziali no. Per le condizioni periodiche, per avere l'operatore autoaggiunto deve essere $p(a) = p(b)$.

8.2 Soluzione del problema di Sturm-Liouville del secondo tipo

Per problemi di Sturm-Liouville del secondo tipo, e come caso particolare per problemi del primo tipo (cambia ovviamente il prodotto scalare, in sostanza spariscono le coniugazioni perché non ce n'è bisogno), date due funzioni $u, v \in L^2[a, b]$ (spazio di Hilbert delle funzioni quadrato sommabili in $[a, b]$, cioè col modulo quadro integrabile e con integrale finito), si ha:

$$\begin{aligned}\langle L u, v \rangle &= \int_a^b \left\{ -\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x) u(x) \right\} v^*(x) w(x) dx = \\ &= \int_a^b -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] v^*(x) dx + \int_a^b q(x) u(x) v^*(x) w(x) dx\end{aligned}$$

Integrando due volte per parti il termine con le parentesi quadre si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \langle L u, v \rangle &= - \left\{ \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] v^*(x) \right\}_a^b + \int_a^b \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] \frac{dv^*}{dx} dx + \int_a^b q(x) u(x) v^*(x) w(x) dx = \\
 &= - \left[p(x) \frac{du}{dx} v^*(x) \right]_a^b + \left[u(x) p(x) \frac{dv^*}{dx} \right]_a^b - \int_a^b u(x) \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dv^*}{dx} \right] dx + \\
 &\quad + \int_a^b q(x) u(x) v^*(x) w(x) dx = \\
 &= \int_a^b u(x) \left\{ -\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dv^*}{dx} \right] + q(x) v^*(x) \right\} w(x) dx + \\
 &\quad - \left\{ p(x) \left[\frac{du}{dx} v^*(x) - u(x) \frac{dv^*}{dx} \right] \right\}_a^b = \\
 &= \langle u, L v \rangle + J(u, v) \Big|_{x=a}^{x=b}
 \end{aligned}$$

ove si è sfruttata la proprietà di realtà dell'operatore $(L v)^* = L v^*$. Il termine

$$J(u, v) = -p \left(\frac{du}{dx} v^* - u \frac{dv^*}{dx} \right)$$

viene detto congiunto (nullo se l'operatore L è autoaggiunto).

La procedura di soluzione del problema di Sturm-Liouville consiste allora nello scrivere

$$\begin{aligned}
 \langle L_\lambda y, g_a \rangle &= \langle L y, g_a \rangle + \langle -\lambda y, g_a \rangle = \\
 &= \langle y, L g_a \rangle + \langle y, -\lambda^* g_a \rangle + J(y, g_a) \Big|_{x=a}^{x=b} = \\
 &= \langle y, L_\lambda^* g_a \rangle + J(y, g_a) \Big|_{x=a}^{x=b}
 \end{aligned}$$

dove $L_\lambda^* = L - \lambda^*$ e $g_a(x, \xi)$ è la funzione di Green dell'operatore aggiunto L_λ^* , definita dalla:

$$L_\lambda^* g_a(x, \xi) = \frac{\delta(x - \xi)}{w(x)} \quad a \leq \xi \leq b$$

[come si vede, nel caso più generale di definizione della funzione di Green occorre mettere anche il peso $w(x)$ a denominatore]. Sostituendo nella precedente si ottiene

$$y(\xi) = \langle f, g_a \rangle - J(y, g_a) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

ossia esplicitamente:

$$y(\xi) = \int_a^b f(x) g_a^*(x, \xi) w(x) dx + \left\{ p(x) \left[\frac{dy}{dx} g_a^*(x, \xi) - y(x) \frac{dg_a^*(x, \xi)}{dx} \right] \right\}_{x=a}^{x=b}$$

Questa è la soluzione del problema, a patto di poter determinare la funzione di Green aggiunta. Come è noto, non è mai necessario trovare tale funzione direttamente. Si ha infatti (Campi I) $g_a^*(x, \xi) = g(\xi, x)$, ove $g(x, \xi)$ è la funzione di Green dell'operatore L_λ . Per cui risulta, scambiando di ruolo la x e la ξ :

$$y(x) = \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) w(\xi) d\xi + \left\{ p(\xi) \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} g(x, \xi) - y(\xi) \frac{dg(x, \xi)}{d\xi} \right] \right\}_{\xi=a}^{\xi=b}$$

Se poi l'operatore L è autoaggiunto, si ha $g_a^*(x, \xi) = g(x, \xi)$ cioè $g(\xi, x) = g(x, \xi)$, proprietà di simmetria, che si traduce nella reciprocità del problema, in quanto si possono scambiare il punto di sorgente e quello di osservazione.

Si ricordi infine che dal punto di vista matriciale l'operatore aggiunto corrisponde alla matrice trasposta coniugata. Come è noto, una matrice si dice hermitiana se coincide con la sua trasposta coniugata, e tali matrici hanno la proprietà di avere autovalori reali.

8.3 Estensione a tre dimensioni del problema di Sturm-Liouville

Si consideri ora l'operatore $L = -\nabla^2$ (operatore reale) in una regione tridimensionale chiusa e limitata V , delimitata da una superficie S . Ci interessa risolvere l'equazione:

$$L_\lambda y = f$$

con al solito $L_\lambda = L - \lambda = -\nabla^2 - \lambda$, $L_\lambda^* = L - \lambda^* = -\nabla^2 - \lambda^*$. Le condizioni al contorno sono del tipo:

$$\alpha_1 y \Big|_S + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial n} \Big|_S = \alpha$$

con la normale uscente da S . Questa condizione ha due importanti casi particolari. Se $\alpha_2 = 0$ si ha $y|_S = \alpha/\alpha_1$ (problema di Dirichlet non omogeneo). Se invece $\alpha_1 = 0$ si ha $\partial y/\partial n|_S = \alpha/\alpha_2$ (problema di Neumann non omogeneo). Ovviamente si può avere un tipo di condizione al contorno su parte di S , un altro tipo sulla parte restante.

Il problema si risolve moltiplicando per la funzione di Green dell'aggiunto $g_a(\underline{r}, \underline{r}')$ data dalla ($w \equiv 1$)

$$L_\lambda^* g_a(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}') \quad \implies \quad (L_\lambda^* g_a)^* = \delta(\underline{r} - \underline{r}') = L_\lambda g_a^*(\underline{r}, \underline{r}')$$

Il prodotto scalare risulta

$$\langle L_\lambda y, g_a \rangle = \int_V (-\nabla^2 y) g_a^* dV + \int_V (-\lambda y) g_a^* dV$$

Adoperando nel primo integrale il lemma di Green nella seconda forma (analogo tridimensionale dell'integrazione per parti)

$$\int_V -\psi \nabla^2 \phi dV = \int_V -\phi \nabla^2 \psi dV + \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \underline{n} dS$$

si ha:

$$\int_V g_a^* (-\nabla^2 y) dV = \int_V y (-\nabla^2 g_a^*) dV + \oint_S (y \nabla g_a^* - g_a^* \nabla y) \cdot \underline{n} dS$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \int_V y (-\nabla^2 g_a^*) dV &= \langle y, -\nabla^2 g_a^* \rangle \\ \int_V (-\lambda y) g_a^* dV &= \int_V y (-\lambda^* g_a)^* dV = \langle y, -\lambda^* g_a \rangle \end{aligned}$$

Si ottiene allora, definendo congiunto l'integrale superficiale (nullo se l'operatore L è autoaggiunto):

$$\begin{aligned} \langle L_\lambda y, g_a \rangle &= \langle f, g_a \rangle = \langle y, -\nabla^2 g_a^* \rangle + \langle y, -\lambda^* g_a \rangle + \oint_S (-\nabla y g_a^* + y \nabla g_a^*) \cdot \underline{n} dS = \\ &= \langle y, (-\nabla^2 - \lambda^*) g_a^* \rangle + J(y, g_a) \Big|_S = \langle y, L_\lambda^* g_a \rangle + J(y, g_a) \Big|_S = \\ &= \langle y, \delta(\underline{r} - \underline{r}') \rangle + J(y, g_a) \Big|_S \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} y(\underline{r}') &= \langle f, g_a \rangle - J(y, g_a) \Big|_S = \\ &= \int_V g_a^*(\underline{r}, \underline{r}') f(\underline{r}) dV + \oint_S [\nabla y(\underline{r}) g_a^*(\underline{r}, \underline{r}') - y(\underline{r}) \nabla g_a^*(\underline{r}, \underline{r}')] \cdot \underline{n} dS \end{aligned}$$

D'altra parte $g_a^*(\underline{r}, \underline{r}') = g(\underline{r}', \underline{r})$, per cui si ha, scambiando i ruoli di $\underline{r}$ e $\underline{r}'$:

$$y(\underline{r}) = \int_V g(\underline{r}, \underline{r}') f(\underline{r}') dV' + \oint_S [\nabla' y(\underline{r}') g(\underline{r}, \underline{r}') - y(\underline{r}') \nabla' g(\underline{r}, \underline{r}')] \cdot \underline{n} dS'$$

La funzione di Green risulta certamente simmetrica se l'operatore L è autoaggiunto, ma può esserlo anche in altri casi.

8.4 Determinazione della funzione di Green in forma chiusa per un generico problema di Sturm-Liouville

In corrispondenza ad un'eccitazione impulsiva, l'equazione di Sturm-Liouville si può scrivere

$$-\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x} \right] + q(x) g(x, \xi) - \lambda g(x, \xi) = \frac{\delta(x - \xi)}{w(x)}$$

Per $x \neq \xi$ l'equazione precedente diventa omogenea. Conviene risolvere separatamente l'equazione nei due intervalli $[a, \xi)$ e $(\xi, b]$, e poi imporre la continuità in ξ .

Detta $y_1(x)$ una soluzione (non banale) dell'equazione differenziale omogenea nell'intervallo $[a, \xi)$, soddisfacente le condizioni al contorno in $x = a$, si può porre $g_1(x, \xi) = A_1(\xi) y_1(x)$, con $A_1(\xi)$ da determinare. Analogamente nell'altro intervallo si potrà individuare un'altra soluzione indipendente che soddisfi le condizioni in $x = b$:

$$g_2(x, \xi) = A_2(\xi) y_2(x) \quad \xi < x \leq b$$

Imponendo la continuità della funzione di Green per $x = \xi$ si ha:

$$A_1(\xi) y_1(\xi) = A_2(\xi) y_2(\xi) \quad \implies \quad -A_1(\xi) y_1(\xi) + A_2(\xi) y_2(\xi) = 0$$

Si può a questo punto osservare che la funzione di Green ha per $x = \xi$ una discontinuità nella derivata (rispetto a x) pari a $1/p(\xi)$. Infatti integrando rispetto a x nell'intervallo $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ l'equazione non omogenea moltiplicata per $-w(x)$ si ha

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x} \right] dx + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} [-q(x) w(x) + \lambda w(x)] g(x, \xi) dx = -1$$

da cui:

$$\left[p(x) \frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x} \right]_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} [-q(x) w(x) + \lambda w(x)] g(x, \xi) dx = -1$$

Se ora facciamo tendere a zero ε , l'ultimo integrale si annulla per la continuità di $q(x)$, $w(x)$ e $g(x, \xi)$ in ξ . Resta allora, per la continuità di $p(x)$

$$p(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial g_2(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{x=\xi+\varepsilon} - \frac{\partial g_1(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{x=\xi-\varepsilon} \right] = -1$$

ossia:

$$\frac{\partial g_2(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{x=\xi+} - \frac{\partial g_1(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{x=\xi-} = -\frac{1}{p(\xi)}$$

Dovrà allora essere:

$$A_2(\xi) y_2'(\xi) - A_1(\xi) y_1'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}$$

Abbiamo dunque un sistema di due equazioni nelle incognite $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$. Risolvendolo si ottiene (sottintendendo la dipendenza da ξ)

$$A_2 = \frac{A_1 y_1}{y_2} \implies \frac{A_1 y_1}{y_2} y_2' - A_1 y_1' = -\frac{1}{p} \implies A_1 \left(\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_2} \right) = -\frac{1}{p}$$

ed infine

$$A_1(\xi) = -\frac{y_2(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} \implies A_2(\xi) = -\frac{y_1(\xi)}{p(\xi) W(\xi)}$$

essendo

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$$

il Wronskiano di y_1 e y_2 .

L'espressione in forma chiusa per la funzione di Green è dunque:

$$g(x, \xi) = -\frac{1}{p(\xi) W(\xi)} \begin{cases} y_1(x) y_2(\xi) & a \leq x \leq \xi \\ y_2(x) y_1(\xi) & \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

dove, ripetiamo, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, che soddisfano rispettivamente le condizioni al contorno per $x = a$ e per $x = b$.

A proposito si può dimostrare un'utile proprietà dell'equazione di Sturm-Liouville: il prodotto $p(x) W(x)$ è una costante rispetto a x . Tale prodotto è in generale funzione del parametro λ .

Come esempio consideriamo l'equazione di Helmholtz non omogenea monodimensionale nell'intervallo $[0, a]$, con le condizioni al contorno (di Dirichlet omogenee) $y(0) = y(a) = 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) = -f(x) \quad 0 \leq x \leq a$$

caso particolare di problema di Sturm-Liouville con (cfr. § 8.1)

$$q(x) \equiv 0, \quad p(x) \equiv 1, \quad w(x) \equiv 1 \quad \implies \quad L = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \lambda = k^2$$

La corrispondente equazione omogenea ammette due soluzioni indipendenti, una $y_1(x)$ valida nell'intervallo $0 \leq x < \xi$ e che deve annullarsi nell'origine, $y_1(x) = \sin(kx)$, e un'altra $y_2(x)$ valida nell'intervallo $\xi < x \leq a$ e che deve annullarsi in a , $y_2(x) = \sin[k(a-x)]$. Le ampiezze sono state poste unitarie per semplicità e senza ledere la generalità, perché esse apparirebbero anche nell'espressione del wronskiano e si eliderebbero. Il wronskiano delle due (che per quanto detto dovrà risultare indipendente da x e dipendente in generale da k , essendo $p(x) \equiv 1$) si può scrivere:

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) = \\ &= -\sin(kx) k \cos[k(a-x)] - \sin[k(a-x)] k \cos(kx) = \\ &= -k \sin(kx + ka - kx) = -k \sin(ka) \end{aligned}$$

La funzione di Green in forma chiusa è dunque:

$$g(x, \xi) = \frac{1}{k \sin(ka)} \begin{cases} \sin(kx) \sin[k(a-\xi)] & 0 \leq x \leq \xi \\ \sin[k(a-x)] \sin(k\xi) & \xi \leq x \leq a \end{cases}$$

Questa forma della funzione di Green indica che essa possiede delle singolarità (polari) per $ka = m\pi \Rightarrow k = m\pi/a$, ossia in corrispondenza degli autovalori dell'operatore $-d^2/dx^2$. Tale risultato è di validità più generale, come si vedrà nel paragrafo 8.5.

È chiaro che quest'espressione in forma chiusa è utile quando si conosca la soluzione dell'equazione omogenea. Tuttavia, anche in tal caso, la rappresentazione in forma chiusa può non essere la più conveniente. La forma alternativa è attraverso una serie di autofunzioni ortonormali, che soddisfino le condizioni al contorno (modi), come si vedrà nel seguito.

Nei successivi sottoparagrafi vedremo due applicazioni elettromagnetiche della formula vista per problemi bidimensionali, rispettivamente in coordinate cilindriche e cartesiane. In entrambi i casi ci si ricondurrà ad un problema monodimensionale mediante sviluppi in serie di Fourier.

8.4.1 Calcolo della funzione di Green per l'equazione di Helmholtz bidimensionale nello spazio libero

Si assuma che una sorgente di linea elettrica infinita (per sorgente di linea si intende in genere un filo infinito percorso da corrente) sia posta a $\varrho = \varrho'$ e $\varphi = \varphi'$ nello spazio libero. Il problema è supposto indipendente da z .

La componente di campo E_z soddisfa l'equazione (in assenza di correnti magnetiche, cfr. § 6.4):

$$\nabla_t^2 E_z(\varrho, \varphi) + k_t^2 E_z(\varrho, \varphi) = j\omega\mu J_z(\varrho, \varphi)$$

La funzione di Green $G(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}')$ soddisfa invece l'equazione

$$\nabla_t^2 G(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}') + k_t^2 G(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}') = -\delta(\underline{\varrho} - \underline{\varrho}')$$

($\underline{\varrho}, \underline{\varrho}'$, vettori nel piano xy), colle stesse condizioni al contorno di E_z (cioè la condizione di radiazione all'infinito). Il campo si ottiene dalla

$$E_z(\varrho, \varphi) = -j\omega\mu \int_S G(\varrho, \varphi; \varrho', \varphi') J_z(\varrho', \varphi') dS'$$

Si osservi che, in coordinate cilindriche, la funzione $\delta(\underline{r} - \underline{r}')$ si esprime in generale come:

$$\frac{1}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z')$$

Se non c'è dipendenza da φ si ha

$$\frac{1}{2\pi\varrho} \delta(\varrho - \varrho') \delta(z - z')$$

e se non c'è neppure dipendenza da z rimane

$$\frac{1}{2\pi\varrho} \delta(\varrho - \varrho')$$

Nel nostro caso bidimensionale, si ha:

$$\delta(\underline{\varrho} - \underline{\varrho}') = \frac{1}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho') \delta(\varphi - \varphi')$$

L'equazione della funzione di Green diventa dunque, ricordando l'espressione dell'operatore ∇_t^2 in coordinate polari:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial G}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + k_t^2 G(\varrho, \varphi; \varrho', \varphi') = -\frac{1}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho') \delta(\varphi - \varphi')$$

Per la periodicità rispetto a φ , è possibile, come si è visto nel Capitolo 6, sviluppare la funzione di Green in serie di Fourier bilatera:

$$G(\varrho, \varphi; \varrho', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\varrho; \varrho', \varphi') e^{jm\varphi}$$

Sostituendo la serie nell'equazione segue:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{m^2}{\varrho^2} + k_t^2 \right) g_m(\varrho; \varrho', \varphi') e^{jm\varphi} = -\frac{1}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho') \delta(\varphi - \varphi')$$

Moltiplicando i due membri per $e^{-jn\varphi}$, integrando in φ tra 0 e 2π e sfruttando la nota condizione di ortonormalità degli esponenziali

$$\int_0^{2\pi} e^{j(m-n)\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{mn}$$

si ottiene:

$$\left[\frac{\partial^2 g_n}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial g_n}{\partial \varrho} + \left(k_t^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) g_n(\varrho; \varrho', \varphi') \right] 2\pi = -\frac{1}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho') e^{-jn\varphi'} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Si tratta per ogni n di un problema di Sturm-Liouville monodimensionale nella variabile ϱ , rappresentato da un'equazione di Bessel non omogenea:

$$\frac{d^2 g}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dg}{d\varrho} + \left(k_t^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) g(\varrho) = -\frac{e^{-jn\varphi'}}{2\pi} \frac{\delta(\varrho - \varrho')}{\varrho}$$

Risulta allora, come già visto nel paragrafo 8.1

$$q(\varrho) = \frac{n^2}{\varrho^2} \quad p(\varrho) = \varrho \quad w(\varrho) = \varrho$$

Si desidera determinare la funzione di Green $g(\varrho, \varrho')$ in forma chiusa: consideriamo allora due soluzioni dell'equazione omogenea corrispondente, rispettivamente per $0 \leq \varrho < \varrho'$ e per $\varrho > \varrho'$. Nella prima regione, limitata, scegliamo la soluzione ad onda stazionaria:

$$g_1(\varrho) = A J_n(k_t \varrho) + B Y_n(k_t \varrho) \quad 0 \leq \varrho < \varrho'$$

Poiché i campi devono essere finiti ovunque, includendo l'origine, deve essere $B = 0$. Poniamo inoltre per semplicità $A = 1$.

Nella seconda regione, illimitata, scegliamo la soluzione ad onda progressiva:

$$g_2(\varrho) = C H_n^{(1)}(k_t \varrho) + D H_n^{(2)}(k_t \varrho) \quad \varrho > \varrho'$$

Siccome però siamo nello spazio libero, consideriamo solo l'onda cilindrica uscente $H_n^{(2)}$, per cui poniamo $C = 0$. Poniamo inoltre per semplicità $D = 1$.

A questo punto occorre il Wronskiano $W(\varrho)$ di g_1 e g_2 , ossia $g_1(\varrho) g_2'(\varrho) - g_2(\varrho) g_1'(\varrho)$:

$$W(\varrho) = k_t \left[J_n(k_t \varrho) H_n^{(2)'}(k_t \varrho) - H_n^{(2)}(k_t \varrho) J_n'(k_t \varrho) \right]$$

Tenendo conto della definizione della funzione di Hankel di seconda specie $H_n^{(2)} = J_n - j Y_n$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} W(\varrho) &= k_t \left[J_n(k_t \varrho) J_n'(k_t \varrho) - j J_n(k_t \varrho) Y_n'(k_t \varrho) - J_n(k_t \varrho) J_n'(k_t \varrho) + j Y_n(k_t \varrho) J_n'(k_t \varrho) \right] = \\ &= -j k_t \left[J_n(k_t \varrho) Y_n'(k_t \varrho) - Y_n(k_t \varrho) J_n'(k_t \varrho) \right] \end{aligned}$$

Si ricordi adesso l'espressione del Wronskiano delle funzioni di Bessel $J_n(x)$ e $Y_n(x)$:

$$J_n(x) Y_n'(x) - Y_n(x) J_n'(x) = \frac{2}{\pi x}$$

Per cui si ottiene³:

$$W(\varrho) = -j k_t \frac{2}{\pi k_t \varrho} = -j \frac{2}{\pi \varrho}$$

Si può allora scrivere l'espressione per la funzione di Green in forma chiusa, ripristinando i fattori che moltiplicavano la delta

$$\begin{aligned} g_n(\varrho; \varrho', \varphi') &= -\frac{e^{-jn\varphi'}}{2\pi} \frac{1}{-j \frac{2}{\pi}} \begin{cases} J_n(k_t \varrho) H_n^{(2)}(k_t \varrho') & 0 \leq \varrho \leq \varrho' \\ H_n^{(2)}(k_t \varrho) J_n(k_t \varrho') & \varrho \geq \varrho' \end{cases} \\ &= -e^{-jn\varphi'} \frac{j}{4} \begin{cases} J_n(k_t \varrho) H_n^{(2)}(k_t \varrho') & 0 \leq \varrho \leq \varrho' \\ H_n^{(2)}(k_t \varrho) J_n(k_t \varrho') & \varrho \geq \varrho' \end{cases} \end{aligned}$$

e per la funzione di Green di partenza si ha:

$$G(\varrho, \varphi; \varrho', \varphi') = -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn(\varphi-\varphi')} \begin{cases} J_n(k_t \varrho) H_n^{(2)}(k_t \varrho') & 0 \leq \varrho \leq \varrho' \\ H_n^{(2)}(k_t \varrho) J_n(k_t \varrho') & \varrho \geq \varrho' \end{cases}$$

³si verifica fra l'altro che

$$p(\varrho) W(\varrho) = -j \frac{2}{\pi} = \text{cost}$$

Si ricordi a questo punto la cosiddetta formula di Graf, o teorema di addizione per le funzioni di Hankel (cfr. § 6.4), la quale stabilisce che:

$$H_o^{(1,2)}(k_t |\underline{\varrho} - \underline{\varrho}'|) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn(\varphi - \varphi')} \begin{cases} J_n(k_t \varrho) H_n^{(1,2)}(k_t \varrho') & 0 \leq \varrho \leq \varrho' \\ H_n^{(1,2)}(k_t \varrho) J_n(k_t \varrho') & \varrho \geq \varrho' \end{cases}$$

Dal confronto risulta:

$$G(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}') = -\frac{j}{4} H_o^{(2)}(k_t |\underline{\varrho} - \underline{\varrho}'|)$$

Questa è appunto la nota funzione di Green per l'equazione di Helmholtz bidimensionale in coordinate cilindriche nello spazio libero.

8.4.2 Funzione di Green per una cavità metallica rettangolare

Consideriamo ora un altro problema bidimensionale, stavolta in coordinate cartesiane. Si consideri una cavità metallica parallelepipeda di dimensioni a, b lungo x, y (risonatore cilindrico a sezione rettangolare), e l'equazione

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_t^2 E_z(x, y) = j\omega\mu J_z(x, y)$$

dove E_z rappresenta la componente di campo elettrico di una configurazione di un modo TM, indipendente da z (si ricordi che nel caso TE, invece, una dipendenza da z ci doveva essere per forza). J_z può rappresentare la densità di corrente della sonda di campo che è usata per eccitare i modi all'interno della cavità metallica.

La funzione di Green $G(x, y; x', y')$ soddisferà l'equazione:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k_t^2 G(x, y; x', y') = -\delta(x - x') \delta(y - y')$$

e si avrà per il campo elettrico l'espressione:

$$E_z(x, y) = -j\omega\mu \int_0^a \int_0^b G(x, y; x', y') J_z(x', y') dx' dy'$$

La funzione di Green si può rappresentare, essendo a supporto limitato, ad esempio in x , fra 0 e a , come una serie di Fourier di periodo $2a$, in modo da poter scegliere sia la rappresentazione in termini di soli seni, sia di soli coseni (cfr. § 6.7). Prendiamo la prima, che soddisfa poi già le condizioni al contorno per $x = 0, a$, e scriviamo:

$$G(x, y; x', y') = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y; x', y') \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$$

Sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 g_m}{\partial y^2} + \left[k_t^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] g_m(y; x', y') \right\} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) = -\delta(x - x') \delta(y - y')$$

Moltiplicando ambo i membri per $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, integrando in x fra 0 ed a e ricordando la (cfr. § 6.8)

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} a/2 & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = 0; m \neq n \end{cases}$$

si ottiene

$$\left\{ \frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2} + \left[k_t^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] g_n(y; x', y') \right\} \frac{a}{2} = -\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right) \delta(y - y') \quad n = 1, 2, \dots$$

ovvero ponendo $k_y^2 = k_t^2 - (n\pi/a)^2$ si ha per ogni n un'equazione di Helmholtz unidimensionale in y

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g(y) = -\frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right) \delta(y - y')$$

Le due soluzioni per la corrispondente equazione omogenea sono (tenendo conto delle condizioni al contorno di Dirichlet omogenee per $y = 0, b$ e usando per semplicità ampiezze unitarie)

$$\begin{aligned} g_1(y) &= \sin(k_y y) & 0 \leq y < y' \\ g_2(y) &= \sin[k_y(b - y)] & y' < y \leq b \end{aligned}$$

Il Wronskiano $W(y) = g_1(y) g_2'(y) - g_2(y) g_1'(y)$ risulta

$$\begin{aligned} W(y) &= -\sin(k_y y) k_y \cos[k_y(b - y)] - k_y \cos(k_y y) \sin[k_y(b - y)] = \\ &= -k_y \left\{ \sin(k_y y) \cos[k_y(b - y)] + \sin[k_y(b - y)] \cos(k_y y) \right\} = \\ &= -k_y \sin(k_y y + k_y b - k_y y) = \\ &= -k_y \sin(k_y b) \end{aligned}$$

[non dipende da y , essendo $p(y) \equiv 1$].

Usando allora la formula generale per la funzione di Green in forma chiusa si ha:

$$\begin{aligned} g(y; x', y') &= -\frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right) \frac{1}{-k_y \sin(k_y b)} \begin{cases} \sin(k_y y) \sin[k_y(b - y')] & 0 \leq y \leq y' \\ \sin[k_y(b - y)] \sin(k_y y') & y' \leq y \leq b \end{cases} \\ &= \frac{2}{a k_y} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)}{\sin(k_y b)} \begin{cases} \sin(k_y y) \sin[k_y(b - y')] & 0 \leq y \leq y' \\ \sin[k_y(b - y)] \sin(k_y y') & y' \leq y \leq b \end{cases} \end{aligned}$$

La funzione di Green di partenza si può allora scrivere

$$G(x, y; x', y') = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \frac{2}{a k_y} \frac{1}{\sin(k_y b)} \begin{cases} \sin(k_y y) \sin[k_y(b - y')] & 0 \leq y \leq y' \\ \sin[k_y(b - y)] \sin(k_y y') & y' \leq y \leq b \end{cases}$$

ove

$$k_y = \sqrt{k_t^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

8.5 Operatori autoaggiunti, il metodo della rappresentazione spettrale

Il fatto che le autofunzioni di un operatore autoaggiunto formino una base ortogonale (e quindi sempre ortonormalizzabile) in $L^2[a, b]$, ci permette di risolvere il problema di Sturm-Liouville del secondo tipo (di cui il primo è un caso particolare) autoaggiunto in termini delle autofunzioni $u_n(x)$ dell'operatore L e quindi adesso entra in gioco un problema di autovalori.

Infatti presa una qualsiasi funzione $v(x) \in L^2[a, b]$ (spazio di Hilbert di dimensione infinita, quindi infinite autofunzioni indipendenti) si può scrivere:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x)$$

con i coefficienti di Fourier dati da $\alpha_n = \langle v(x), u_n(x) \rangle$ (quest'ultima relazione è vera per l'ortonormalità).

Si consideri ora sull'intervallo $[a, b]$ il problema di Sturm-Liouville $L_\lambda y = f$ con λ ed f in genere complessi (attenzione al fatto che λ non è un autovalore), con condizioni al contorno omogenee che rendano l'operatore L autoaggiunto. Associato al problema di Sturm-Liouville si consideri il seguente problema di autovalori $L u_n = \lambda_n u_n$ ove $\lambda_n \in \mathbb{R}$ essendo l'operatore autoaggiunto. Assegniamo alle u_n le stesse condizioni al contorno che abbiamo assegnato ad y .

Consideriamo il seguente prodotto interno:

$$\langle (L - \lambda)y, u_n \rangle = \langle y, (L - \lambda^*) u_n \rangle + J(y, u_n) \Big|_a^b$$

ove il congiunto è nullo per il fatto che l'operatore L è autoaggiunto. Si ha allora:

$$\langle f, u_n \rangle = \langle y, (\lambda_n - \lambda^*) u_n \rangle = (\lambda_n - \lambda) \langle y, u_n \rangle \implies \langle y, u_n \rangle = \frac{\langle f, u_n \rangle}{\lambda_n - \lambda}$$

e sostituendo nella serie si ha per la soluzione del nostro problema:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} u_n(x)$$

Nella formula precedente, se in particolare la funzione di forzamento f è la delta (pesata), si ha:

$$g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle \frac{\delta(x' - \xi)}{w(x')}, u_n(x') \right\rangle}{\lambda_n - \lambda} u_n(x)$$

dove il prodotto interno è fatto rispetto a x' . Eseguendo l'integrale (pesato) si ha:

$$g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n^*(\xi)}{\lambda_n - \lambda}$$

Si hanno dunque dei poli semplici della funzione di Green per $\lambda = \lambda_n$ (come si era già osservato in un caso particolare nel paragrafo 8.4). Questa forma della funzione di Green si chiama serie bilineare.

8.5.1 Esempi di applicazione

Come primo esempio, riprendiamo il problema visto alla fine del paragrafo 8.4 ossia l'equazione di Helmholtz non omogenea monodimensionale nell'intervallo $[0, a]$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) = -f(x)$$

con le condizioni al contorno (di Dirichlet omogenee) $y(0) = y(a) = 0$. Tali condizioni al contorno sono *unmixed* e l'operatore è dunque autoaggiunto.

Ricaviamo ora un'espressione alternativa della funzione di Green in serie di autofunzioni, che dovranno soddisfare l'equazione omogenea

$$-\frac{d^2 u_n}{dx^2} = \lambda_n u_n(x)$$

con le condizioni al contorno $u_n(0) = u_n(a) = 0$.

Convieni al solito, essendo l'intervallo limitato, utilizzare una soluzione in termini di onde stazionarie:

$$u_n(x) = A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)$$

ove $k_n = \sqrt{\lambda_n}$. Gli autovalori permessi si trovano applicando le condizioni al contorno, per cui $A_n = 0$ e

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

L'autofunzione risulta

$$u_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

La costante B_n è determinata dalla condizione di ortonormalità

$$\int_0^a u_m(x) u_n^*(x) dx = \delta_{mn}$$

per cui (il coefficiente B_n può essere considerato reale senza perdita di generalità)

$$\begin{aligned} B_n^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = 1 &\implies B_n^2 \frac{a}{2} = 1 \implies \\ B_n = B = \sqrt{\frac{2}{a}} &\implies u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

In forma di serie bilineare la funzione di Green può dunque essere scritta come

$$g(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} \xi\right)}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2}$$

che coincide con la soluzione in forma chiusa ricavata alla fine del paragrafo 8.4, anche se sembra piuttosto diversa analiticamente.

È evidente che la funzione di Green è simmetrica. Inoltre essa possiede una singolarità quando

$$k^2 = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{a} \quad \Rightarrow^5 \quad f = \frac{n}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Se dunque k^2 coincide con uno degli autovalori, la funzione di Green diverge. Se le frequenze esterne della sorgente coincidono colle frequenze naturali (caratteristiche) del sistema si parla di risonanza. Quando questo si verifica il campo del modo la cui frequenza naturale coincide colla frequenza di eccitazione aumenterà senza limiti tendendo all'infinito. Per queste situazioni nessuna soluzione a stato stazionario può esistere. Un modo per contenere l'ampiezza del campo è introdurre smorzamento, ad esempio tramite pareti metalliche non perfettamente conduttrici (caso realistico).

Come secondo esempio, consideriamo la medesima equazione nel medesimo intervallo con le condizioni al contorno (di Neumann omogenee) $y'(0) = y'(a) = 0$. Anche tali condizioni sono *unmixed* e l'operatore è autoaggiunto.

Si può dimostrare che la funzione di Green in forma chiusa ha l'espressione:

$$g(x, \xi) = -\frac{1}{k \sin(ka)} \begin{cases} \cos(kx) \cos[k(a-\xi)] & 0 \leq x \leq \xi \\ \cos[k(a-x)] \cos(k\xi) & \xi \leq x \leq a \end{cases}$$

Si osservi che, come ci si aspetta, essendo l'operatore autoaggiunto, tale funzione è simmetrica.

Le autofunzioni ortonormali che soddisfano tali condizioni sono come è noto date da

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

⁴essendo, come è stato visto nel paragrafo 8.4.2

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx = \begin{cases} a/2 & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = 0 \text{ (oppure } m \neq n) \end{cases}$$

⁵Nelle applicazioni elettromagnetiche.

con ϵ_n simbolo di Neumann. Si ricordi infatti la relazione (cfr. § 6.8)

$$\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{\delta_{nm}a}{\epsilon_n}$$

Si ha allora lo sviluppo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{a} \frac{\int_0^a f(x') \cos\left(\frac{n\pi}{a}x'\right) dx'}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad [w(x) \equiv 1]$$

e la funzione di Green risulta

$$g(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{a} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2}$$

Consideriamo infine, come esempio bidimensionale di applicazione del metodo, un'espressione alternativa della funzione di Green per una cavità metallica rettangolare vista nel § 8.4.2. Deriveremo adesso la G in forma di serie di autofunzioni $\Psi_{mn}(x, y)$, che sono soluzioni dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial y^2} + k_t^2 \Psi_{mn}(x, y) = 0$$

sotto le stesse condizioni al contorno (di Dirichlet omogenee, operatore autoaggiunto). È intuitivo che le autofunzioni siano del tipo:

$$\Psi_{mn}(x, y) = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad m, n = 1, 2, \dots$$

e gli autovalori sono:

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

La condizione di ortonormalizzazione è del tipo:

$$\int_0^a \int_0^b \Psi_{mn}(x, y) \Psi_{rs}^*(x, y) dx dy = \delta_{mr} \delta_{ns}$$

Si ha dunque (considerando anche qui B_{mn} come reale):

$$B_{mn}^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy = 1$$

Per cui

$$B_{mn}^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} = 1 \quad \implies \quad B_{mn} = B = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

La funzione di Green risulta allora:

$$\begin{aligned} G(x, y; x', y') &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{mn}(x, y) \Psi_{mn}^*(x', y')}{\lambda_{mn} - k_t^2} = \\ &= \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_t^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y'\right) \end{aligned}$$

8.5.2 Determinazione delle autofunzioni e degli autovalori dalla funzione di Green

Negli esempi precedenti si è assunto di aver già ottenuto a parte le autofunzioni del problema. Si considera ora un metodo per ottenere le autofunzioni e gli autovalori di un operatore autoaggiunto a partire dalla funzione di Green.

Si noti che la nostra soluzione $y(x)$ è parametricamente dipendente da λ , cioè si può scrivere

$$y(x, \lambda) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} u_n(x)$$

Si consideri adesso l'integrale $\oint_{C_R} y(x, \lambda) d\lambda$ (si ricordi che λ è in generale complesso) dove C_R è una circonferenza di raggio R centrata nell'origine del piano complesso λ . Si ha:

$$\oint_{C_R} y(x, \lambda) d\lambda = - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle u_n(x) \oint_{C_R} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_n}$$

dove in realtà la somma riguarda solo quegli autovalori λ_n (reali) contenuti nel cerchio, poiché per gli altri l'integrale esteso a un percorso chiuso risulta nullo.

Le singolarità dell'integrando sono poli semplici con residuo unitario in corrispondenza a tutti i λ_n all'interno del contorno. Prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$ si racchiudono tutti gli autovalori, e si ottiene dal teorema dei residui:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} y(x, \lambda) d\lambda = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle u_n(x)$$

La serie è semplicemente l'espansione di Fourier della funzione di forzamento $f(x)$ in termini delle autofunzioni. Quindi si trova che:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} y(x, \lambda) d\lambda = -f(x)$$

dove C_∞ è il contorno all'infinito ottenuto con l'operazione di passaggio al limite.

Nel caso particolare della specifica funzione di forzamento $\delta(x - \xi)/w(x)$, si ottiene come soluzione la funzione di Green $g(x, \xi, \lambda)$. Si ha pertanto il risultato:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} g(x, \xi, \lambda) d\lambda = -\frac{\delta(x - \xi)}{w(x)}$$

Inserendo l'espressione della serie bilineare, si ha poi:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} g(x, \xi, \lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) u_n^*(\xi) \oint_{C_\infty} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) u_n^*(\xi) = \frac{\delta(x - \xi)}{w(x)} \end{aligned}$$

Questa relazione per la funzione di Green associata ad uno specifico operatore L_λ (e quindi ad una specifica equazione differenziale) e a specifiche condizioni al contorno è chiamata la rappresentazione spettrale della funzione δ per l'operatore L_λ .

La procedura per risolvere problemi di Sturm-Liouville del secondo tipo autoaggiunti col metodo della rappresentazione spettrale si può allora riassumere come segue:

1. per un dato operatore autoaggiunto L e date condizioni al contorno, si ricava la funzione di Green

$$L_\lambda g(x, \xi, \lambda) = \frac{\delta(x - \xi)}{w(x)}$$

2. si sostituisce la $g(x, \xi, \lambda)$ nella

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} g(x, \xi, \lambda) d\lambda = -\frac{\delta(x - \xi)}{w(x)}$$

e si risolve ottenendo la rappresentazione spettrale per la delta

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} g(x, \xi, \lambda) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) u_n^*(\xi) = \frac{\delta(x - \xi)}{w(x)}$$

Si ottengono quindi anche le autofunzioni normalizzate e gli autovalori nella

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} u_n(x)$$

e si ha la soluzione finale.

Tornando al secondo esempio del paragrafo 8.5.1 per l'equazione di Helmholtz nell'intervallo $[0, a]$, con l'operatore $L = -d^2/dx^2$ [$\lambda = k^2$, $w(x) \equiv 1$], con le condizioni al contorno di Neumann omogenee $y'(0) = y'(a) = 0$, si ricordi che la funzione di Green in forma chiusa aveva l'espressione

$$g(x, \xi, k) = -\frac{1}{k \sin(ka)} \begin{cases} \cos(kx) \cos[k(a - \xi)] & 0 \leq x \leq \xi \\ \cos[k(a - x)] \cos(k\xi) & \xi \leq x \leq a \end{cases}$$

Si consideri dapprima il caso $x < \xi$, sicché

$$g(x, \xi, k) = -\frac{\cos(kx) \cos[k(a - \xi)]}{k \sin(ka)}$$

Si ha dunque

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{\cos(kx) \cos[k(a - \xi)]}{k \sin(ka)} d(k^2)$$

Risolvendo l'integrale utilizzando il teorema dei residui, si ottiene alla fine:

$$\delta(x - \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)$$

Nel caso invece $x > \xi$ si scambiano di ruolo la x e la ξ nella funzione di Green. Siccome però il risultato finale non cambia facendo questo scambio, esso vale $\forall x, \xi$ nell'intervallo $[0, a]$.

Questa è la cercata rappresentazione spettrale per la funzione δ associata al nostro operatore ed alle nostre condizioni al contorno. Si noti che abbiamo ottenuto le autofunzioni e gli autovalori, che prima avevamo dovuto calcolare a parte, direttamente dalla funzione di Green associata all'operatore ed alle sue condizioni al contorno.

8.5.3 Interpretazione alternativa della rappresentazione spettrale. Trasformazioni.

La relazione vista nel paragrafo 8.5

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} u_n(x)$$

può pensarsi introdotta anche seguendo un'altra procedura, che coinvolge il concetto di trasformazione.

Si supponga l'operatore L autoaggiunto con le associate autofunzioni ortonormali $u_n(x)$. Si ha allora come già visto

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x) \quad \alpha_n = \langle y(x), u_n(x) \rangle$$

e si può vedere la seconda relazione come una trasformazione della funzione $y(x) \in L^2[a, b]$ nei coefficienti $\{\alpha_n\}$. Inversamente la prima relazione si può vedere come la trasformazione inversa dei coefficienti $\{\alpha_n\}$ nella funzione $y(x)$. Si può usare dunque la notazione $y(x) \leftrightarrow \{\alpha_n\}$.

D'altra parte, se L è autoaggiunto (autovalori reali), e se $y(x) \leftrightarrow \{\alpha_n\}$, si ha $Ly(x) \leftrightarrow \{\lambda_n \alpha_n\}$. Infatti si ha per i coefficienti di Ly :

$$\langle Ly, u_n \rangle = \langle y, Lu_n \rangle = \lambda_n \langle y, u_n \rangle = \lambda_n \alpha_n$$

Tornando allora al nostro problema di Sturm-Liouville $(L - \lambda)y = f$, dato che $y(x) \leftrightarrow \{\alpha_n\}$ e $Ly(x) \leftrightarrow \{\lambda_n \alpha_n\}$, se operiamo la trasformazione $f(x) \leftrightarrow \{f_n\}$ (cioè $\langle f(x), u_n(x) \rangle = f_n$), trasformando ambo i membri otteniamo:

$$(\lambda_n - \lambda) \alpha_n = f_n \quad \forall n$$

da cui segue

$$\alpha_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} = \frac{\langle f(x), u_n(x) \rangle}{\lambda_n - \lambda}$$

Sono stati considerati finora tre esempi di trasformazione, legati alla serie di Fourier (unilatera di coseni, unilatera di seni e bilatera). Vedremo nel paragrafo 8.6 come tale concetto sia applicabile anche al caso di spettro continuo, dando luogo a varie trasformazioni integrali.

Riprendendo ora l'esempio del paragrafo 8.5.1 per l'equazione di Helmholtz con le condizioni di Neumann, si osservi che la rappresentazione spettrale ottenuta è in realtà una serie di Fourier. Infatti per qualsiasi funzione $y(x) \in L^2[0, a]$ si ha l'uguaglianza:

$$y(x) = \int_0^a \delta(x - \xi) y(\xi) d\xi$$

Sostituendo la precedente espressione per la delta e scambiando la serie con l'integrale si ha:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} \xi\right) y(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\epsilon_n}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \int_0^a \sqrt{\frac{\epsilon_n}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a} \xi\right) y(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Per cui otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sqrt{\frac{\epsilon_n}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

cioè una serie di Fourier unilatera di coseni, avendo posto:

$$\alpha_n = \int_0^a y(\xi) \sqrt{\frac{\epsilon_n}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a} \xi\right) d\xi$$

Se si fosse considerata la stessa equazione per $x \in [0, a]$, però stavolta con le condizioni al contorno di Dirichlet omogenee $y(0) = y(a) = 0$ (primo esempio del paragrafo 8.4), la funzione di Green sarebbe stata, come già visto:

$$g(x, \xi) = \frac{1}{k \sin(ka)} \begin{cases} \sin(kx) \sin[k(a - \xi)] & 0 \leq x \leq \xi \\ \sin[k(a - x)] \sin(k\xi) & \xi \leq x \leq a \end{cases}$$

L'autofunzione normalizzata in questo caso era (§ 8.5.1)

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

e la funzione generica $y(x) \in L^2[0, a]$ si può scrivere come

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

(serie di Fourier unilatera di seni), avendo posto

$$\alpha_n = \int_0^a y(\xi) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} \xi\right) d\xi$$

La rappresentazione spettrale della funzione delta è data da:

$$\delta(x - \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} \xi\right)$$

Se infine, sempre per la stessa equazione, avessimo considerato la condizione al contorno periodica, sull'intervallo $[0, 2\pi)$, $y(0) = y(2\pi)$ e $y'(0) = y'(2\pi)$ [$p(x) \equiv 1$, per cui $p(0) = p(2\pi)$ e quindi l'operatore è autoaggiunto] si sarebbe ottenuta la funzione di Green:

$$g(x, \xi, k) = -\frac{\cos[k(|x - \xi| - \pi)]}{2k \sin(k\pi)}$$

e la rappresentazione spettrale della delta è

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(x-\xi)}$$

Questa rappresentazione conduce alla serie di Fourier bilatera

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{inx} \quad \alpha_n = \int_0^{2\pi} y(\xi) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-in\xi} d\xi$$

L'autofunzione normalizzata in questo caso è

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{inx}$$

Nelle rappresentazioni spettrali viste ogni termine della somma consiste in un prodotto fra un'autofunzione di x e la stessa funzione di ξ . Si può mostrare che questo risultato è generalizzabile a tutti gli operatori autoaggiunti in problemi di Sturm-Liouville del secondo tipo.

8.6 Problemi di Sturm-Liouville del terzo tipo. Spettri continui.

Esaminiamo per semplicità il caso monodimensionale, e in particolare l'equazione di Helmholtz con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee nell'intervallo $[0, a]$, già esaminata nei paragrafi 8.4 e 8.5.1 ove però ora $a \rightarrow \infty$:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y(x) = f(x) \quad \lambda = k^2 \in \mathbb{C} \quad y(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

Si può dimostrare che con queste condizioni al contorno il problema è autoaggiunto. I poli semplici della funzione di Green per $k^2 = \lambda_n = (n\pi/a)^2$ diventano sempre più vicini.

La funzione di Green risulta essere

$$g(x, \xi) = \frac{1}{k} \begin{cases} \sin(kx) e^{-j k \xi} & 0 \leq x \leq \xi \\ e^{-j k x} \sin(k \xi) & x \geq \xi \end{cases}$$

In questo caso viene fuori una rappresentazione spettrale di tipo continuo:

$$\delta(x - \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(k_x x) \sin(k_x \xi) dk_x$$

Si ottiene una trasformata di Fourier coi seni invece della serie di Fourier coi seni. Infatti, per $y(x) \in L^2[0, \infty)$ si ha

$$y(x) = \int_0^\infty \delta(x - \xi) y(\xi) d\xi$$

Sostituendo l'espressione per la delta e scambiando le integrazioni si ha:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(k_x x) \sin(k_x \xi) dk_x \right] y(\xi) d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty y(\xi) \sin(k_x \xi) d\xi \right] \sin(k_x x) dk_x \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Y(k_x) \sin(k_x x) dk_x$$

dove

$$Y(k_x) = \int_0^\infty y(x) \sin(k_x x) dx = \langle y(x), \sin(k_x x) \rangle$$

(trasformata di Fourier coi seni). Si può allora indicare così la trasformazione $y(x) \leftrightarrow Y(k_x)$.

L'espressione precedente per $y(x)$ corrisponde alla $y = \sum_n \alpha_n u_n$. Qui la funzione $\sin(k_x x)$ gioca il ruolo dell'autofunzione $u_n(x)$, mentre $Y(k_x)$ è analoga al coefficiente di Fourier $\alpha_n = \langle y(x), u_n(x) \rangle$. D'altra parte si ha che

$$-\frac{d^2}{dx^2} \sin(k_x x) = k_x^2 \sin(k_x x)$$

sicché $\sin(k_x x)$ sembra essere autofunzione dell'operatore autoaggiunto $-d^2/dx^2$ con autovalore k_x^2 . Tuttavia $\sin(k_x x)$ non appartiene a $L^2[0, \infty)$, e pertanto non può essere rigorosamente un'autofunzione. Si adopera in letteratura il termine autofunzione impropria, associata all'autovalore improprio k_x^2 (vedi onde piane o onde monocromatiche, fisicamente irrealizzabili).

Se invece avessimo imposto come condizioni al contorno le

$$y'(0) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

avremmo ottenuto le espressioni

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= \frac{1}{k} \begin{cases} \cos(kx) e^{-jk\xi} & 0 \leq x \leq \xi \\ e^{-jkx} \cos(k\xi) & x \geq \xi \end{cases} \\ \delta(x - \xi) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(k_x x) \cos(k_x \xi) dk_x \\ y(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Y(k_x) \cos(k_x x) dk_x \\ Y(k_x) &= \int_0^\infty y(x) \cos(k_x x) dx = \langle y(x), \cos(k_x x) \rangle \end{aligned}$$

cioè la trasformata di Fourier con i coseni.

La procedura vista nel caso discreto per risolvere le equazioni differenziali col metodo della rappresentazione spettrale si può estendere al caso continuo facendo uso delle autofunzioni improprie. Infatti, tornando al caso delle condizioni di Dirichlet omogenee, intanto si ha che se $y \leftrightarrow Y$ allora

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} \leftrightarrow k_x^2 Y$$

Infatti per dimostrare quest'ultima occorre far vedere che:

$$\left\langle -\frac{d^2 y}{dx^2}, \sin(k_x x) \right\rangle = k_x^2 Y$$

D'altra parte essendo k_x reale, visto che è la variabile trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{d^2 y}{dx^2}, \sin(k_x x) \right\rangle &= \left\langle y(x), -\frac{d^2 \sin(k_x x)}{dx^2} \right\rangle + J \left[y(x), \sin(k_x x) \right]_0^\infty = \\ &= k_x^2 Y + \left[-\frac{dy}{dx} \sin(k_x x) + y(x) k_x \cos(k_x x) \right]_0^\infty \end{aligned}$$

Usando le condizioni al contorno $y(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ si ha:

$$\left\langle -\frac{d^2 y}{dx^2}, \sin(k_x x) \right\rangle = k_x^2 Y - \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{dy}{dx} \sin(k_x x) \right]$$

Si noti che l'autofunzione impropria $\sin(k_x x)$ non si annulla nel limite per $x \rightarrow \infty$. Questo comportamento è in contrasto con quanto abbiamo trovato trattando con autofunzioni su intervalli finiti, quando l'autofunzione obbediva alle stesse condizioni al contorno della funzione y . Fortunatamente, in problemi elettromagnetici, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = 0$$

Per esempio se $y(x)$ è una componente del campo elettrico, allora dy/dx è legata ad una componente del campo magnetico: se $\underline{E}$ si annulla all'infinito, allora anche $\underline{H}$ si annulla. Quindi nei casi usuali in elettromagnetismo si ottiene:

$$\left\langle -\frac{d^2 y}{dx^2}, \sin(k_x x) \right\rangle = k_x^2 Y$$

Ci sono teoremi matematici che generalizzano questo risultato a classi di funzioni che possiedono certe proprietà di continuità e di assoluta integrabilità.

Siamo ora in grado di risolvere il problema usando la rappresentazione spettrale. L'equazione era:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y = f$$

Prendendo la trasformata di Fourier coi seni di ambo i membri si ottiene:

$$(k_x^2 - k^2) Y(k_x) = F(k_x)$$

Dividendo per $(k_x^2 - k^2)$ e prendendo la trasformata inversa si ottiene:

$$Y(k_x) = \frac{F(k_x)}{k_x^2 - k^2} \quad y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(k_x)}{k_x^2 - k^2} \sin(k_x x) dk_x$$

Come secondo esempio si consideri lo spazio di Hilbert $L^2(-\infty, \infty)$. Cerchiamo la rappresentazione spettrale per l'operatore autoaggiunto $-d^2/dx^2$ con le condizioni ai limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$$

La funzione di Green risulta (supponendo $\text{Im}(k) < 0$)

$$g(x, \xi) = \frac{e^{-j k |x - \xi|}}{2 j k} \quad (\text{simmetrica})$$

La rappresentazione spettrale risulta (formula ben nota dalla teoria della trasformata di Fourier):

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j k_x (x - \xi)} dk_x$$

Questa rappresentazione spettrale dà luogo alla trasformata di Fourier usuale. Infatti scrivendo

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) y(\xi) d\xi$$

Sostituendo l'espressione della delta e scambiando l'ordine di integrazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j k_x x} e^{j k_x \xi} dk_x \right) y(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\xi) e^{j k_x \xi} d\xi \right] e^{-j k_x x} dk_x \end{aligned}$$

ossia

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(k_x) e^{-j k_x x} dk_x$$

dove

$$Y(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) e^{j k_x x} dx = \langle y(x), e^{-j k_x x} \rangle$$

Stavolta si ha l'autofunzione impropria $e^{-j k_x x}$ (onda piana unidimensionale) con l'autovalore improprio k_x^2 . Indicando la relazione di trasformata di Fourier come $y(x) \leftrightarrow Y(k_x)$ ne segue $-d^2 y/dx^2 \leftrightarrow k_x^2 Y(k_x)$. Infatti:

$$\left\langle -\frac{d^2 y}{dx^2}, e^{-j k_x x} \right\rangle = k_x^2 Y(k_x)$$

per problemi elettromagnetici.

Tornando allora alla

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y = f$$

si prende la trasformata di Fourier di ambo i membri e si ha:

$$(k_x^2 - k^2) Y(k_x) = F(k_x)$$

Dividendo per $k_x^2 - k^2$ e prendendo l'antitrasformata di Fourier si ha:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(k_x)}{k_x^2 - k^2} e^{-j k_x x} dk_x$$

Si noti infine che il risultato $-d^2y/dx^2 \leftrightarrow k_x^2 Y(k_x)$ si poteva anche ottenere dalla

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(k_x) e^{-jk_x x} dk_x$$

derivando due volte, a patto di poter commutare l'integrale e la derivata. Il nostro metodo di dimostrazione fornisce una giustificazione di tale scambio in questo caso.

Consideriamo ora un terzo esempio che coinvolge funzioni di Bessel di ordine zero, utile quindi se si lavora in coordinate cilindriche. Si consideri il seguente problema di Sturm-Liouville per $x \in [0, \infty)$, x per esempio potrebbe essere il raggio polare:

$$(L - \lambda)y = f$$

dove

$$L = -\frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) \right] \quad \lim_{x \rightarrow 0} y(x) < \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

Si trova che l'operatore è autoaggiunto. Nell'ipotesi $\text{Im}(k) < 0$ la funzione di Green risulta:

$$g(x, \xi, k) = \frac{\pi}{2j} \begin{cases} J_0(kx) H_0^{(2)}(k\xi) & 0 \leq x \leq \xi \\ H_0^{(2)}(kx) J_0(k\xi) & x \geq \xi \end{cases}$$

La rappresentazione spettrale è del tipo [si ricordi che $w(x) = x$]:

$$\frac{\delta(x - \xi)}{x} = \int_0^\infty J_0(k_x x) J_0(k_x \xi) k_x dk_x$$

Questa rappresentazione conduce alla trasformata di Fourier-Bessel di ordine zero. Infatti, $\forall y(x) \in L^2[0, \infty)$ si ha:

$$y(x) = \int_0^\infty \frac{\delta(x - \xi)}{x} y(\xi) \xi d\xi$$

Sostituendo l'espressione per la δ si ottengono le relazioni di trasformazione di Fourier-Bessel:

$$\begin{aligned} Y(k_x) &= \int_0^{+\infty} y(x) J_0(k_x x) x dx \\ y(x) &= \int_0^{+\infty} Y(k_x) J_0(k_x x) k_x dk_x \end{aligned} \quad y(x) \leftrightarrow Y(k_x)$$

Anche in questo caso si può dimostrare che

$$-\frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) \right] \longleftrightarrow k_x^2 Y(k_x)$$

Il risultato ottenuto può essere generalizzato all'operatore:

$$L = -\frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) \right] + \frac{\nu^2}{x^2}$$

con la differenza che nelle formule ci sono le funzioni di Bessel e di Hankel di ordine ν invece che di ordine zero. Si parla allora di trasformata di Fourier-Bessel di ordine ν .

Concludiamo con una breve discussione della connessione tra il metodo della funzione di Green ed il metodo della rappresentazione spettrale. Partiamo dalla relazione vista a proposito del primo esempio del paragrafo (equazione di Helmholtz in $[0, \infty)$, trasformata di Fourier coi seni):

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(k_x)}{k_x^2 - k^2} \sin(k_x x) dk_x$$

ove

$$F(k_x) = \int_0^\infty f(x) \sin(k_x x) dx$$

Se sostituiamo la seconda nella prima, e scambiamo l'ordine di integrazione, otteniamo:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k_x x)}{k_x^2 - k^2} \left[\int_0^\infty f(\xi) \sin(k_x \xi) d\xi \right] dk_x = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k_x x) \sin(k_x \xi)}{k_x^2 - k^2} dk_x \right] f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Identifichiamo il termine in parentesi quadre come la funzione di Green:

$$g(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k_x x) \sin(k_x \xi)}{k_x^2 - k^2} dk_x$$

Si compari questo risultato con l'espressione già vista

$$g(x, \xi) = \frac{1}{k} \begin{cases} \sin(k x) e^{-jk\xi} & 0 \leq x \leq \xi \\ e^{-jkx} \sin(k \xi) & x \geq \xi \end{cases}$$

Sebbene le due appaiano molto diverse, esse sono rappresentazioni della stessa funzione di Green. Dobbiamo perciò avere:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(k_x x) \sin(k_x \xi)}{k_x^2 - k^2} dk_x = \frac{\pi}{2k} \begin{cases} \sin(k x) e^{-jk\xi} & 0 \leq x \leq \xi \\ e^{-jkx} \sin(k \xi) & x \geq \xi \end{cases}$$

come si potrebbe facilmente verificare col calcolo dei residui. Siccome una delle due forme richiede un'integrazione e l'altra no, sembrerebbe che la rappresentazione spettrale non sia così utile in pratica. La sua utilità, tuttavia, diventa chiara se si considerano equazioni differenziali non più ordinarie, ma alle derivate parziali.

8.7 Funzione di Green in forma integrale

Spesso lo spettro degli autovalori è continuo e la formula bilineare si trasforma in un integrale. Questa forma è usualmente impiegata quando almeno una delle condizioni al contorno è all'infinito, come nel caso di una sorgente irradiante in un mezzo illimitato.

Per dimostrare l'espressione, costruiamo la funzione di Green dell'equazione di Helmholtz monodimensionale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) = -f(x) \quad x \in (-\infty, \infty)$$

con le condizioni al contorno (di radiazione) $y(-\infty) = y(\infty) = 0$. La funzione di Green $g(x, \xi)$ soddisferà la consueta equazione differenziale

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + k^2 g(x, \xi) = -\delta(x - \xi)$$

con le stesse condizioni al contorno $g(-\infty) = g(\infty) = 0$.

La funzione di Green può essere rappresentata da uno spettro di onde piane (antitrasformata di Fourier rispetto alla variabile x)

$$g(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_x, \xi) e^{-jk_x x} dk_x$$

ove

$$\tilde{g}(k_x, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \xi) e^{jk_x x} dx$$

Si consideri d'altra parte la trasformata della delta di Dirac:

$$\tilde{\delta}(k_x - \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) e^{jk_x x} dx = e^{jk_x \xi}$$

da cui

$$\begin{aligned} \delta(x - \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(k_x - \xi) e^{-jk_x x} dk_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk_x \xi} e^{-jk_x x} dk_x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_x (x - \xi)} dk_x \end{aligned}$$

ritrovando la nota formula vista nel paragrafo 8.6, nonché nel paragrafo 6.8 a proposito delle relazioni di ortogonalità delle funzioni esponenziali.

Tornando a questo punto all'equazione differenziale per la funzione di Green, si possono sostituire in essa le espressioni integrali di $g(x, \xi)$ e di $\delta(x - \xi)$, ottenendo (portando le

derivate dentro l'integrale):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-k_x^2 + k^2) \tilde{g}(k_x, \xi) e^{-jk_x x} dk_x &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk_x \xi} e^{-jk_x x} dk_x \implies \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(k^2 - k_x^2) \tilde{g}(k_x, \xi) + e^{jk_x \xi}] e^{-jk_x x} dk_x &= 0 \quad \forall \xi \end{aligned}$$

che è soddisfatta se

$$\tilde{g}(k_x, \xi) = -\frac{e^{jk_x \xi}}{k^2 - k_x^2} = \frac{e^{jk_x \xi}}{k_x^2 - k^2}$$

per cui la funzione di Green diventa:

$$g(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_x(x-\xi)}}{k_x^2 - k^2} dk_x$$

che è la cercata generalizzazione della formula bilineare.

L'integrando in questa formula ha poli per $k_x = \pm k$ e si può valutare col calcolo dei residui (cfr. Metodi matematici). Nella valutazione si deve chiudere il percorso dell'asse reale mediante una semicirconferenza SC_R con centro nell'origine e di raggio R tendente all'infinito, che si trova nel semipiano inferiore per $x > \xi$ (verso di percorrenza orario) e nel semipiano superiore per $x < \xi$ (verso di percorrenza antiorario, cioè quello convenzionalmente considerato positivo per i percorsi nel piano complesso): questo affinché il contributo dell'integrale lungo la semicirconferenza sia nullo a causa dell'attenuazione esponenziale.

L'integrale della funzione di Green si può scrivere allora come differenza fra quello relativo al percorso chiuso e quello su SC_R :

$$g(x, \xi) = \mp 2\pi j \operatorname{Res}[k_x = \pm k] - \frac{1}{2\pi} \int_{SC_R} \frac{e^{-jk_x(x-\xi)}}{k_x^2 - k^2} dk_x = \mp 2\pi j \operatorname{Res}[k_x = \pm k]$$

dove i segni superiori si riferiscono a $x > \xi$, quelli inferiori a $x < \xi$: per $x > \xi$ bisogna prendere in considerazione solo l'onda viaggiante nel verso positivo delle x , e quindi includere all'interno del cammino il polo per $k_x = +k$, e viceversa per $x < \xi$.

8.8 Spettri misti. Problemi di Sturm-Liouville non autoaggiunti.

Vogliamo infine esaminare un caso in cui si abbiano entrambi i contributi, sia dello spettro discreto che di quello continuo. L'esempio che scegliamo riguarda un operatore che non è autoaggiunto. La teoria degli operatori non autoaggiunti è difficile ed incompleta. Tuttavia nell'esempio seguente si riesce ad ottenere la rappresentazione spettrale in maniera diretta.

Si consideri ancora la rappresentazione spettrale dell'operatore $-d^2/dx^2$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ con le condizioni al contorno (omogenee)

$$y'(0) = \alpha y(0) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) < 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

Poiché α è complesso, l'operatore L non risulta autoaggiunto.

La funzione di Green risulta del tipo:

$$g(x, \xi) = \frac{1}{j k + \alpha} \begin{cases} e^{-jkx} \left[\cos(k\xi) + \frac{\alpha}{k} \sin(k\xi) \right] & x \geq \xi \\ \left[\cos(kx) + \frac{\alpha}{k} \sin(kx) \right] e^{-jk\xi} & 0 \leq x \leq \xi \end{cases}$$

La rappresentazione spettrale viene del tipo:

$$\delta(x-\xi) = -2\alpha e^{\alpha(x+\xi)} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\cos(k_x x) + \frac{\alpha}{k_x} \sin(k_x x) \right] \left[\cos(k_x \xi) + \frac{\alpha}{k_x} \sin(k_x \xi) \right] \frac{k_x^2 dk_x}{\alpha^2 + k_x^2}$$

Il primo addendo dà il contributo spettrale discreto, mentre il secondo dà il contributo spettrale continuo.

Tale rappresentazione spettrale può essere usata per caratterizzare una sorgente sopra una superficie piatta rappresentata da un'impedenza superficiale. Si può associare il primo termine con un'onda superficiale confinata alla superficie, ed il secondo termine con radiazione portata via dalla superficie. Questa espansione spettrale dà luogo ad una trasformazione detta d'impedenza.

In particolare la funzione $e^{\alpha x}$, che è quadrato sommabile in $[0, \infty)$ nell'ipotesi $\text{Re}(\alpha) < 0$, risulta un'autofunzione (propria) dell'operatore $-d^2/dx^2$ con le condizioni al contorno viste (associata all'autovalore $-\alpha^2$). Invece la funzione

$$\cos(k_x x) + \frac{\alpha}{k_x} \sin(k_x x)$$

risulta un'autofunzione impropria dello stesso operatore con le stesse condizioni al contorno (associata all'autovalore k_x^2).

Inoltre $e^{\alpha^* x}$ risulta un'autofunzione aggiunta (propria) dell'operatore $-d^2/dx^2$ con le condizioni al contorno (aggiunte) date da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \quad y'(0) = \alpha^* y(0)$$

Infine la funzione

$$\cos(k_x x) + \frac{\alpha^*}{k_x} \sin(k_x x)$$

è un'autofunzione aggiunta impropria dello stesso operatore con le condizioni al contorno aggiunte.

Abbiamo ora concluso la nostra presentazione del metodo della rappresentazione spettrale. Questo metodo ed il metodo della funzione di Green costituiscono un potente strumento per la soluzione di molte delle equazioni differenziali alle derivate parziali trovate in problemi di radiazione, scattering e diffrazione.

Capitolo 9

Metodo dei momenti

9.1 Introduzione

I problemi elettromagnetici usualmente implicano la soluzione di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali o di equazioni integrali. In forma operatoriale tali equazioni sono del tipo:

$$L[f(\underline{r})] = g(\underline{r}) \quad \text{es.: } (\nabla^2 + k^2) \underline{A} = -\underline{J}_i \quad (9.1)$$

con L operatore lineare, f la funzione incognita, che interessa determinare all'interno di un certo dominio V , e g una funzione nota. Quando l'operatore implica derivazioni si parla di operatore differenziale, se implica integrazioni si parla di operatore integrale. Quest'ultimo sarà del tipo:

$$\int_V K(\underline{r}, \underline{r}') f(\underline{r}') dV' = g(\underline{r})$$

ove $K(\underline{r}, \underline{r}')$ è detto nucleo o *kernel*.

Per risolvere questi problemi, il metodo dei momenti comincia coll'approssimare la funzione incognita f con una combinazione lineare di funzioni note $\psi_k(\underline{r})$ nella forma:

$$f(\underline{r}) \cong \psi_o(\underline{r}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k(\underline{r}) \quad (9.2)$$

dove le ψ_k si chiamano *funzioni di base* o di espansione. La funzione ψ_o deve soddisfare le stesse condizioni al contorno della f (se sono omogenee si può addirittura omettere), ma per il resto è arbitraria, mentre le funzioni di base ψ_k soddisfano condizioni al contorno omogenee.

Sostituendo la precedente espressione nella (9.1) e usando la linearità si ottiene l'equazione:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k L[\psi_k(\underline{r})] \cong g(\underline{r}) - L[\psi_o(\underline{r})]$$

Ponendo

$$\begin{aligned} g_k(\underline{r}) &= L[\psi_k(\underline{r})] \\ h(\underline{r}) &= g(\underline{r}) - L[\psi_o(\underline{r})] \end{aligned}$$

si ha:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k g_k(\underline{r}) \cong h(\underline{r}) \quad (9.3)$$

con le g_k e h funzioni note.

Esistono due classi fondamentali di funzioni di base, le funzioni a dominio intero (*entire-domain*), che sono diverse da zero lungo l'intero dominio, e le *subdomain functions*, ciascuna delle quali è zero ovunque eccetto che in un particolare sottodominio. I due membri della (9.3) non possono in generale essere uguali ovunque. Per determinare al meglio i parametri α_k occorrono N equazioni. Un possibile approccio, detto del *point-matching*, impone l'uguaglianza dei due membri in N punti $\underline{r}_j$, fornendo il set di equazioni:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k g_k(\underline{r}_j) \cong h(\underline{r}_j) \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Risolvendo si ottengono gli α_k .

Un approccio più generale (che è il metodo dei momenti vero e proprio) consiste nel moltiplicare ambo i membri della (9.3) per un altro gruppo di funzioni note $w_j(\underline{r})$, dette *funzioni peso*, ed integrare a tutto il dominio V ottenendo:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \int_V w_j(\underline{r}) g_k(\underline{r}) dV \cong \int_V w_j(\underline{r}) h(\underline{r}) dV \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (9.4)$$

e poi si risolve per ottenere i parametri α_k .

Il metodo del point-matching si può considerare un caso particolare del metodo dei momenti, scegliendo come funzione peso la δ di Dirac:

$$w_j(\underline{r}) = \delta(\underline{r} - \underline{r}_j)$$

Un altro caso particolare, che prende il nome di *metodo di Galerkin*, usa la stessa famiglia per le funzioni peso e per quelle di base:

$$w_j(\underline{r}) \equiv \psi_j(\underline{r}) \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Si noti infine che in contesto matematico il metodo dei momenti è spesso chiamato *metodo dei residui pesati*, perché se si definisce una funzione residuo:

$$\text{Res}(\underline{r}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k(\underline{r}) - h(\underline{r})$$

che mostra di quanto differisce da zero la quantità che vorremmo esattamente uguale a zero. Con la condizione (9.4) stiamo in realtà imponendo la

$$\int_V w_j(\underline{r}) \operatorname{Res}(\underline{r}) dV = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

cioè stiamo uguagliando a zero appunto i residui pesati.

La relazione (9.4) è evidentemente di tipo matriciale. Infatti, ponendo (si tratta di quantità note):

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \int_V w_j(\underline{r}) g_k(\underline{r}) dV \\ B_j &= \int_V w_j(\underline{r}) h(\underline{r}) dV \end{aligned} \quad (9.5)$$

si ha:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\alpha} = \underline{B}$$

Si consideri un semplice esempio unidimensionale:

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) = x^2 \quad x \in [0, 1]$$

con $f(0) = f(1) = 0$ (condizioni al contorno di Dirichlet omogenee).

La soluzione rigorosa sarebbe, imponendo le condizioni al contorno:

$$f(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x}{12} \quad \text{es. } f(0.5) = \frac{7}{192} \cong 0.0365$$

Essendoci condizioni al contorno omogenee non serve la ψ_0 . Inoltre essendoci delle derivate seconde in gioco, per evitare funzioni δ , conviene usare funzioni di base con derivate continue almeno al primo ordine. Possiamo adoperare le ben note funzioni:

$$\psi_k(x) = x - x^{k+1} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

e, seguendo l'approccio di Galerkin, scegliamo anche gli stessi pesi:

$$w_j(x) = x - x^{j+1} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Prendendo per esempio $N = 2$ si ha l'approssimazione:

$$f(x) \cong \alpha_1(x - x^2) + \alpha_2(x - x^3)$$

da cui segue:

$$\begin{cases} g_1(x) = L[x - x^2] = 2 \\ g_2(x) = L[x - x^3] = 6x \\ h(x) = x^2 - L[0] = x^2 \end{cases}$$

Dalle (9.5) si ha allora:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_0^1 (x - x^2) 2 dx = \frac{1}{3} & A_{12} &= \int_0^1 (x - x^2) 6x dx = \frac{1}{2} \\ A_{21} &= \int_0^1 (x - x^3) 2 dx = \frac{1}{2} & A_{22} &= \int_0^1 (x - x^3) 6x dx = \frac{4}{5} \\ B_1 &= \int_0^1 (x - x^2) x^2 dx = \frac{1}{20} & B_2 &= \int_0^1 (x - x^3) x^2 dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Si ha dunque l'equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

che risolta fornisce:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Pertanto la nostra approssimazione risulta:

$$f(x) \cong -\frac{1}{10}(x - x^2) + \frac{1}{6}(x - x^3) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{10} + \frac{x}{6} = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x}{15}$$

(Es. $f(0.5) = 3/80 \cong 0.0375$) la cui derivata seconda, cambiata di segno, è:

$$x - \frac{1}{5} \neq x^2$$

Nel caso in cui si abbia un operatore integrale

$$\int_V K(\underline{r}, \underline{r}') f(\underline{r}') dV' = g(\underline{r})$$

si hanno le funzioni:

$$g_k(\underline{r}) = \int_V K(\underline{r}, \underline{r}') \psi_k(\underline{r}') dV'$$

con gli elementi di matrice:

$$A_{jk} = \iint_V w_j(\underline{r}) K(\underline{r}, \underline{r}') \psi_k(\underline{r}') dV' dV$$

e i termini noti:

$$\begin{aligned} B_j &= \int_V w_j(\underline{r}) h(\underline{r}) dV = \int_V w_j(\underline{r}) \left[g(\underline{r}) - \int_V K(\underline{r}, \underline{r}') \psi_o(\underline{r}') dV' \right] dV = \\ &= \int_V w_j(\underline{r}) g(\underline{r}) dV - \iint_V w_j(\underline{r}) K(\underline{r}, \underline{r}') \psi_o(\underline{r}') dV' dV \end{aligned}$$

Uno dei tipi più usati di funzioni a sottodominio sono le funzioni impulso unitario (*piecewise constant*). Indicando con S_k il tipico sottodominio, si ha:

$$\psi_k(\underline{r}) = \begin{cases} 1 & \text{per } \underline{r} \in S_k \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Le funzioni impulso unitario sono specialmente utili con gli operatori integrali, dove sono frequentemente usate sia come funzioni di base che come funzioni peso. Si ha in tal caso, per il metodo di Galerkin:

$$\begin{aligned} g_k(\underline{r}) &= \int_{S_k} K(\underline{r}, \underline{r}') dV' \\ A_{jk} &= \int_{S_j} \int_{S_k} K(\underline{r}, \underline{r}') dV' dV \\ B_j &= \int_{S_j} h(\underline{r}) dV \end{aligned}$$

Si noti che, a differenza del metodo degli elementi finiti, soltanto la regione della sorgente, e non l'intero dominio, è stata divisa in un set di sottodomini (elementi finiti) con semplici approssimazioni della funzione incognita su ciascun sottodominio.

9.2 Applicazione a problemi di scattering

Come è noto, anche se l'equazione differenziale è la stessa, la funzione di Green cambia al cambiare delle condizioni al contorno, quindi è in generale diversa per $\underline{A}$ e per $\underline{E}$. La soluzione di problemi di scattering è una delle maggiori applicazioni del metodo dei momenti.

Il campo scatterato si può esprimere:

$$\underline{E}^s(\underline{r}) = \int_S \underline{G}_{\underline{E}}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}_S(\underline{r}') dS' \quad (\underline{J}_S \text{ incognita})$$

dove l'integrale è esteso alla superficie S del corpo e $\underline{J}_S$ come è noto ha dimensioni A/m. Supponendo che il corpo sia un conduttore perfetto, il campo elettrico totale tangenziale deve annullarsi sulla sua superficie, ossia

$$\underline{E}_\tau^s(\underline{r}) = \left[\int_S \underline{G}_{\underline{E}}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}_S(\underline{r}') dS' \right]_\tau = -\underline{E}_\tau^i(\underline{r}) \quad (\underline{E}_\tau^i(\underline{r}) \text{ noto})$$

Questo è un esempio concreto di operatore integrale, e si desidera risolvere il problema col metodo dei momenti.

Per prima cosa, occorre un'espressione per la funzione di Green. Nel nostro caso si suppone di considerare scattering nello spazio libero, cioè il corpo conduttore è immerso nello spazio libero. Noi conosciamo tale funzione per ricavare il potenziale vettore (cioè per l'equazione di Helmholtz e per lo spazio libero):

$$G_A(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

ove

$$R = |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

e si ha:

$$\underline{A}^s(\underline{r}) = \int_S G_A(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}_S(\underline{r}') dS'$$

D'altra parte il campo elettrico scatterato è legato al potenziale vettore dalle note relazioni (Campi I):

$$\underline{E}^s = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\nabla(\nabla \cdot \underline{A}^s) + k^2 \underline{A}^s \right]$$

Combinando queste relazioni si ottiene (gli operatori agiscono su $\underline{r}$, non su $\underline{r}'$, quindi si possono portare dentro):

$$\underline{E}^s = \frac{1}{j\omega\varepsilon 4\pi} \int_S \left\{ \nabla \nabla \cdot \left[\underline{J}_S(\underline{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} \right] + k^2 \underline{J}_S(\underline{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} \right\} dS'$$

dopodiché se ne prende la componente tangenziale e la si inserisce nella relazione precedente.

Le varie forme di questa equazione integrale di base possono essere risolte nel modo usuale col metodo dei momenti. A differenza però degli esempi semplici visti in precedenza, in questo caso gli integrali che devono essere valutati per definire la matrice dei coefficienti vanno calcolati numericamente. Ne risulta che in questi problemi la maggioranza del tempo macchina è dedicata al riempimento della matrice.

Capitolo 10

Onde rotanti

10.1 Campi rotanti all'interno di un risonatore cilindrico

Si consideri un'onda stazionaria (modo) TM in una cavità risonante cilindrica circolare di raggio a e lunghezza l , nel dominio del tempo. Il campo potrà essere ottenuto dalla componente E_z , che sarà del tipo:

$$E_z^{nms}(\varrho, \varphi, z, t) = E_o J_n(k_t \varrho) \cos(n \varphi) \cos(k_z z) \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} k_t &= \frac{u_{nm}}{a} & k_z &= \frac{s \pi}{l} & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ & & & & m &= 1, 2, 3, \dots \\ & & & & s &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

dove u_{nm} è la m -sima radice della $J_n(u) = 0$ e s può essere nulla poiché il modo è TM.

Tuttavia nulla vieta di scegliere la determinazione con il $\sin(n \varphi)$ invece del coseno (degenerazione, rotazione di $\pi/2$ del pattern di campo). Posso allora pensare a due onde della stessa ampiezza, matematicamente indipendenti, una col seno, l'altra col coseno, tra cui però introduco uno shift temporale corrispondente ad uno sfasamento δ :

$$\begin{aligned} E_z^{(1)}(\varrho, \varphi, z, t) &= E_o J_n(k_t \varrho) \cos(n \varphi) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z^{(2)}(\varrho, \varphi, z, t) &= E_o J_n(k_t \varrho) \sin(n \varphi) \cos(k_z z) \cos\left[\omega \left(t - \frac{\delta}{\omega}\right)\right] \end{aligned}$$

Per $n = 0$ c'è solo la determinazione col coseno.

Combinazioni lineari delle onde stazionarie $E_z^{(1)}$ ed $E_z^{(2)}$ per $n \neq 0$ possono dar luogo a

onde rotanti. Per esempio, sommandole e ponendo $\delta = \pi/2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} E_z(\varrho, \varphi, z, t) &= E_o J_n(k_t \varrho) \cos(k_z z) \left[\cos(n \varphi) \cos(\omega t) + \sin(n \varphi) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= E_o J_n(k_t \varrho) \cos(k_z z) \left[\cos(n \varphi) \cos(\omega t) + \sin(n \varphi) \sin(\omega t) \right] = \\ &= E_o J_n(k_t \varrho) \cos(k_z z) \cos(\omega t - n \varphi) = \\ &= \operatorname{Re} \left[E_o J_n(k_t \varrho) \cos(k_z z) e^{j(\omega t - n \varphi)} \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Come pure si possono sottrarre, sempre con $\delta = \pi/2$, e si ottiene sempre un campo rotante (con la stessa espressione vista), a patto di prendere valori negativi di n .

Un modo con valore positivo di n ruoterà nel verso positivo delle φ (antiorario), uno con valore negativo in verso orario. I due fra loro saranno degeneri. Tuttavia stavolta la degenerazione corrisponde a valori diversi di uno degli indici (cosa che invece non accade con la normale notazione). Il modo con $n = 0$ invece non ruota proprio. Un'istantanea di questo campo rotante non differirebbe dall'onda stazionaria nella direzione z e nelle direzioni ϱ, φ , però mentre la sagoma dell'onda stazionaria varia nel tempo, questa resta rigida, ma ruota. Però pur essendo viaggianti in direzione azimutale, esse hanno un insieme discreto di frequenze di risonanza analogo a quello delle onde stazionarie (spettro discreto).

La velocità angolare dell'onda rotante sarà (analogamente alla velocità di fase):

$$\omega_{\text{rot}} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega}{n}$$

Questo è importante per alcune applicazioni di questi campi per ottenere traiettorie a spirale in fasci di elettroni per la generazione di potenze a microonde elevate. Infatti per ottenere l'accoppiamento ottimo (sincronismo tra campi e particelle) la frequenza di ciclotrone degli elettroni deve essere dello stesso ordine di grandezza della frequenza di rotazione dei campi ω_{rot} . Peraltro tale frequenza di ciclotrone è direttamente proporzionale all'induzione magnetica longitudinale applicata alle particelle:

$$\Omega_c = \frac{e B_z}{m_e} \quad (e, m_e: \text{carica e massa dell'elettrone})$$

Quindi se si considera un modo risonante di ordine n abbastanza elevato, non serve un così forte campo magnetico, che renderebbe il sistema più ingombrante e costoso, ed inoltre con problemi potenziali di surriscaldamento, etc...

Ciascuno dei campi $E_z^{(1)}$ ed $E_z^{(2)}$, presi da soli, non ha momento angolare, mentre invece il campo rotante sì. Le onde progressive invece hanno quantità di moto, ma non momento angolare.

Come è noto, in una cavità risonante con un'onda stazionaria l'energia immagazzinata è costante ed oscilla fra le forme elettrica e magnetica. Questo perché c'è uno sfasamento di $\pi/2$: quando una è zero l'altra è massima e viceversa. Invece nel caso dei campi rotanti l'ampiezza dei campi resta costante, per cui sia l'energia totale elettrica che la magnetica restano costanti nel tempo, e ciascuna uguale alla metà di quella totale.

In corrispondenza all'asse del risonatore si ha un campo magnetico polarizzato circolarmente, come sarà verificato più avanti, perché il vettore è costante in ampiezza, ma ruota. Per cui le particelle che arrivano lungo l'asse sono soggette tutte alla stessa forza di Lorentz, però siccome la direzione cambia nel tempo, elettroni diversi saranno deflessi in direzioni diverse, e quindi si crea il fascio a spirale.

Mentre nel caso dell'onda stazionaria il vettore di Poynting medio nel periodo in direzione angolare

$$P_\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\underline{E} \times \underline{H}^* \right]_\varphi$$

è nullo perché non ci può essere flusso netto di potenza in un'onda stazionaria, per l'onda rotante invece è forte.

Corrispondentemente si genera un momento angolare lungo z che ha l'espressione:

$$M_z = \frac{1}{v^2} \int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\underline{E} \times \underline{H}^* \right]_\varphi \varrho dV$$

Facendo i conti si ricaverà più tardi l'espressione finale

$$M_z = \frac{nW}{\omega}$$

ove W è l'energia totale (elettrica e magnetica). Quindi il momento angolare aumenta (al contrario della velocità angolare) al crescere di n .

Secondo la teoria quantistica si ha peraltro:

$$M_z = n\hbar = n \frac{h}{2\pi} = n \left(\frac{W}{\omega} \right)$$

essendo come è noto

$$W = hf = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \quad \implies \quad \hbar = \frac{W}{\omega}$$

quindi un'espressione formalmente analoga, con l'unica differenza che nella teoria quantistica $\hbar$ è fissato, da cui la quantizzazione del momento angolare. Invece nella teoria classica W/ω può assumere un continuo di valori.

Si presti attenzione al fatto che campi rotanti possono esistere anche in strutture non risonanti, ma aperte, radianti. Si tratta in effetti di una base alternativa alle onde progressive ed alle onde stazionarie, mediante la quale si può esprimere un campo qualsiasi.

Per far vedere che le energie restano costanti nel tempo, si consideri ad esempio il modo TM_{110} (quindi $k_z = 0$, indipendenza da z , $k_t = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$). In termini di onda stazionaria si hanno le espressioni: (sopravvivono solo tre componenti, spariscono E_ϱ ed E_φ)

$$\begin{aligned} E_z(\varrho, \varphi, t) &= E_o J_1(k_t \varrho) \cos \varphi \cos(\omega t) \\ H_\varrho(\varrho, \varphi, t) &= \frac{\omega\varepsilon E_o}{k_t^2 \varrho} J_1(k_t \varrho) \sin \varphi \sin(\omega t) \\ H_\varphi(\varrho, \varphi, t) &= \frac{\omega\varepsilon E_o}{k_t} J_1'(k_t \varrho) \cos \varphi \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Le corrispondenti espressioni in termini di campi rotanti sono:

$$\begin{aligned} E_z(\varrho, \varphi, t) &= E_o J_1(k_t \varrho) \cos(\omega t - \varphi) \\ H_\varrho(\varrho, \varphi, t) &= \frac{\omega \varepsilon E_o}{k_t^2 \varrho} J_1(k_t \varrho) \cos(\omega t - \varphi) \\ H_\varphi(\varrho, \varphi, t) &= \frac{\omega \varepsilon E_o}{k_t} J_1'(k_t \varrho) \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

ove con l'apice si è indicata la derivata rispetto a tutto l'argomento $k_t \varrho$, come usualmente in letteratura.

Si ha a questo punto per l'energia elettrica immagazzinata:

$$\begin{aligned} W_E &= \int_V \frac{\varepsilon}{2} E_z^2 dV = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[E_o J_1(k_t \varrho) \cos(\omega t - \varphi) \right]^2 \varrho d\varrho d\varphi dz \\ &= \frac{\varepsilon}{2} E_o^2 l \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi - \omega t) d\varphi \int_0^a J_1^2(k_t \varrho) \varrho d\varrho \end{aligned}$$

nell'ipotesi di mezzo omogeneo.

Consideriamo separatamente i due integrali:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi - \omega t) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$$

come è noto.

Per l'altro integrale:

$$\int_0^a J_1^2(k_t \varrho) \varrho d\varrho$$

è un caso particolare dell'altro (si noti che ν è in generale complesso, non necessariamente intero)

$$\int_a^b C_\nu(kz) \overline{C}_\nu(kz) z dz$$

ove C_ν e $\overline{C}_\nu$ sono generiche soluzioni dell'equazione di Bessel, come J_ν , Y_ν , $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$. Si ha per il corrispondente integrale indefinito (la primitiva)

$$\int C_\nu(kz) \overline{C}_\nu(kz) z dz = \frac{z^2}{4} \left[2 C_\nu(kz) \overline{C}_\nu(kz) - C_{\nu-1}(kz) \overline{C}_{\nu+1}(kz) - C_{\nu+1}(kz) \overline{C}_{\nu-1}(kz) \right]$$

Nel caso più semplice $\overline{C}_\nu \equiv C_\nu$ (che qui ci interessa) si può usare l'espressione alternativa:

$$\int C_\nu^2(kz) z dz = \frac{z^2}{2} \left[\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2 z^2} \right) C_\nu^2(kz) + C_\nu'^2(kz) \right]$$

Tornando al nostro integrale si ha:

$$\int_0^a J_1^2(k_t \varrho) \varrho d\varrho = \left[\frac{\varrho^2}{2} J_1^2(k_t \varrho) - \frac{1}{2 k_t^2} J_1^2(k_t \varrho) + \frac{\varrho^2}{2} J_1'^2(k_t \varrho) \right]_0^a =$$

(ricorda che $J_1(0) = 0$)

$$= \frac{a^2}{2} J_1^2(k_t a) - \frac{J_1^2(k_t a)}{2 k_t^2} + \frac{a^2}{2} J_1'^2(k_t a)$$

Però nel nostro caso (risonanza) $k_t a = u_{11}$ ossia $J_1(k_t a) = 0$ e quindi

$$\int_0^a J_1^2(k_t \varrho) \varrho d\varrho = \frac{a^2}{2} J_1'^2(k_t a)$$

Ma dalla relazione di ricorrenza

$$C'_\nu(z) = -\frac{\nu}{z} C_\nu(z) + C_{\nu-1}(z)$$

si ha:

$$J_1'(k_t a) = -\frac{1}{k_t a} J_1(k_t a) + J_0(k_t a) = J_0(k_t a)$$

da cui

$$\int_0^a J_1^2(k_t \varrho) \varrho d\varrho = \frac{a^2}{2} J_0^2(k_t a)$$

Si ha infine per l'energia elettrica

$$W_E = \frac{\varepsilon}{2} E_o^2 l \pi \frac{a^2}{2} J_0^2(k_t a) = \frac{1}{4} \pi \varepsilon E_o^2 a^2 l J_0^2(u_{11})$$

espressione non dipendente dal tempo.

Consideriamo ora l'energia magnetica:

$$\begin{aligned} W_M &= \int_V \frac{\mu}{2} (H_\varrho^2 + H_\varphi^2) dV = \\ &= \frac{\mu}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ \left[\frac{\omega \varepsilon E_o}{k_t^2 \varrho} J_1(k_t \varrho) \cos(\omega t - \varphi) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\omega \varepsilon E_o}{k_t} J_1'(k_t \varrho) \sin(\omega t - \varphi) \right]^2 \right\} \varrho d\varrho d\varphi dz \end{aligned}$$

Anche in questo caso è possibile separare gli integrali. Per quanto riguarda il primo integrale radiale, esso è un caso particolare di

$$\int_a^b \frac{C_\nu(k z) \overline{C}_\nu(k z)}{z} dz$$

Nei casi in cui ν è un intero $n \neq 0$ (come è il nostro caso) si dimostra (integrale indefinito):

$$\int \frac{C_n(k z) \overline{C}_n(k z)}{z} dz = -\frac{1}{2n} \left[C_o(k z) \overline{C}_o(k z) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} C_m(k z) \overline{C}_m(k z) + C_n(k z) \overline{C}_n(k z) \right]$$

Per noi questa si semplifica così

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{J_1^2(k_t \varrho)}{\varrho} d\varrho &= -\frac{1}{2} \left[J_o^2(k_t \varrho) + J_1^2(k_t \varrho) \right]_0^a = -\frac{1}{2} \left[J_o^2(k_t a) + J_1^2(k_t a) \right] + \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} J_o^2(k_t a) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

essendo al solito $k_t a = u_{11}$ e $J_1(u_{11}) = 0$.

In conclusione, si ha per l'energia magnetica

$$W_M = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon E_o^2 l \pi}{k_t^2} \left[\frac{1}{2} J_o^2(k_t a) k_t^2 a^2 \right] = \frac{1}{4} \pi \varepsilon a^2 l E_o^2 J_o^2(u_{11}) = W_E$$

non dipendente anch'essa dal tempo. L'energia totale risulta dunque:

$$W = \frac{1}{2} \pi \varepsilon E_o^2 a^2 l J_o^2(u_{11})$$

D'altra parte, dalla definizione di fattore di qualità di un risonatore si ha:

$$Q = \omega \frac{W}{P} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{P Q}{\omega}$$

essendo P la potenza dissipata (nel nostro caso è quella ceduta al fascio di particelle). Si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{P Q}{\omega} &= \frac{1}{2} \pi \varepsilon E_o^2 a^2 l J_o^2(u_{11}) \quad \Rightarrow \quad E_o^2 = \frac{2}{a^2 J_o^2(u_{11})} \frac{Q P}{\omega \pi \varepsilon l} \quad \Rightarrow \\ E_o &= \frac{2}{a J_o(u_{11})} \sqrt{\frac{Q}{\omega \pi \varepsilon l} \left(\frac{P}{2} \right)} \\ u_{11} &\cong 3.832 \quad k_t \cong \frac{3.832}{a} \end{aligned}$$

Quindi per una data cavità si può calcolare con questa formula il valore di picco (sempre presente, ma in movimento) dei campi elettrico e magnetico.

10.2 Dimostrazione che sull'asse la polarizzazione è circolare

Tenendo conto del fatto che $k_t = k$, il campo magnetico risulta:

$$\begin{aligned} H_\varrho &= \frac{E_o}{\omega \mu \varrho} J_1(k_t \varrho) \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{forma indeterminata per } \varrho = 0) \\ H_\varphi &= \frac{\sqrt{\varepsilon} E_o}{\sqrt{\mu}} J_1'(k_t \varrho) \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

ove per la relazione di ricorrenza

$$C'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} C_\nu(z) - C_{\nu+1}(z)$$

si ha:

$$J'_1(k_t \varrho) = \frac{J_1(k_t \varrho)}{k_t \varrho} - J_2(k_t \varrho)$$

anche qui forma indeterminata per $\varrho = 0$. In vicinanza dell'asse ($k_t \varrho \ll 1$), cioè per piccoli valori dell'argomento si ha per ogni n

$$J_n(z) \cong \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Quindi in particolare:

$$J_1(k_t \varrho) \approx \frac{k_t \varrho}{2} \quad J_2(k_t \varrho) \approx \frac{(k_t \varrho)^2}{8} \quad \implies \quad J'_1(k_t \varrho) \cong \frac{1}{2} - \frac{(k_t \varrho)^2}{8}$$

Se si passa in coordinate cartesiane si ha:

$$H_x = H_\varrho \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi$$

$$H_y = H_\varrho \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi$$

$$H_\varrho = \frac{E_o}{\omega \mu \varrho} \frac{k_t \varrho}{2} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{E_o \omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{2 \omega \mu} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{E_o}{2 v \mu} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$H_\varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon} E_o}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{1}{2} - \frac{(k_t \varrho)^2}{8} \right] \sin(\omega t - \varphi) = \frac{E_o}{2 v \mu} \left[1 - \frac{(k_t \varrho)^2}{4} \right] \sin(\omega t - \varphi)$$

essendo v la velocità della luce nel mezzo. In particolare sull'asse si ha:

$$H_\varphi = \frac{E_o}{2 v \mu} \sin(\omega t - \varphi) \quad \implies$$

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{E_o}{2 v \mu} \cos(\omega t - \varphi) \cos \varphi - \frac{E_o}{2 v \mu} \sin(\omega t - \varphi) \sin \varphi = \\ &= \frac{E_o}{2 v \mu} \left\{ \left[\cos(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi \right] \cos \varphi - \left[\sin(\omega t) \cos \varphi - \cos(\omega t) \sin \varphi \right] \sin \varphi \right\} = \\ &= \frac{E_o}{2 v \mu} \left[\cos(\omega t) \cos^2 \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi \cos \varphi - \sin(\omega t) \cos \varphi \sin \varphi + \cos(\omega t) \sin^2 \varphi \right] = \\ &= \frac{E_o}{2 v \mu} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{E_o}{2 v \mu} \left[\cos(\omega t) \cos \varphi \sin \varphi + \sin(\omega t) \sin^2 \varphi + \sin(\omega t) \cos^2 \varphi - \cos(\omega t) \sin \varphi \cos \varphi \right] = \\ &= \frac{E_o}{2 v \mu} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

quindi si tratta di polarizzazione circolare.

10.3 Dimostrazione che $M_z = n W/\omega$

L'espressione vista in precedenza per il momento angolare era:

$$M_z = \frac{1}{v^2} \int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{E} \times \underline{H}^*]_{\varphi} \varrho dV$$

Dall'equazione di Maxwell nel dominio della frequenza (omogenea perché stiamo considerando una cavità risonante)

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H} &= j\omega\varepsilon \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = \frac{\nabla \times \underline{H}}{j\omega\varepsilon} \\ \Rightarrow M_z &= \frac{1}{v^2} \int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\nabla \times \underline{H}}{j\omega\varepsilon} \times \underline{H}^* \right]_{\varphi} \varrho dV = \\ &= -\frac{\mu}{2\omega} \int_V \operatorname{Re} [j(\nabla \times \underline{H}) \times \underline{H}^*]_{\varphi} \varrho dV \end{aligned}$$

D'altra parte utilizzando le coordinate cilindriche si ha:

$$\nabla \times \underline{H} = \begin{vmatrix} \frac{\varrho_o}{\varrho} & \varphi_o & \frac{z_o}{\varrho} \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_{\varrho} & \varrho H_{\varphi} & H_z \end{vmatrix} = \frac{\varrho_o}{\varrho} \left[\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\varrho H_{\varphi})}{\partial z} \right] + \varphi_o \left(\frac{\partial H_{\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} \right) + \frac{z_o}{\varrho} \left[\frac{\partial(\varrho H_{\varphi})}{\partial \varrho} - \frac{\partial H_{\varrho}}{\partial \varphi} \right]$$

Devo poi fare l'ulteriore prodotto vettoriale

$$\begin{aligned} (\nabla \times \underline{H}) \times \underline{H}^* &= \begin{vmatrix} \frac{\varrho_o}{\varrho} & \varphi_o & \frac{z_o}{\varrho} \\ (\nabla \times \underline{H})_{\varrho} & (\nabla \times \underline{H})_{\varphi} & (\nabla \times \underline{H})_z \\ H_{\varrho}^* & H_{\varphi}^* & H_z^* \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\varrho_o}{\varrho} \left\{ H_z^* \left(\frac{\partial H_{\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} \right) - H_{\varphi}^* \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho H_{\varphi})}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_{\varrho}}{\partial \varphi} \right] \right\} + \\ &+ \varphi_o \left\{ H_{\varrho}^* \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho H_{\varphi})}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_{\varrho}}{\partial \varphi} \right] - H_z^* \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial z} \right) \right\} + \\ &+ \frac{z_o}{\varrho} \left[H_{\varphi}^* \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial z} \right) - H_{\varrho}^* \left(\frac{\partial H_{\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} \right) \right] \end{aligned}$$

Devo prendere ora la componente lungo φ

$$H_{\varrho}^* \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho H_{\varphi})}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_{\varrho}}{\partial \varphi} \right] - H_z^* \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial z} \right)$$

A differenza di quello che succederebbe per le onde stazionarie, la dipendenza dei campi complessi da φ è del tipo $e^{-jn\varphi}$. Per cui, aggiungendo e sottraendo uno stesso termine:

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_\varrho^*}{\varrho} \frac{\partial(\varrho H_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{H_\varrho^*}{\varrho} (-jn) H_\varrho - \frac{H_z^*}{\varrho} (-jn) H_z + H_z^* \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \\
 & = j \frac{n}{\varrho} |H_\varrho|^2 + \left(j \frac{n}{\varrho} |H_\varphi|^2 - j \frac{n}{\varrho} |H_\varphi|^2 \right) + j \frac{n}{\varrho} |H_z|^2 + \\
 & + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial(\varrho H_\varphi)}{\partial \varrho} H_\varrho^* + \frac{\partial(\varrho H_\varphi)}{\partial z} H_z^* \right] = \\
 & = j \frac{n}{\varrho} |H_\varrho|^2 + j \frac{n}{\varrho} |H_\varphi|^2 + j \frac{n}{\varrho} |H_z|^2 + \\
 & + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial(\varrho H_\varphi)}{\partial \varrho} H_\varrho^* + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho H_\varphi)}{\partial \varphi} H_\varphi^* + \frac{\partial(\varrho H_\varphi)}{\partial z} H_z^* \right] =^1 \\
 & = j \frac{n}{\varrho} |\underline{H}|^2 + \frac{1}{\varrho} \left[\nabla(\varrho H_\varphi) \cdot \underline{H}^* \right]
 \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}
 M_z &= -\frac{\mu}{2\omega} \int_V \left\{ -\frac{n}{\varrho} |\underline{H}|^2 + \frac{1}{\varrho} \operatorname{Re} \left[j \nabla(\varrho H_\varphi) \cdot \underline{H}^* \right] \right\} \varrho dV = \\
 &= \frac{\mu}{2\omega} \int_V \left\{ n |\underline{H}|^2 - \operatorname{Re} \left[j \nabla(\varrho H_\varphi) \cdot \underline{H}^* \right] \right\} dV
 \end{aligned}$$

Essendo

$$W_M = \frac{1}{4} \mu \int_V |\underline{H}|^2 dV$$

e tenendo conto dell'identità:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (f \underline{A}) &= f \nabla \cdot \underline{A} + \nabla f \cdot \underline{A} \quad \implies \quad \nabla f \cdot \underline{A} = \nabla \cdot (f \underline{A}) - f \nabla \cdot \underline{A} \\
 \implies \quad \nabla(\varrho H_\varphi) \cdot \underline{H}^* &= \nabla \cdot (\varrho H_\varphi \underline{H}^*) - \varrho H_\varphi \nabla \cdot \underline{H}^*
 \end{aligned}$$

si ha:

$$M_z = \frac{2n}{\omega} W_M - \frac{\mu}{2\omega} \int_V \operatorname{Re} \left[j \nabla \cdot (\varrho H_\varphi \underline{H}^*) - j (\nabla \cdot \underline{H}^*) \varrho H_\varphi \right] dV$$

Ma $\nabla \cdot \underline{H}^* = 0$ essendo $\mu \nabla \cdot \underline{H} = \nabla \cdot \underline{B} = 0$.

Applicando adesso il teorema della divergenza al secondo addendo a secondo membro si ottiene, tenendo conto del fatto che l'operatore parte reale commuta con l'integrazione:

$$M_z = \frac{2n}{\omega} W_M - \frac{\mu}{2\omega} \operatorname{Re} \left[j \oint_S \varrho H_\varphi \underline{H}^* \cdot \underline{n} dS \right]$$

¹Essendo

$$-j \frac{n}{\varrho} |H_\varphi|^2 = \frac{1}{\varrho} (-jn) H_\varphi H_\varphi^* = \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial(\varrho H_\varphi)}{\partial \varphi} H_\varphi^*$$

Ma l'ultimo addendo è nullo perché sulle pareti perfettamente conduttrici il campo magnetico è tangenziale. Essendo infine $2W_M = W$ si ottiene l'espressione finale cercata

$$M_z = \frac{nW}{\omega}$$

Capitolo 11

Cenni sulle equazioni integrali di Fredholm

11.1 Prime definizioni

Si chiama *equazione (integrale) di Fredholm di prima specie* un'equazione del tipo

$$\int_A K(x, y) f(y) dy = g(x) \quad (11.1)$$

dove, nota la funzione $g(x)$ ed il cosiddetto nucleo o *kernel* $K(x, y)$, si deve trovare $f(x)$. Si intenderà che x e y indichino variabili uni- o pluridimensionali. Si assumerà che il nucleo K sia della cosiddetta classe di Hilbert-Schmidt, cioè che risulti finito l'integrale

$$\int_A \int_A |K(x, y)|^2 dx dy$$

Un esempio familiare di equazione del tipo della (11.1) è dato dalla relazione che lega l'ingresso $f(x)$ e l'uscita $g(x)$ di un sistema lineare con risposta impulsiva $K(x, y)$. Ci si pone allora il problema inverso di recuperare l'ingresso corrispondente ad una data uscita. In questo caso, spesso il nucleo $K(x, y)$ dipende solo dalla differenza $x - y$ (sistema lineare stazionario) e l'equazione si dice del tipo a convoluzione.

Si chiama *equazione (integrale) di Fredholm di seconda specie, non omogenea*, un'equazione del tipo

$$g(x) = f(x) - \lambda \int_A K(x, y) f(y) dy \quad (11.2)$$

dove λ è un parametro (reale o complesso) noto.

Si chiama, infine, *equazione (integrale) di Fredholm di seconda specie, omogenea*, un'equazione del tipo

$$\int_A K(x, y) f(y) dy = \mu f(x) \quad (11.3)$$

ottenuta dalla (11.2) ponendo $g \equiv 0$. Se esistono delle funzioni $f(x)$ e dei valori di μ che soddisfano la (11.3) si dice che le $f(x)$ sono le autofunzioni e i μ i corrispondenti autovalori dell'equazione¹.

Per alcuni sviluppi è utile una notazione abbreviata delle equazioni precedenti. Scriveremo perciò tali equazioni nella forma

$$\underline{K} f(x) = g(x) \quad (11.4)$$

$$g(x) = f(x) - \lambda \underline{K} f(x) \quad (11.5)$$

$$\underline{K} f(x) = \mu f(x) \quad (11.6)$$

intendendo che l'operatore $\underline{K}$ applicato a $f(x)$ dia

$$\underline{K} f(x) = \int_A K(x, y) f(y) dy \quad (11.7)$$

cioè implichì sia il troncamento di f al dominio A che la composizione integrale con $K(x, y)$.

Chiameremo *nucleo iterato secondo* $K_2(x, y)$, *terzo* $K_3(x, y)$, ..., *n-simo* $K_n(x, y)$ *del nucleo* $K(x, y)$, il nucleo ottenuto mediante le operazioni

$$\begin{aligned} K_2(x, y) &= \int_A K(x, z) K(z, y) dz \\ K_3(x, y) &= \int_A K(x, z) K_2(z, y) dz \\ &\vdots \\ K_n(x, y) &= \int_A K(x, z) K_{n-1}(z, y) dz \end{aligned} \quad (11.8)$$

Nella notazione abbreviata operatoriale scriveremo

$$\underline{K}^n f(x) = \int_A K_n(x, y) f(y) dy \quad (11.9)$$

È facile verificare che se $f(x)$ è autofunzione di $\underline{K}$ essa è anche autofunzione di $\underline{K}^2$ secondo la relazione

$$\underline{K}^2 f(x) = \mu^2 f(x) \quad (11.10)$$

cioè con autovalore μ^2 e più in generale che è autofunzione di $\underline{K}^n$

$$\underline{K}^n f(x) = \mu^n f(x) \quad (11.11)$$

con autovalore μ^n .

¹Si deve fare attenzione al fatto che la terminologia usata non è la stessa per tutti gli autori. Alcuni chiamano autovalori gli inversi dei numeri μ soddisfacenti la (11.3). Altri indicano i μ detti con la denominazione di valori caratteristici.

11.2 Equazioni di II specie e serie di Neumann

Il metodo classico per cercare la soluzione dell'equazione di Fredholm di seconda specie, non omogenea, è basato su un procedimento di approssimazioni successive. Riferendoci alla (11.5), prendiamo come approssimazione zero la soluzione

$$f_0(x) = g(x) \quad (11.12)$$

e costruiamo le soluzioni di prima, seconda, n -sima approssimazione per sostituzioni successive nella (11.5)

$$f_1(x) = g(x) + \lambda \underline{K} f_0(x) = g(x) + \lambda \underline{K} g(x) \quad (11.13)$$

$$f_2(x) = g(x) + \lambda \underline{K} f_1(x) = g(x) + \lambda \underline{K} g(x) + \lambda^2 \underline{K}^2 g(x) \quad (11.14)$$

...

$$f_n(x) = g(x) + \lambda \underline{K} f_{n-1}(x) = g(x) + \lambda \underline{K} g(x) + \cdots + \lambda^n \underline{K}^n g(x) \quad (11.15)$$

Ammettiamo per un momento che passando al limite per $n \rightarrow \infty$ la serie risultante converga (uniformemente). È allora facile controllare che la funzione

$$f_\infty(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \underline{K}^r g(x) \quad (11.16)$$

costituisce una soluzione della (11.5). Difatti sostituendo la (11.16) nella (11.5) otteniamo

$$g(x) = \left[g(x) + \lambda \underline{K} g(x) + \lambda^2 \underline{K}^2 g(x) + \cdots \right] - \lambda \underline{K} \left[g(x) + \lambda \underline{K} g(x) + \lambda^2 \underline{K}^2 g(x) + \cdots \right]$$

che è un'identità (dato che per la supposta convergenza uniforme, è lecita l'integrazione termine a termine).

Il problema diventa allora quello di studiare le proprietà della serie (11.16) o serie di Neumann. Rimandiamo per questo alla bibliografia [16]-[20]. È chiaro tuttavia che le proprietà della serie dipenderanno dal tipo di nucleo K . Per avere almeno un'idea circa la possibilità di soluzione della (11.5) e (11.6) vale allora la pena di esaminare la classe più semplice di nuclei, quella dei nuclei di Pincherle-Goursat.

11.3 Nuclei di Pincherle-Goursat (o degeneri)

Prende tale denominazione un nucleo del tipo

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^N X_k(x) Y_k(y) \quad (11.17)$$

esprimibile come somma di prodotti di funzioni della sola x per funzioni della sola y . Inserendo la (11.17) nella (11.2) si ha

$$g(x) = f(x) - \lambda \sum_{k=1}^N f_k X_k(x) \quad (11.18)$$

avendo posto

$$f_k = \int_A f(y) Y_k(y) dy \quad (11.19)$$

La (11.18) può scriversi

$$f(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^N f_k X_k(x) \quad (11.20)$$

che rappresenta la soluzione della (11.2) se si possono trovare i coefficienti f_k . Per questo moltiplicando membro a membro la (11.18) per $Y_h(x)$ ed integrando su A otteniamo

$$g_h = f_h - \lambda \sum_{k=1}^N f_k \alpha_{hk} \quad h = 1, 2, \dots, N \quad (11.21)$$

avendo posto (quantità note)

$$g_h = \int_A g(x) Y_h(x) dx \quad (11.22)$$

$$\alpha_{hk} = \int_A X_k(x) Y_h(x) dx \quad (11.23)$$

Le (11.21) possono scriversi

$$\sum_{k=1}^N (\delta_{hk} - \lambda \alpha_{hk}) f_k = g_h \quad h = 1, 2, \dots, N \quad (11.24)$$

dove δ_{hk} è il simbolo di Kronecker. Si vede perciò che l'equazione integrale (11.2) è ricondotta ad un sistema di equazioni lineari non omogenee. In particolare esisterà una soluzione unica se λ assume un valore tale che

$$\det [\delta_{hk} - \lambda \alpha_{hk}] \neq 0 \quad (11.25)$$

Si dice allora che il valore di λ è un valore regolare, contrapponendolo a quei valori di λ , detti singolari, per i quali il determinante della (11.25) si annulla².

Operando allo stesso modo, si riconduce l'equazione omogenea (11.3) al sistema di equazioni lineari omogenee

$$\sum_{k=1}^N (\mu \delta_{hk} - \alpha_{hk}) f_k = 0 \quad h = 1, 2, \dots, N \quad (11.26)$$

²Si badi anche qui al fatto che la nomenclatura non è unica.

che ammetterà soluzioni non banali per quei valori di μ (autovalori) tali che

$$\det \left[\mu \delta_{hk} - \alpha_{hk} \right] = 0 \quad (11.27)$$

Si noterà che gli inversi degli autovalori della (11.3) danno dei valori singolari per la (11.2).

Oltre a permettere un collegamento fra equazioni integrali e sistemi di equazioni lineari, i nuclei di Pincherle-Goursat hanno notevole utilità per i calcoli numerici, in quanto qualsiasi nucleo può essere approssimato (bene quanto si vuole, vedi [16]-[20]) da un nucleo di Pincherle-Goursat.

Va detto comunque che, nella teoria delle equazioni integrali, i risultati più importanti per le applicazioni si ottengono restringendo la classe dei nuclei considerati e più precisamente passando da nuclei qualsiasi a nuclei hermitiani.

11.4 Nuclei hermitiani

Si dice *hermitiano* (in particolare simmetrico se è reale) un nucleo che gode della proprietà

$$K(y, x) = K^*(x, y) \quad (11.28)$$

Per un nucleo hermitiano si stabilisce tutta una serie di proprietà. Qui enumeriamo le più significative (senza dimostrazione; vedi [16]-[20]) che si riferiscono all'equazione omogenea (11.3).

Innanzitutto si trova che gli autovalori sono reali. Dati poi due autovalori distinti μ_1 e μ_2 corrispondenti a due autofunzioni che chiamiamo $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(x)$

$$\begin{aligned} \underline{K} \Phi_1(x) &= \mu_1 \Phi_1(x) \\ \underline{K} \Phi_2(x) &= \mu_2 \Phi_2(x) \end{aligned}$$

si dimostra che Φ_1 e Φ_2 sono ortogonali

$$\int_A \Phi_1(x) \Phi_2^*(x) dx = 0$$

Un autovalore può essere degenere nel senso che ad esso corrisponde un certo numero (detto rango dell'autovalore) di autofunzioni indipendenti. Esse possono essere ortogonalizzate (procedimento di Gram-Schmidt, [17]) in modo che l'insieme delle autofunzioni del nucleo formi un sistema ortogonale. Anzi, essendo le autofunzioni definite a meno di una costante moltiplicativa, potremo supporre che si tratti di un sistema ortonormale

$$\int_A \Phi_n(x) \Phi_m^*(x) dx = \delta_{nm} \quad (11.29)$$

Naturalmente c'è da chiedersi se autovalori e autofunzioni corrispondenti esistano per qualunque nucleo hermitiano. Si dimostra che esiste almeno un autovalore e, di più, che se il nucleo non è del tipo di Pincherle-Goursat ne esistono infiniti.

Un'utile caratterizzazione dei nuclei si ottiene esaminando i valori assunti dalla forma

$$Q = \int_A \int_A K(x, y) h^*(x) h(y) dx dy \quad (11.30)$$

per una generica funzione $h(x)$. Può accadere che comunque si scelga $h(x)$ la forma Q assuma sempre lo stesso segno. Si dice allora che il nucleo è definito positivo o negativo, a seconda del segno assunto da Q . Oppure può accadere che al variare di h la forma Q non assuma mai segno negativo (positivo) pur potendo annullarsi. Allora si parla di nucleo semidefinito positivo (negativo). Riassumendo, si hanno i seguenti casi³

$$\forall h(x) : \quad Q \begin{cases} > 0 & \text{nucleo definito positivo} \\ < 0 & \text{nucleo definito negativo} \\ \geq 0 & \text{nucleo semidefinito positivo} \\ \leq 0 & \text{nucleo semidefinito negativo} \end{cases} \quad (11.31)$$

Ad esempio, tenendo presente la (11.8) e la (11.28) è facile vedere che l'iterato secondo di un nucleo hermitiano qualsiasi è un nucleo semidefinito positivo.

Per un nucleo semidefinito si vede senza difficoltà che gli autovalori non nulli hanno tutti lo stesso segno.

Si è già detto che le autofunzioni formano un sistema ortonormale. Ci si può chiedere se tale sistema sia completo (in L_A^2). Come è ovvio, la risposta dipende dalle proprietà del nucleo. Premesso che si definisce chiuso un nucleo tale che

$$\forall h(x) : \quad Q \neq 0 \quad (11.32)$$

e quindi un nucleo che non ha l'autovalore zero; si dimostra che il sistema delle autofunzioni è completo se e solo se il nucleo è chiuso. Si noterà che, in particolare, i nuclei definiti sono chiusi.

Nel caso generale⁴ una funzione generica $f(x)$ ammette lo sviluppo assolutamente e uniformemente convergente

$$f(x) = \sum_n f_n \Phi_n(x) + r(x) \quad (11.33)$$

dove

$$f_n = \int_A f(x) \Phi_n^*(x) dx \quad (11.34)$$

e dove $r(x)$ è una funzione resto che risulta ortogonale a tutte le autofunzioni $\Phi_n(x)$ e che si annulla per nuclei chiusi. È tuttavia notevole che anche se il nucleo non è chiuso esiste

³Anche qui la terminologia non è universalmente accettata.

⁴Ammettiamo però che la funzione di $x \int_A |K(x, y)|^2 dy$ sia limitata.

una classe di funzioni per le quali il sistema delle Φ_n è completo. Si tratta delle funzioni che potremmo definire come immagini delle funzioni di L_A^2 ottenute tramite K e precisamente delle funzioni $g(x)$ della forma

$$g(x) = \underline{K} f(x) \quad (11.35)$$

ottenute applicando l'operatore $\underline{K}$ ad una qualsiasi funzione $f(x)$. Un celebre teorema, il teorema di Hilbert-Schmidt, asserisce infatti che qualunque $g(x)$ del tipo (11.35) ammette lo sviluppo assolutamente e uniformemente convergente

$$g(x) = \sum_n g_n \Phi_n(x) \quad g_n = \int_A g(x) \Phi_n^*(x) dx \quad (11.36)$$

Si noti che ciò è vero anche per un nucleo di Pincherle-Goursat per il quale la sommatoria (11.36) è su un numero finito di termini. Una traduzione in termini fisici, quando si faccia riferimento all'interpretazione data all'inizio alla (11.1), è che l'uscita di un sistema con risposta impulsiva $K(x, y)$ è sempre esprimibile come sovrapposizione di autofunzioni di $K(x, y)$ anche se questo non è vero per la funzione in ingresso.

A questo punto è abbastanza spontaneo chiedersi se anche il nucleo $K(x, y)$ non sia esprimibile in una serie di autofunzioni del tipo

$$K(x, y) = \sum_n \mu_n \Phi_n(x) \Phi_n^*(y) \quad (11.37)$$

La risposta è che in generale ciò non è possibile (se non nel senso della convergenza in media). Vi sono però due eccezioni. La prima, relativamente ovvia, è che la (11.37) vale per i nuclei di Pincherle-Goursat. La seconda riguarda i nuclei semidefiniti positivi per i quali il teorema di Mercer asserisce la validità della (11.37) con convergenza assoluta e uniforme. Quindi per un K definito positivo, la traccia, definita come

$$\text{tr } \underline{K} = \int_A K(x, x) dx \quad (11.38)$$

uguaglia la somma degli autovalori

$$\text{tr } \underline{K} = \sum_n \mu_n \quad (11.39)$$

Ricordando le osservazioni che l'iterato secondo di un nucleo hermitiano è semidefinito positivo e che i suoi autovalori sono i quadrati dei μ_n , possiamo poi dire che, addirittura per qualunque nucleo, vale la

$$\text{tr } \underline{K}^2 = \sum_n \mu_n^2 \quad (11.40)$$

Sfruttando il teorema di Hilbert-Schmidt si può dimostrare anzi che per qualunque nucleo

$$\text{tr } \underline{K}^N = \sum_n \mu_n^N \quad N \geq 2 \quad (11.41)$$

11.5 Equazioni di I specie

Limitandoci ai nuclei hermitiani possiamo esaminare il problema della risoluzione della (11.1)

$$\int_A K(x, y) f(y) dy = g(x)$$

Supponendo di conoscere le autofunzioni $\Phi_n(x)$ del nucleo K , sviluppiamo $f(x)$ secondo la (11.33) ed inseriamo lo sviluppo in (11.1)

$$\int_A K(x, y) \left[\sum_n f_n \Phi_n(y) + r(y) \right] dy = \sum_n f_n \mu_n \Phi_n(x) + \int_A K(x, y) r(y) dy \quad (11.42)$$

dove si è integrato termine a termine (grazie alla convergenza uniforme) e si è sfruttata la proprietà delle autofunzioni. L'ultimo termine nella (11.42) è certamente nullo se il nucleo è hermitiano. Difatti è del tipo (11.35) e quindi, per il teorema di Hilbert-Schmidt, è sviluppabile in autofunzioni; ma per l'ortogonalità di $r(x)$ alle Φ_n tutti i coefficienti sono nulli. Ancora dal teorema di Hilbert-Schmidt deriva che $g(x)$ ammette lo sviluppo (11.36). In conclusione, la (11.1) diventa

$$\sum_n f_n \mu_n \Phi_n(x) = \sum_n g_n \Phi_n(x) \quad (11.43)$$

Il significato della (11.43) è il seguente. Sviluppando il termine noto $g(x)$ in autofunzioni possiamo trovare i coefficienti g_n . Da questi, dividendo per gli autovalori μ_n , troviamo i coefficienti f_n . La soluzione della (11.1) sarà allora data da

$$f(x) = \sum_n \frac{g_n}{\mu_n} \Phi_n(x) + r'(x) \quad (11.44)$$

dove r' è una qualunque funzione ortogonale a tutte le Φ_n . È come dire che la soluzione non è unica tranne nel caso in cui il nucleo K è chiuso (allora sia r che r' si annullano identicamente). È poi ovvio che la (11.44) è una soluzione solo a patto che la serie a secondo membro converga (almeno in media). Si può vedere che ciò accade se e solo se converge la serie numerica

$$\sum_n \left| \frac{g_n}{\mu_n} \right|^2 \quad (11.45)$$

È questo il caso particolare (per nuclei simmetrici) di un teorema più generale, sulla risoluzione della (11.1), noto come teorema di Picard.

11.6 Equazioni singolari

Vanno sotto questa denominazione vari tipi di equazioni che, per un motivo o per l'altro, non rientrano fra quelle esaminate finora, pur conservandone la struttura. Un esempio che

ci interessa è quello in cui il dominio base A diventi infinito. Più in particolare esaminiamo il caso in cui A coincida con tutto lo spazio di variabilità di x e K sia un nucleo di convoluzione. L'equazione (11.3) diventa

$$\int K(x-y) \Phi(y) dy = \mu \Phi(x) \quad (11.46)$$

È facile vedere che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(x-y)|^2 dx dy$$

diverge, per cui K non appartiene alla classe di Hilbert-Schmidt. Si può però osservare che la (11.46), trasformata alla Fourier, fornisce

$$\tilde{K}(\nu) \tilde{\Phi}(\nu) = \mu \tilde{\Phi}(\nu) \quad (11.47)$$

È chiaro che questa equazione ammette la soluzione

$$\tilde{\Phi}(\nu) = \delta(\nu - \bar{\nu}) \quad (11.48)$$

con

$$\mu = \tilde{K}(\bar{\nu}) \quad (11.49)$$

comunque si scelga $\bar{\nu}$. In altri termini le autofunzioni della (11.46) sono del tipo (eliminando la sopralineatura superflua su ν):

$$\Phi(\nu, x) = e^{2\pi i \nu x} \quad \text{con } \mu(\nu) = \tilde{K}(\nu) \quad (11.50)$$

Il significato della (11.50) è chiaro: le autofunzioni e gli autovalori diventano un insieme continuo, in cui la variabile ν sostituisce l'indice discreto n . Le autofunzioni divengono i familiari esponenziali di Fourier, cosicché uno sviluppo in autofunzioni diventa uno sviluppo alla Fourier. Il discorso dovrebbe essere approfondito, ma questo cenno può almeno servire a stabilire un collegamento tra i concetti introdotti in tutto il paragrafo e quelli dell'analisi di Fourier.

Capitolo 12

Cenni sulle funzioni sferoidali prolate

12.1 Definizioni e proprietà

Le funzioni sferoidali prolate debbono il loro nome al fatto di essere soluzioni di una equazione differenziale che deriva dall'equazione di Helmholtz quando si usino coordinate curvilinee sferoidali [31]. Il nostro interesse per tali funzioni è però dovuto al fatto che esse risultano autofunzioni di un'equazione di Fredholm importante per la teoria dei segnali (ottici o elettrici). Per illustrare tale equazione, consideriamo un sistema lineare del tipo time-invariant o space-invariant. Con queste locuzioni, come è noto, si intende indicare un sistema la cui risposta impulsiva sia indipendente (come forma) dall'istante o dal punto di applicazione dell'impulso di ingresso. Detta K la risposta impulsiva e A il dominio in cui la funzione di ingresso $f(x)$ è diversa da zero, la funzione d'uscita $g(x)$ è allora data da

$$g(x) = \int_A f(y) K(x - y) dy \quad (12.1)$$

cioè da un integrale di convoluzione. Riferendoci a segnali unidimensionali, supponiamo che la funzione di trasferimento del sistema, cioè la trasformata di Fourier di K , sia unitaria entro la banda di frequenze $-\nu_M$, ν_M e zero altrove. In altri termini, immaginiamo che il sistema sia un filtro passabasso ideale. In simboli

$$\tilde{K}(\nu) = \text{rect} \left(\frac{\nu}{2\nu_M} \right) \quad (12.2)$$

La corrispondente risposta impulsiva sarà

$$K(x) = 2\nu_M \text{sinc}(2\nu_M x) \quad (12.3)$$

Supponendo ancora che il dominio A sia l'intervallo $(-X, X)$ la (12.1) diventa

$$g(x) = \int_{-X}^X 2\nu_M \text{sinc}[2\nu_M(x - y)] f(y) dy \quad (12.4)$$

e l'equazione omogenea di Fredholm di II specie (11.3) con lo stesso nucleo è

$$2\nu_M \int_{-X}^X \text{sinc}[2\nu_M(x-y)] f(y) dy = \mu f(x) \quad (12.5)$$

Ponendo ora

$$2\nu_M x = x' \quad f\left(\frac{x'}{2\nu_M}\right) = \Phi(x') \quad 2\nu_M X = \frac{c}{2} \quad (12.6)$$

la (12.5) assume la forma standard

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi(y) \text{sinc}(x-y) dy = \mu \Phi(x) \quad (12.7)$$

avendo tolto l'inessenziale apice ad x' e y' . Le autofunzioni e gli autovalori della (12.7) dipenderanno dal parametro c . Come risulta dalla (12.6) tale parametro è il prodotto della larghezza $2X$ dell'intervallo in cui esiste segnale e della larghezza di banda $2\nu_M$ del sistema¹. Per tale ragione esso prende il nome di prodotto tempo-banda o spazio-banda a seconda delle applicazioni. Si noti che nella forma standard (12.7) va tutto come se la banda passante si estendesse da $\nu = -\frac{1}{2}$ a $\nu = \frac{1}{2}$, essendo

$$\text{rect}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(\nu)$$

Il nucleo della (12.7) è chiaramente hermitiano (anzi addirittura simmetrico in quanto reale e pari), inoltre non è difficile mostrare che si tratta di un nucleo definito positivo. Difatti esaminando la forma quadratica (11.30)

$$Q = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} h^*(x) h(y) \text{sinc}(x-y) dx dy \quad (12.8)$$

ed esprimendo in essa la sinc tramite la sua trasformata di Fourier

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi\nu x} d\nu \quad (12.9)$$

si vede che essa diventa

$$Q = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\nu \left| \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} h(y) e^{-i2\pi\nu y} dy \right|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{h}(\nu)|^2 d\nu \quad (12.10)$$

È intanto evidente che Q non può mai essere negativo. Ma in realtà non può neppure essere nullo. Si potrebbe vedere infatti che $\tilde{h}$, come trasformata di Fourier di una funzione a supporto finito ($h(x)$ si annulla all'esterno di $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$) è funzione analitica e come tale

¹In alcuni lavori si troverà indicato con c il prodotto $\frac{c\pi}{2}$

non può annullarsi identicamente in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ senza annullarsi su tutto l'asse ν . Pertanto il nucleo sinc è definito positivo e quindi è anche un nucleo chiuso. Applicando i risultati citati precedentemente, possiamo dedurre che esiste un sistema (discreto) di autofunzioni complete in L_c^2 corrispondente ad un insieme di autovalori positivi. Tali autofunzioni sono le funzioni sferoidali prolate. Esiste un diverso insieme di sferoidali prolate per ogni possibile valore di c , per cui una notazione completa per tali funzioni e per i corrispondenti autovalori dovrebbe essere del tipo $\Phi_n(c; x)$ e $\mu_n(c)$. Per il calcolo delle sferoidali si possono usare opportuni sviluppi in serie (diversi a seconda dei valori di c e di x cui si è interessati). Non avremo bisogno di tali sviluppi e rimandiamo per essi alla bibliografia [32, 33, 34]. Ci accontentiamo di dare un'idea del possibile andamento di tali funzioni, mediante i grafici di Fig. 12.1. Si tratta di funzioni reali aventi la stessa parità del loro indice n .

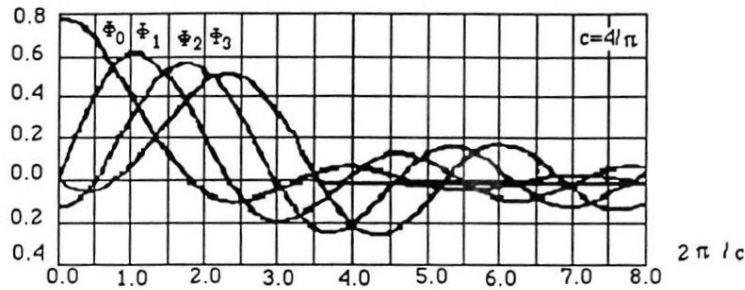


Figura 12.1: Andamento delle Φ_n ottenute per $c = \frac{4}{\pi}$

Attraverso la (12.7) esse possono intendersi definite su tutto l'asse x (anche se alla convoluzione partecipa solo il tronco centrale). Il numero di zeri che la generica Φ_n possiede in $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ è pari ad n . Per visualizzare l'andamento delle Φ_n sotto l'azione dell'operatore corrispondente alla (12.7), si consideri lo schema grafico di Fig. 12.2.

La generica Φ_n , definita su tutto l'asse x , viene troncata all'intervallo base $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$. Chiamiamo $\Phi_n^{(T)}$ la versione troncata di Φ_n . Essa viene trasformata alla Fourier. La trasformata risultante $\tilde{\Phi}_n^{(T)}$ invade tutto l'asse ν (perché analitica). Anch'essa viene troncata (questa volta all'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) e antitrasformata. Il risultato, che può scriversi come convoluzione tra $\Phi_n^{(T)}$ e sinc, riproduce la Φ_n su tutto l'asse a meno di un fattore moltiplicativo μ_n . Chiamiamo convenzionalmente energia di una funzione (di x o di ν) l'integrale del quadrato del suo modulo. Allora possiamo supporre che ciascuna Φ_n abbia energia unitaria entro l'intervallo base $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$. Quando si opera il primo passaggio indicato in Fig. 12.2, possiamo dire che per il teorema di Parseval² tale energia si ripartisce (in modo non uniforme) su tutto l'asse ν . Perciò il troncamento all'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ riduce l'energia disponibile. Quest'ultima viene poi ripartita sull'asse x quando si attua il secondo passag-

²

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu$$

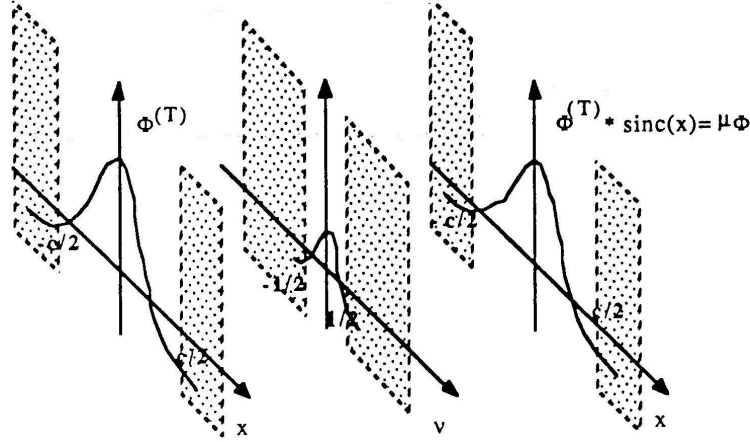


Figura 12.2: Troncamento della Φ_n e della $\tilde{\Phi}_n$

gio di Fig. 12.2. Alla fine, l'energia che cade in $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ sarà μ_n^2 . È chiaro perciò che $\mu_n < 1$ (senza tuttavia poter mai diventare zero). L'ordinamento delle sferoidali fornito dall'indice n è tale che $\mu_o > \mu_1 > \mu_2 > \dots$ (potendosi mostrare che non c'è degenerazione).

Un altro significato degli autovalori può essere visto calcolando il prodotto scalare di due autofunzioni su tutto l'asse x . Precisamente, calcoliamo la quantità

$$P_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx \quad (12.11)$$

Esprimendo $\Phi_n(x)$ e $\Phi_m(x)$ tramite la (12.7), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P_{nm} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\mu_n} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_n(s) \operatorname{sinc}(x-s) ds \frac{1}{\mu_m} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_m(t) \operatorname{sinc}(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{\mu_n \mu_m} \iint_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_n(s) \Phi_m(t) ds dt \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(x-s) \operatorname{sinc}(x-t) dx \end{aligned} \quad (12.12)$$

Se nell'ultimo integrale poniamo $s-x = \eta$ e teniamo conto della parità della sinc, otteniamo

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sinc}(x-s) \operatorname{sinc}(x-t) dx &= - \int_{\infty}^{-\infty} \operatorname{sinc}(-\eta) \operatorname{sinc}(s-\eta-t) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\eta) \operatorname{sinc}(s-t-\eta) d\eta \end{aligned} \quad (12.13)$$

L'integrale (12.13) è quindi la convoluzione di due sinc calcolata in $s-t$. Ma è facile rendersi conto che la convoluzione di due sinc (di uguale larghezza) è ancora una sinc (della stessa larghezza). Basta pensare che la trasformata di Fourier della convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier delle due funzioni da convolvere. In questo caso si

tratta di due rect che, moltiplicate fra loro, ridanno la rect. Perciò la (12.13) dà

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x-s) \text{sinc}(x-t) dx = \text{sinc}(s-t) \quad (12.14)$$

Inserendo la (12.14) nella (12.12) e sfruttando nuovamente la (12.7) (questa volta in senso inverso) otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \frac{1}{\mu_n} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_n(s) \Phi_m(s) ds = \frac{\delta_{nm}}{\mu_n} \quad (12.15)$$

Vediamo da qui che l'autovalore μ_n è uguale al rapporto fra l'energia della Φ_n che cade in $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ (e che abbiamo posto uguale all'unità) e quella che cade su tutto l'asse x . Pertanto un valore di μ_n prossimo all'unità (o prossimo a zero) indica un'autofunzione molto concentrata entro l'intervallo base (oppure essenzialmente all'esterno di esso).

La (12.15) indica un'altra caratteristica peculiare delle sferoidali prolate. Esse sono ortogonali non solo sull'intervallo base (dove le supponiamo addirittura ortonormali), ma anche su tutto l'asse x .

Abbiamo finora fatto riferimento alla proprietà delle Φ_n di essere autofunzioni della (12.7). In realtà esse godono di una proprietà ancora più fondamentale dalla quale consegue la precedente. Si tratta del fatto che esse si riproducono per trasformazione di Fourier finita. Precisamente, si può mostrare che vale la relazione

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_n^{(T)}(y) e^{-i2\pi\nu y} dy = i^{-n} \sqrt{c\mu_n} \Phi_n(c\nu) \quad (-\infty < \nu < \infty) \quad (12.16)$$

il cui significato è appunto il seguente: presa la generica sferoidale Φ_n , troncandola all'intervallo base e trasformando alla Fourier il risultato, si ottiene come spettro una funzione di ν che, a meno di un fattore moltiplicativo ed entro un fattore di scala (c), riproduce la funzione Φ_n stessa su tutto l'asse ν . Si noti che il fattore di scala è tale che entro la banda passante $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ va a cadere la medesima parte centrale della Φ_n che cadeva in $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$.

Data questa proprietà delle sferoidali è intuitivamente chiaro che esse soddisfino la (12.7) che implica due passaggi del tipo (12.16) (vedi Fig. 12.2). Per fare un controllo formale, cominciamo con l'invertire alla Fourier la (12.16)

$$\Phi_n^{(T)}(y) = i^{-n} \sqrt{c\mu_n} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(c\nu) e^{i2\pi\nu y} d\nu \quad (12.17)$$

Ponendo $c\nu = \eta$ ($\Rightarrow d\nu = d\eta/c$), possiamo scrivere la (12.17) nella forma

$$\Phi_n^{(T)}(y) = i^{-n} \sqrt{\frac{\mu_n}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\eta) e^{i2\pi\eta \frac{y}{c}} d\eta \quad (12.18)$$

e ancora, con $y/c = \gamma$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\eta) e^{i2\pi\eta\gamma} d\eta = i^n \sqrt{\frac{c}{\mu_n}} \Phi_n^{(T)}(c\gamma) \quad (12.19)$$

Possiamo ancora cambiare nome alle variabili ($\eta = x; \gamma = \nu$) e prendere la complessa coniugata della (12.19). Ciò dà

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) e^{-i2\pi\nu x} dx = i^{-n} \sqrt{\frac{c}{\mu_n}} \Phi_n^{(T)}(c\nu) \quad (12.20)$$

che completa il significato della (12.16): se si trasforma alla Fourier il tronco centrale della $\Phi_n(x)$ essa si riproduce su tutto l'asse ν [vedi (12.16)]; se si trasforma la $\Phi_n(x)$ indefinita, si riproduce sull'asse ν solo il tronco centrale [vedi (12.20)]. Invertendo alla Fourier la (12.20) si ha poi

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_n^{(T)}(c\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu = i^n \sqrt{\frac{\mu_n}{c}} \Phi_n(x) \quad (12.21)$$

Supponiamo ora di compiere i due passi indicati in Fig. 12.2. Ciò significa fare la trasformazione (12.16), troncata alla banda $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e antitrasformare. Il risultato sarà [vedi (12.16)]

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi\nu x} d\nu \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_n^{(T)}(y) e^{-i2\pi\nu y} dy = i^{-n} \sqrt{c\mu_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_n(c\mu_n) e^{i2\pi\nu x} d\nu \quad (12.22)$$

Invertendo l'ordine di integrazione, il primo membro della (12.22) diventa

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_n^{(T)}(y) dy \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi\nu(x-y)} d\nu = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \Phi_n^{(T)}(y) \text{sinc}(x-y) dy \quad (12.23)$$

mentre, per la (12.21), il secondo membro della (12.22) diviene

$$i^{-n} \sqrt{c\mu_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_n(c\mu_n) e^{i2\pi\nu x} d\nu \equiv i^{-n} \sqrt{c\mu_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_n^{(T)}(c\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu = \mu_n \Phi_n(x) \quad (12.24)$$

Sostituendo la (12.23) e la (12.24) a primo e secondo membro, rispettivamente, della (12.22) si ottiene la (12.7) come si voleva controllare.

Il fatto che le sferoidali si riproducano per trasformazione di Fourier finita rende abbastanza prevedibile una loro ulteriore proprietà e cioè quella che per $c \rightarrow \infty$ le sferoidali tendono ad identificarsi con le funzioni di Hermite-Gauss che, notoriamente, si riproducono per trasformazioni di Fourier (senza troncamenti).

Prima di chiudere questi cenni aggiungiamo un paio di elementi. Il primo riguarda l'andamento degli autovalori in funzione dell'indice n . La caratteristica essenziale di tale andamento è la seguente. Per valori di c superiori a poche unità, gli autovalori μ_n sono molto vicini a uno finché l'indice n è più piccolo di un indice critico dato dalla parte intera di c (indicata con $[c]$), mentre diventano molto prossimi a zero per valori di n superiori. La transizione da una regione all'altra è piuttosto rapida come è mostrato nella Fig. 12.3 che riporta gli autovalori corrispondenti a $c = \frac{22}{\pi} \cong 7.00282$.

Sappiamo già che gli autovalori non possono essere né rigorosamente uno, né rigorosamente zero. Tuttavia le differenze (da uno o da zero a seconda dei casi) possono essere

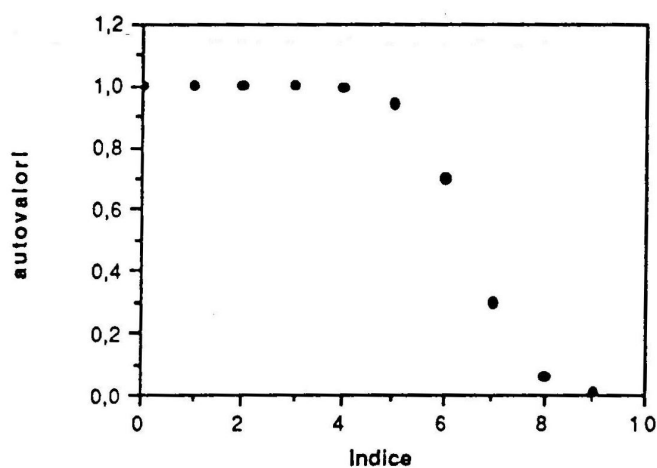


Figura 12.3: Autovalori in funzione dell'indice n , calcolati con $c = 7.00282 = \frac{22}{\pi}$

n	Autovalore
0	0.99999999
1	0.99999949
2	0.99998091
3	0.99957158
4	0.99371700
5	0.94136927
6	0.70394130
7	0.29607849
8	$0.60370339 \cdot 10^{-1}$
9	$0.71417030 \cdot 10^{-2}$
10	$0.60469421 \cdot 10^{-3}$
11	$0.40395675 \cdot 10^{-4}$

Tabella 12.1: Valori numerici degli autovalori riportati in Fig. [12.3](#)

molto piccole. A titolo di esempio riportiamo in Tab. 12.1 i valori numerici degli autovalori graficati in Fig. 12.3.

Quando il prodotto spazio-banda diventa dell'ordine dell'unità o inferiore, l'andamento a gradino dei μ_n non sussiste più perché anche i μ_n di indice inferiore a $[c]$ si scostano sensibilmente da uno. In Tab. 12.2 è dato un esempio per $c = \frac{2}{\pi} \cong 0.63662$.

n	Autovalore
0	0.57258178
1	$0.62791274 \cdot 10^{-1}$
2	$0.12374793 \cdot 10^{-2}$
3	$0.92009770 \cdot 10^{-5}$
4	$0.37179286 \cdot 10^{-7}$
5	$0.94914367 \cdot 10^{-10}$
6	$0.16715716 \cdot 10^{-12}$
7	$0.21544491 \cdot 10^{-15}$

Tabella 12.2: Valori numerici dei μ_n , calcolati per $c = \frac{2}{\pi}$

Per le tabulazioni estese si veda [34].

L'ultima osservazione che vogliamo aggiungere è la seguente. Abbiamo visto che le sferoidali prolate tronche formano un sistema completo in L_c^2 . Abbiamo anche visto che le sferoidali indefinite sono ortogonali sull'asse x . Ci chiediamo: quali funzioni sono, su tutto l'asse x , sviluppabili in sferoidali? La risposta è abbastanza immediata se si tiene conto della (12.20). Le sferoidali indefinite hanno trasformata di Fourier concentrata in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e in tale intervallo le trasformate (che sono le Φ_n tronche) formano un sistema completo. È facile concludere, applicando il teorema di Parseval, che le Φ_n indefinite permettono di sviluppare su tutto l'asse x qualunque funzione limitata in banda nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

12.2 Due esempi di applicazione delle sferoidali

Il primo esempio riguarda la possibilità di estrapolare una funzione limitata in banda a partire dalla conoscenza di essa sull'intervallo centrale. Sia $f(x)$ una funzione con spettro contenuto in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Per quanto osservato alla fine della sezione precedente, è possibile sviluppare $f(x)$ in sferoidali

$$f(x) = \sum_n f_n \Phi_n(x) \quad (12.25)$$

dove, in base alle (12.11) e (12.15), si dovrà porre

$$f_n = \mu_n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi_n(x) dx \quad (12.26)$$

La (12.25) è valida per qualunque valore di x e la (12.26) richiederebbe la conoscenza di $f(x)$ su tutto l'asse x per il calcolo dei coefficienti f_n . Tuttavia la doppia proprietà di

ortogonalità delle Φ_n permette il calcolo dei coefficienti f_n in base alla conoscenza di $f(x)$ entro l'intervallo $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ soltanto. Difatti, essendo le Φ_n ortonormali in tale intervallo, basta moltiplicare la (12.25) membro a membro per $\Phi_m(x)$ e integrare fra $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ per ottenere

$$f_m = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} f(x) \Phi_m(x) dx \quad (12.27)$$

A questo punto la (12.25) permette di ricostruire la funzione su tutto l'asse x (per estrapolazione).

Il secondo esempio riguarda la possibilità di approssimare in un intervallo una funzione qualsiasi mediante funzioni limitate in banda. Per apprezzare l'interesse della questione, pensiamo ad una funzione come $\cos 2\pi x$, il cui spettro contiene solo le frequenze ± 1 e chiediamoci: è possibile rappresentare una porzione di tale funzione mediante una sovrapposizione di funzioni, come le sferoidali indefinite, limitate in banda a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$? Sembra che la risposta debba essere negativa dato che lo spettro della funzione considerata è esterno alla banda detta. Occorre però osservare che si vuole rappresentare solo il tronco centrale di tale funzione e che, all'esterno di $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$, ci può essere una funzione differente. Può allora succedere che lo spettro complessivo rientri in tutto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Per formalizzare il discorso, sia $f(x)$ la funzione arbitraria da rappresentare e $f^{(T)}(x)$ la sua versione troncata all'intervallo centrale

$$f^{(T)}(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq \frac{c}{2} \\ 0, & |x| > \frac{c}{2} \end{cases} \quad (12.28)$$

Essendo le $\Phi_n^{(T)}$ complete in $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$, possiamo sviluppare $f^{(T)}(x)$ nella serie

$$f^{(T)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Phi_n^{(T)}(x) \quad \left\{ f_n = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} f(x) \Phi_n(x) dx \right\} \quad (12.29)$$

Chiaramente $f^{(T)}(x)$ non è limitata in banda. Tuttavia se definiamo la funzione

$$\bar{f}(x) = \sum_n f_n \Phi_n(x) \quad (12.30)$$

formata dalle sferoidali indefinite, abbiamo una funzione limitata in banda a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e che entro l'intervallo $(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ coincide con $f(x)$. Naturalmente, fuori dell'intervallo detto $\bar{f}(x)$ non coinciderà con $f(x)$ a meno che quest'ultima non sia già per suo conto limitata in banda a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Per questa e varie altre applicazioni si veda [35, 36, 37].

12.3 Generalizzazioni

Ci siamo finora riferiti a problemi unidimensionali. È possibile estendere il discorso a casi bidimensionali. La cosa è banale per il caso in cui il dominio base e la banda passante

siano di tipo rettangolare, perché il problema si riconduce a due problemi unidimensionali del tipo trattato. È ancora possibile, ma non banale, per geometrie circolari [38]. Quanto al caso di geometrie arbitrarie si arriva solo ad estendere qualche caratteristica generale come l'andamento a gradino degli autovalori [39] senza poter calcolare esplicitamente le autofunzioni.

Parte II

Complementi

Capitolo 13

Il fenomeno del leakage per strutture guidanti planari

13.1 Introduzione

Tutte le strutture guidanti che non siano completamente racchiuse da pareti conduttrici, oltre alle perdite per dissipazione ohmica presenti in qualsiasi struttura reale, possono essere caratterizzate da perdite addizionali per radiazione.

Le linee di trasmissione stampate descritte nel capitolo 3 presentano una sezione che è sempre illimitata in almeno una direzione ed appartengono pertanto alla categoria delle guide interessate da questo tipo di fenomeni. In queste strutture può accadere che i modi non siano completamente confinati e perdano, durante la propagazione, una parte dell'energia trasportata sotto forma di radiazione nel substrato dielettrico di supporto e nello spazio. In letteratura questo fenomeno è indicato con il termine inglese di *leakage*, che letteralmente significa *sgocciolamento*, per indicare appunto la diffusione progressiva dell'energia del modo nello spazio circostante.

Si vuole osservare che, benché le strutture reali siano sempre limitate e generalmente racchiuse in un involucro protettivo di materiale conduttore, i fenomeni di leakage, che pur sono caratteristici di strutture idealmente indefinite, rivestono una notevole importanza pratica. Infatti la loro presenza è indice del fatto che una parte della potenza si allontana dalla struttura guidante, causando oltre che perdite addizionali, interferenza tra i vari elementi circuitali presenti nello stesso involucro. Per questo motivo l'argomento è stato ed è oggetto di numerosi studi ed il fenomeno è stato rilevato in quasi tutte le guide planari comunemente usate [40] [41] [42].

Se un modo perde energia per radiazione, la sua costante di propagazione k_{x_o} deve contenere, anche in assenza di dissipazioni nel mezzo, una costante di attenuazione e quindi essere generalmente complessa. Questo tipo di modi vengono denominati usualmente modi *leaky* [43] [44]. Essi rappresentano soluzioni dell'equazione caratteristica che non soddisfano alle condizioni di radiazione e quindi appartengono alla categoria dei cosiddetti modi impropri. Tuttavia, in un dominio limitato dello spazio, essi possono molto efficacemen-

te descrivere i fenomeni di radiazione [43] [44]. In questo capitolo si intende fornire una descrizione generale dei fenomeni di radiazione nelle strutture planari ed illustrare il ruolo svolto dalle soluzioni leaky.

13.2 Meccanismi di perdita per radiazione in strutture planari

Nell'introduzione si è detto che le strutture planari, essendo generalmente a sezione indefinita, possono essere interessate da perdite radiative. Si vuole ora discutere più in dettaglio come ciò sia possibile e sotto che forma l'energia si allontana dalla regione guidante della struttura.

Le perdite per radiazione possono essere distinte in due categorie fondamentali a seconda della forma sotto la quale la potenza si allontana dalla linea. Un primo tipo di fenomeno radiativo, sempre possibile, è rappresentato dall'eccitazione progressiva di onde superficiali nel substrato, in una direzione obliqua rispetto a quella della linea. Queste si propagano nel dielettrico disperdendo la potenza inizialmente trasportata dal modo.

Se la struttura è aperta, come ad esempio la microstriscia, è possibile che la potenza venga ceduta direttamente nello spazio libero per eccitazione di uno spettro continuo di onde piane. In tal caso il fenomeno viene detto di radiazione per onda spaziale, per distinguerlo dal precedente che avviene per onda superficiale.

13.2.1 Perdita per radiazione da onda superficiale

Tutte le guide planari sono costruite su una struttura dielettrica stratificata, in grado di supportare onde superficiali di tipo TE e TM. Poiché il supporto è stato supposto illimitato sul piano orizzontale, queste soluzioni non hanno una direzione di propagazione privilegiata e, se eccitate da una sorgente puntiforme, danno luogo ad onde cilindriche, le cui costanti di fase sul piano xy , calcolabili applicando il metodo della risonanza trasversa nella direzione z , verranno generalmente indicate con k_{TE_n} e k_{TM_n} ¹. Se l'eccitazione, d'altra parte, è di tipo lineare, indefinita lungo una direzione, le onde eccitate nel substrato sono piane non uniformi e si propagano in una direzione ben definita con le medesime costanti di fase k_{TE_n} e k_{TM_n} . È importante osservare che la direzione dell'onda superficiale può essere una direzione qualsiasi sul piano xy ed è determinata dalle caratteristiche della sorgente.

Si consideri una guida planare costituita da una generica struttura dielettrica a più strati e da una striscia conduttrice parallela alla direzione dell'asse x . Quando un modo si propaga lungo la linea, le densità di corrente presenti sulla striscia costituiscono una possibile sorgente di tipo lineare in grado di eccitare sotto forma di onde piane non uniformi le onde superficiali del substrato. Affinché le onde superficiali siano eccitate occorre che venga soddisfatta la relazione di fase tra la corrente sulla striscia e la componente del vettore di propagazione dell'onda lungo l'asse x . La situazione è schematicamente illustrata dalla

¹Si tratta in sostanza dei k_z dei vari modi superficiali.

Fig. 13.1, nella quale la costante di propagazione del modo è indicata con k_{x_o} e quella della generica onda superficiale con k_s .

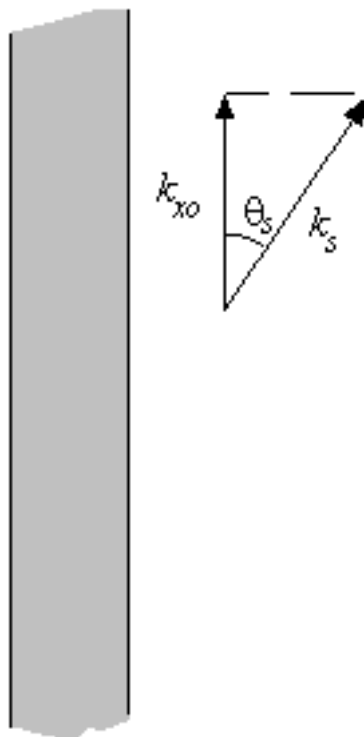


Figura 13.1: Illustrazione del meccanismo che regola l'eccitazione dell'onda superficiale.

Si deduce facilmente che l'onda nel substrato è eccitata solo se è verificata la condizione $k_{x_o} < k_s$ ed in tal caso l'angolo che la direzione di propagazione dell'onda superficiale forma con l'asse x , che è anche l'asse della linea, è dato dalla relazione:

$$\cos \theta_s = \frac{k_{x_o}}{k_s} \quad (13.1)$$

L'argomento appena esposto costituisce una giustificazione intuitiva, ma molto utile dei fenomeni di leakage per onda superficiale e verrà ripreso nel paragrafo 13.4, come criterio per stabilire se un modo leaky abbia significato fisico.

13.2.2 Perdita per radiazione nello spazio

Le guide planari aperte, cioè prive di uno dei piani conduttori di copertura, oltre che per onda superficiale, possono irradiare potenza direttamente nello spazio. Poiché si sta considerando una geometria planare, la forma nella quale conviene pensare il campo nello spazio è una sovrapposizione di onde piane, che devono soddisfare la condizione di separabilità

$$k_o^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (13.2)$$

Come per le onde superficiali, si può supporre che le correnti sulla striscia possano considerarsi una sorgente di tipo lineare indefinita in grado di eccitare una parte dello spettro di onde piane. Poiché tutte le componenti del campo del modo possiedono una comune dipendenza rispetto a x , definita dalla costante di propagazione k_{x_o} , si deve imporre, affinché siano soddisfatte le necessarie condizioni di continuità, che tutte le onde piane eccitate conservino lo stesso tipo di variazione lungo x . Per la generica onda piana la condizione di separabilità diviene allora:

$$k_y^2 + k_z^2 = k_o^2 - k_{x_o}^2 \quad (13.3)$$

Se il secondo membro della (13.3) è minore di zero, l'onda piana è evanescente, attenuata sul piano ortogonale a x e non può rappresentare in alcun modo potenza che si allontana dalla struttura guidante. Se d'altra parte $k_{x_o} < k_o$, esistono onde piane che trasportano energia lontano dalla guida. Il massimo trasporto di energia si ha da parte delle onde piane uniformi eccitate, le quali hanno una direzione di propagazione che forma con l'asse x un angolo dato dalla relazione:

$$\cos \theta_o = \frac{k_{x_o}}{k_o} \quad (13.4)$$

Le possibili direzioni delle onde piane uniformi giacciono su un cono di apertura θ_o rispetto all'asse x ed il campo radiato nel suo complesso è un'onda cilindrica non uniforme.

Si osservi che, sebbene il tipo di onda attraverso la quale l'energia si allontana dalla linea sia diverso nei due casi di fuga per onda superficiale e spaziale, il criterio per stabilire se tale fenomeno può accadere è sostanzialmente lo stesso.

13.3 Il ruolo delle soluzioni modali improprie della struttura

Nel paragrafo precedente, per spiegare il fenomeno del leakage in modo intuitivo, si è supposto che le correnti legate ad un modo della struttura agissero come sorgenti, eccitando onde superficiali guidate dal substrato o onde piane nello spazio. Poiché la struttura è indefinita, per la definizione stessa di modo, tutte le componenti del campo devono avere la stessa dipendenza dalla coordinata longitudinale. Richiedendo che fosse verificata la relazione di fase lungo la direzione longitudinale della guida, si sono, quindi, tratte utili conclusioni.

Quanto detto permette anche di concludere che le onde superficiali o piane eccitate fanno in realtà parte della rappresentazione del modo della linea considerato, in termini dello spettro discreto e continuo della struttura stratificata di supporto. Se, infatti, così non fosse e le onde eccitate costituissero un termine addizionale rispetto al campo associato al modo, tale termine indurrebbe sulla striscia, in modo da soddisfare le condizioni al contorno, una corrente aggiuntiva. Questo però non può accadere, perché porterebbe a concludere che il modo considerato non costituisce una autosoluzione della struttura guidante.

Se, quindi, una soluzione modale presenta effetti di perdita per radiazione, queste rappresentano una caratteristica intrinseca del modo, che viene detto *leaky*. D'altra parte, poiché i modi si riferiscono ad una struttura guidante indefinita, se in ogni tratto della linea perdono una frazione della loro potenza, che si allontana lungo una direzione formante un certo angolo con l'asse della guida, in ogni sezione l'energia deve essere infinita ed il campo cresce indefinitamente allontanandosi dalla striscia lungo la direzione trasversale.

Le soluzioni leaky, pertanto, non soddisfano alle condizioni di radiazione e fanno parte della categoria dei modi impropri, cioè non appartenenti allo spettro della guida. Tuttavia, se si suppone che un modo leaky sia eccitato a partire da una certa sezione, nelle sezioni successive l'energia radiata dal tratto precedente non può più essere infinita ed è concentrata in un settore angolare, definito dall'angolo di fuga.

Il fenomeno è descritto schematicamente in Fig. 13.2. Questa osservazione suggerisce la conclusione che i modi leaky, anche se sono soluzioni improprie, possono rappresentare in una regione limitata dello spazio i fenomeni di radiazione in maniera semplice e intuitiva.

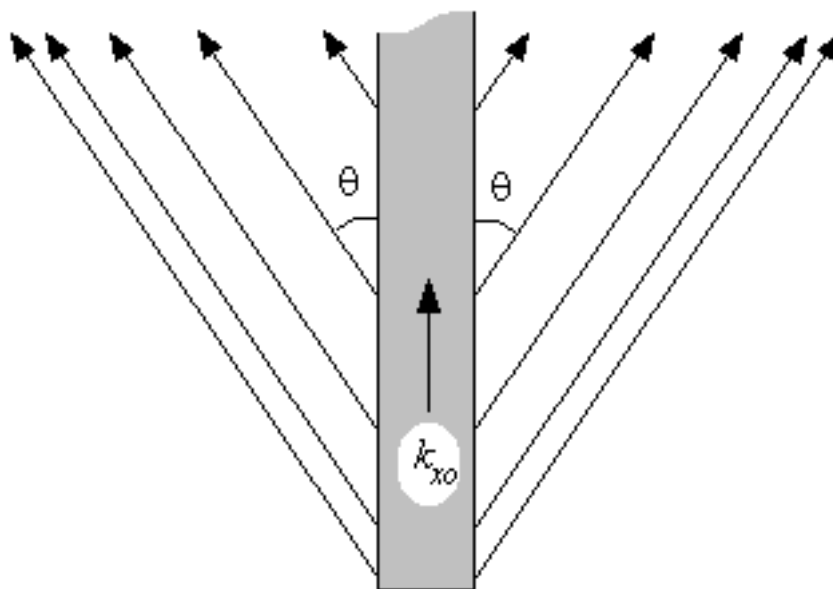


Figura 13.2: Rappresentazione del campo radiato da un modo leaky a partire dalla sezione iniziale di eccitazione.

Essi possono essere considerati in tal caso come rappresentazioni altamente convergenti dello spettro continuo della struttura. Una prova di questa affermazione si ottiene calcolando il campo radiato nel piano dello *Steepest Descent* [43] [44]. Con questo nome si indica un piano complesso definito da un opportuno cambio di coordinate negli integrali di radiazione. Sotto opportune condizioni è possibile deformare il cammino di integrazione relativo allo spettro continuo, in modo da minimizzare l'integrale, introducendo i residui dei poli relativi ai modi leaky.

13.3.1 Origine analitica dell'esistenza di soluzioni improprie

Nel § 3.4.5 si è illustrata la procedura che permette di determinare le autosoluzioni di una linea planare. L'equazione caratteristica si ottiene imponendo l'annullamento del determinante di una matrice, i cui coefficienti sono dati dalle (3.70).

La valutazione dei coefficienti richiede un'integrazione nel piano k_y , che corrisponde ad una trasformata di Fourier inversa. Il cammino lungo il quale l'integrazione deve essere svolta non è specificato e deve tener conto delle eventuali singolarità delle funzioni integrande.

Allo scopo di illustrare tale situazione, si consideri il caso semplice in cui sia sufficiente utilizzare una sola funzione di base per la densità di corrente longitudinale e la densità di corrente trasversale possa essere trascurata. L'equazione caratteristica assume la forma seguente, in cui l'incognita è k_{x_o} .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{x_1}(-k_y) \tilde{G}_{xx}(k_{x_o}, k_y, 0, 0) \tilde{J}_{x_1}(k_y) dk_y = 0 \quad (13.5)$$

L'espressione della componente della funzione diadica di Green che compare nella (13.5) è la seguente, come si deduce dalla (3.48):

$$\tilde{G}_{xx}(k_{x_o}, k_y, 0, 0) = -\frac{k_{x_o}^2 \hat{V}_i^{\text{TM}}(k_t, 0, 0) + k_y^2 \hat{V}_i^{\text{TE}}(k_t, 0, 0)}{k_t^2} \quad (13.6)$$

Nella (13.6) si è posto in evidenza che le funzioni $\hat{V}_i^{\text{TM}}$ e $\hat{V}_i^{\text{TE}}$ dipendono solo dal numero d'onda trasverso $k_t = \sqrt{k_{x_o}^2 + k_y^2}$. È facile verificare, rileggendo la procedura di calcolo delle tensioni descritta nel § 3.4.4, che $\hat{V}_i^{\text{TM}}$ e $\hat{V}_i^{\text{TE}}$ hanno a denominatore l'equazione di risonanza trasversa per i modi rispettivamente TM e TE del mezzo stratificato e, quindi, presentano singolarità polari in corrispondenza di valori di k_t coincidenti rispettivamente con le costanti di propagazione dei modi TM e TE del substrato, che verranno indicate nel seguito con k_{TM_n} e k_{TE_n} . Se inoltre la struttura è aperta, sono presenti anche due punti di diramazione in $k_t = \pm k_o$, cioè $k_{z_o} = 0$, legati alle diverse determinazioni della radice quadrata che esprime il numero d'onda verticale nello spazio libero $k_{z_o} = \sqrt{k_o^2 - k_t^2}$.

Se ne deduce che l'integrale a primo membro della (13.5) fornisce valori diversi, che dipendono dalla posizione delle singolarità rispetto al cammino d'integrazione prescelto. Si osservi che le posizioni dei poli e degli eventuali punti di diramazione sul piano complesso k_y , nel quale si deve svolgere l'integrazione, sono definite dalle relazioni:

$$\begin{aligned} k_{y\text{TM}_n} &= \pm \sqrt{k_{\text{TM}_n}^2 - k_{x_o}^2} \\ k_{y\text{TE}_n} &= \pm \sqrt{k_{\text{TE}_n}^2 - k_{x_o}^2} \\ k_{y\text{BP}} &= \pm \sqrt{k_o^2 - k_{x_o}^2} \end{aligned} \quad (13.7)$$

e quindi dipendono dal valore di k_{x_o} considerato. Ciò significa che se si desidera che al variare di k_{x_o} , per esempio durante il procedimento di ricerca delle soluzioni (cfr. anche § 15.2), il primo membro della (13.5) descriva una funzione continua, il cammino di integrazione deve essere deformato in modo che le singolarità non lo attraversino.

L'indeterminazione nella scelta del cammino d'integrazione deriva dal fatto che nella (13.5) non sono specificate le condizioni di radiazione all'infinito. Se si richiede che il campo elettromagnetico sia completamente confinato, il cammino di integrazione risulta univocamente determinato ed i modi che si ottengono sono propri, cioè spettrali.

Se, tuttavia, non si richiede che le condizioni di radiazione siano soddisfatte, altri cammini sono possibili e le relative soluzioni sono di tipo improprio. Alcune di esse sono soluzioni di tipo leaky, in grado, sotto opportune condizioni, di rappresentare il campo nella struttura.

Nel prossimo paragrafo si discuterà dei criteri per la scelta del cammino di integrazione per la determinazione sia dei modi confinati che dei modi leaky fisicamente significativi.

13.3.2 Scelta del cammino di integrazione

Si consideri dapprima il caso in cui interessi calcolare le soluzioni proprie. Il campo corrispondente a tali soluzioni deve decadere esponenzialmente quando ci si allontana dalla striscia lungo la direzione y ed è, quindi, Fourier-trasformabile nel senso usuale rispetto ad y . Si conclude che l'integrazione di antitrasformazione deve poter essere svolta lungo l'asse reale del piano k_y o lungo ogni altro cammino ad esso equivalente, in base al teorema di Cauchy. Per le soluzioni modali proprie in una struttura priva di perdite, k_{x_o} deve essere reale e maggiore di tutte le costanti di fase k_{TM_n} e k_{TE_n} dei modi in propagazione del substrato. Infatti un valore di k_{x_o} complesso corrisponderebbe ad una attenuazione lungo la linea, violando la conservazione dell'energia. Inoltre, se k_{x_o} fosse minore di una delle costanti di propagazione dei modi del substrato, ad esempio di k_{TM_o} , i corrispondenti poli, la cui posizione è specificata dalla relazione

$$k_{y_p} = \pm \sqrt{k_{TM_o}^2 - k_{x_o}^2} \quad (13.8)$$

si troverebbero sull'asse reale. Tali singolarità polari sul cammino di integrazione corrisponderebbero ad una soluzione modale non trasformabile e pertanto non confinata. Tutti i poli giacciono, quindi, insieme con i punti di diramazione, sull'asse immaginario, come indicato in Fig. 13.3, ed il cammino d'integrazione lungo l'asse reale è denominato C_o .

Oltre alle soluzioni proprie è interessante esaminare la possibilità di ottenere soluzioni complesse improprie di tipo leaky. La scelta del cammino di integrazione in questo caso può essere giustificata, usando l'argomento illustrato da Boukamp e Jansen in [45], che viene illustrato subito dopo. Senza perdita di generalità si considererà una struttura aperta, quale la microstriscia.

Nel caso di perdita per radiazione per onda superficiale, questa deve corrispondere all'eccitazione di modi del substrato che siano sopra il cutoff. Si supponga che solo il modo

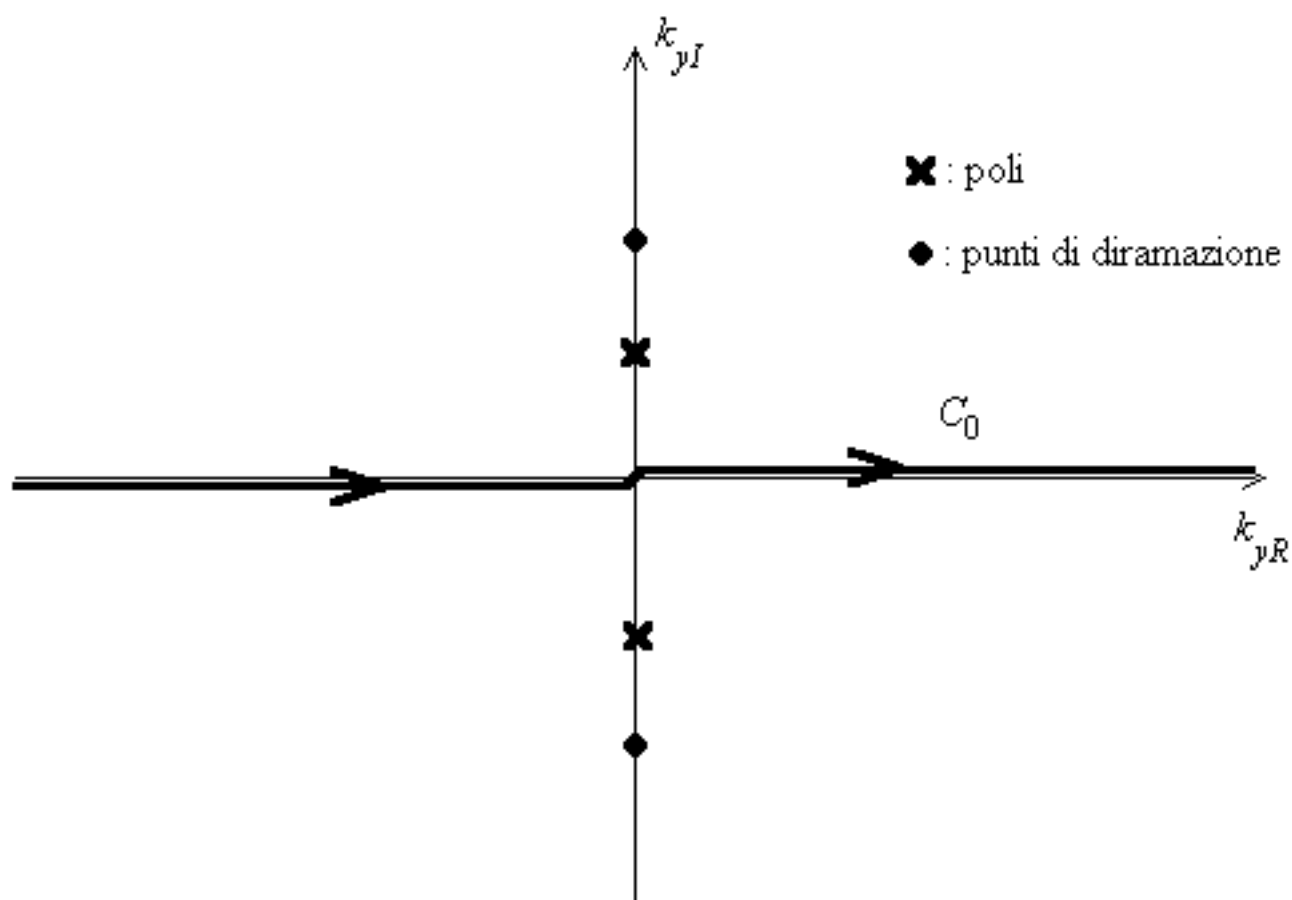


Figura 13.3: Cammino di integrazione C_o nel piano k_y che fornisce le soluzioni guidate.

TM_o possa propagarsi alla frequenza considerata e, quindi, costituisca l'unico veicolo che consente all'energia di allontanarsi dalla linea nel substrato.

Si assume dapprima che gli strati dielettrici e lo spazio libero siano caratterizzati da piccole perdite dissipative, cosicché sia il numero d'onda trasverso $k_{TM_o} = (k'_{TM_o} - j k''_{TM_o})$, che il numero d'onda dello spazio libero $k_o = (k'_o - j k''_o)$ siano complessi. Se si assume che anche la costante di propagazione del modo $k_{x_o} = \beta - j \alpha$ sia complessa, la posizione dei poli corrispondenti all'onda superficiale TM_o è fornita dalla relazione:

$$k_{yp} = \pm \sqrt{(k'_{TM_o})^2 - \beta^2 - k''_{TM_o})^2 + \alpha^2} + 2j(\beta \alpha - k'_{TM_o} k''_{TM_o}) \quad (13.9)$$

I punti di diramazione, invece, sono situati in:

$$k_{yBP} = \pm \sqrt{(k'_o)^2 - \beta^2 - k''_o)^2 + \alpha^2} + 2j(\beta \alpha - k'_o k''_o) \quad (13.10)$$

Si supponga che sia verificata la condizione $k'_o < \beta < k'_{TM_o}$, corrispondente all'eccitazione della sola onda superficiale. Se le perdite per dissipazione nei materiali dominano su quelle per radiazione, in modo che siano soddisfatte le disequaglianze $k'_{TM_o} k''_{TM_o} > \beta \alpha$ e $k'_o k''_o > \beta \alpha$, i poli e i punti di diramazione si trovano nel secondo e quarto quadrante del piano k_y , come viene mostrato in Fig. 13.4. In questo caso la soluzione modale è confinata e l'asse reale può essere utilizzato come cammino di integrazione, indicato con C_o in Fig. 13.4.

Si supponga ora idealmente di diminuire le perdite per dissipazione fino ad eliminarle ($k''_o, k''_{TM_o} \rightarrow 0$), mantenendo però le perdite per radiazione ($\alpha \neq 0$). Ciò corrisponde a far tendere la soluzione ad un modo leaky in una struttura priva di perdite. Quando le perdite nei materiali diminuiscono, i poli ed i punti di diramazione attraversano rispettivamente l'asse reale e l'asse immaginario ed entrano nel primo e terzo quadrante, come illustrato dalla Fig. 13.5.

Per ottenere una evoluzione continua della soluzione, il cammino di integrazione deve essere deformato corrispondentemente in modo che non venga attraversato dai poli. Si ottiene in tal modo il cammino indicato in Fig. 13.5 con C_1 , che è equivalente all'asse reale più il contributo dei residui dei poli, che sono responsabili dell'effetto di radiazione nell'onda superficiale e del comportamento improprio del campo nella direzione y .

Nel caso in cui si consideri anche la radiazione nello spazio, il cammino di integrazione deve essere ulteriormente modificato. Per giustificare la sua scelta può essere nuovamente utilizzato l'argomento di Boukamp e Jansen. A differenza del caso precedente, però, poiché il modo deve irradiare energia nello spazio, si assume che nella situazione iniziale, caratterizzata dalla prevalenza delle perdite per dissipazione, sia verificata la relazione $\beta < k'_o < k'_{TM_o}$.

I poli ed i punti di diramazione si trovano nel secondo e quarto quadrante e, quando le perdite nel materiale vengono diminuite fino a far prevalere le perdite per radiazione, essi attraversano tutti l'asse reale e migrano nel primo e terzo quadrante, come viene indicato in Fig. 13.6. Il cammino di integrazione C_o deve essere deformato in quello C_2 di Fig. 13.6, in modo che anche i punti di diramazione non lo attraversino.

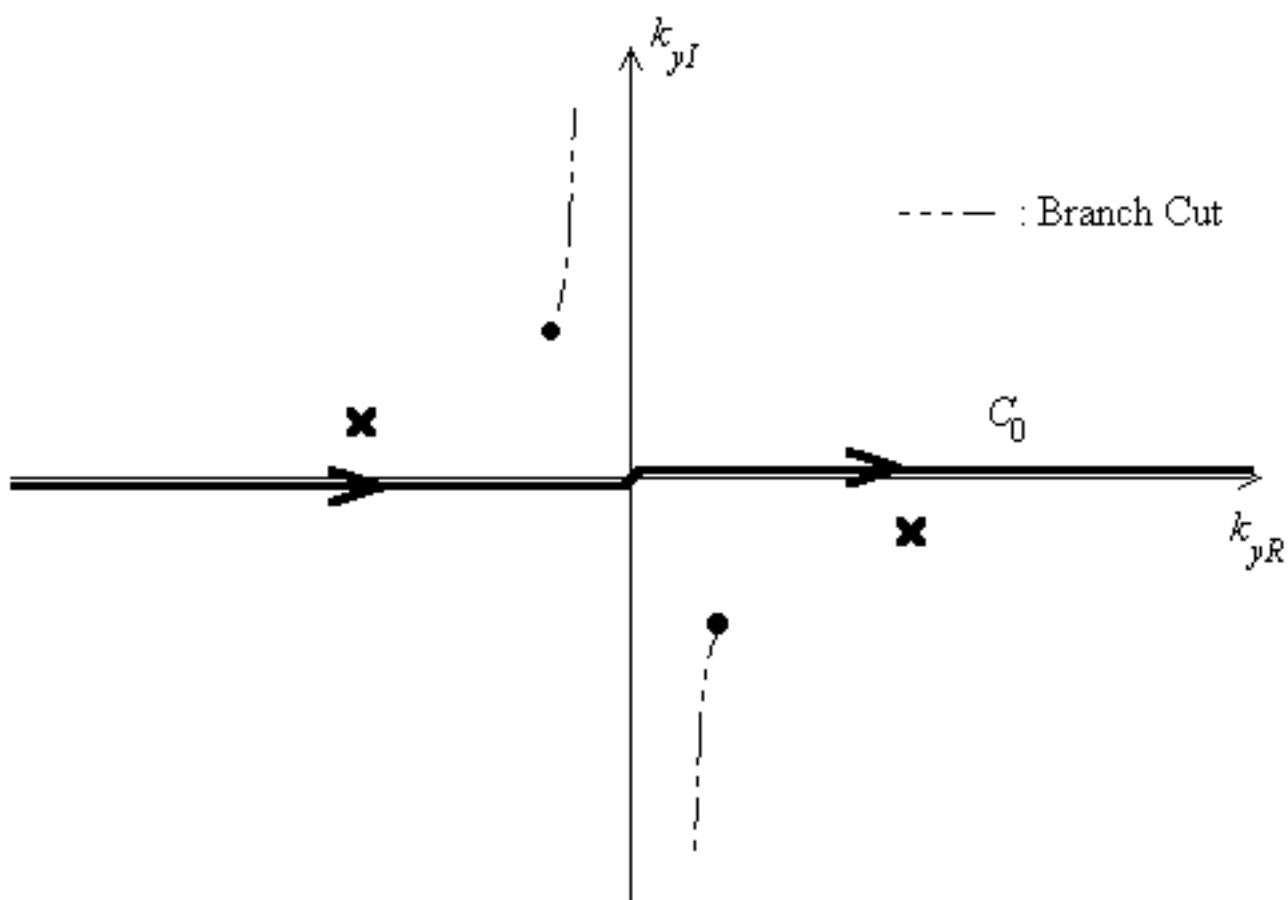


Figura 13.4: Cammino di integrazione C_o nel piano k_y nel caso in cui le perdite per dissipazione prevalgono su quelle per radiazione.

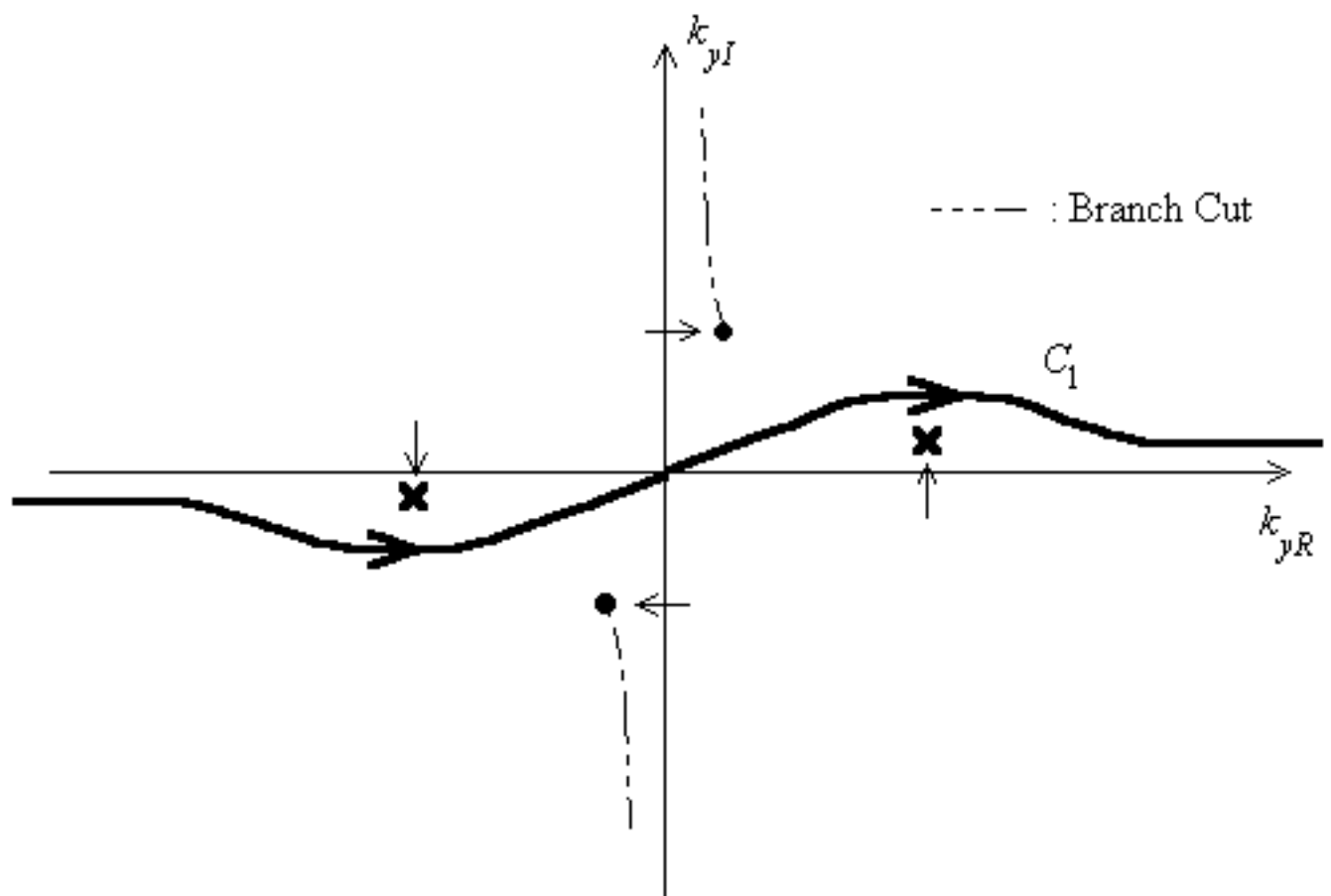


Figura 13.5: Cammino di integrazione C_1 nel piano k_y relativo alla soluzione leaky che eccita l'onda superficiale. Le frecce indicano i movimenti dei poli (croci) e punti di diramazione (punti), quando le perdite nei materiali diminuiscono.

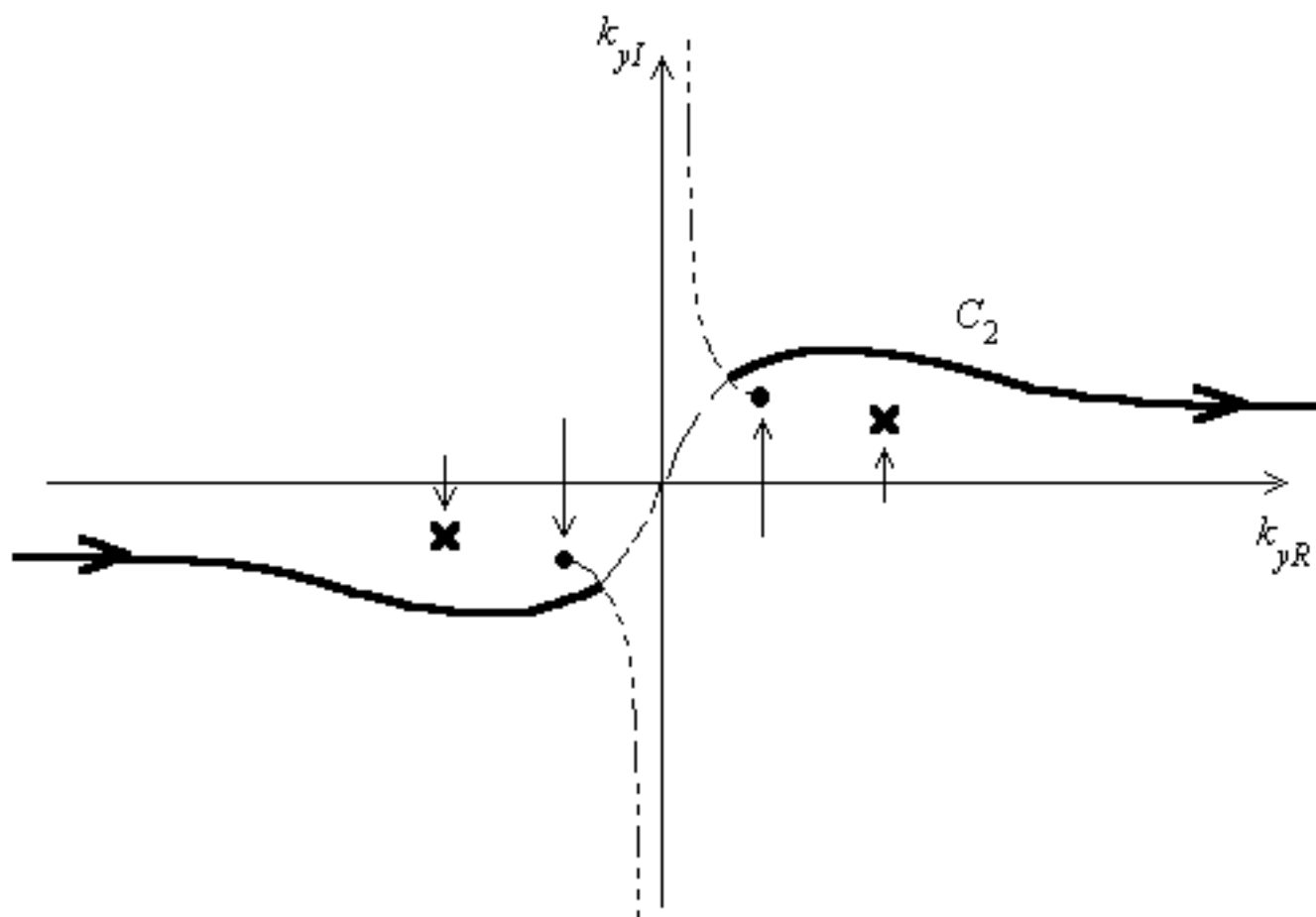


Figura 13.6: Cammino C_2 per un'onda leaky che perde energia attraverso l'onda superficiale e l'onda spaziale. Le frecce indicano i movimenti dei punti singolari quando le perdite per radiazione prevalgono su quelle dissipative. La parte di C_2 che è tratteggiata giace sul piano improprio.

Per rendersi conto che la soluzione che si ottiene integrando lungo C_2 include l'effetto di radiazione nello spazio, conviene scegliere i tagli relativi ai punti di diramazione, *branch cut* in inglese, secondo il criterio detto di Sommerfeld², come indicato in Fig. 13.6. Ciò significa far coincidere i tagli con le curve di equazione $\text{Im}[k_z] = 0$, coincidenti con una parte delle iperboli definite dalla relazione:

$$\text{Re}[k_y] \text{Im}[k_y] = \text{Re}[k_{y\text{BP}}] \text{Im}[k_{y\text{BP}}] \quad (13.11)$$

In questo modo il piano k_y viene suddiviso in una superficie di Riemann, detta superiore, interamente propria ($\text{Im}[k_z] < 0$) ed una, detta inferiore, impropria ($\text{Im}[k_z] > 0$) [46]. È facile allora verificare che la parte tratteggiata del cammino di integrazione giace sulla superficie impropria e contribuisce al fenomeno della fuga di energia nello spazio.

Nel caso del cammino C_1 si era osservato come questo fosse equivalente a quello proprio C_o più il contributo dei residui dei poli. Per il cammino C_2 oltre al contributo dei poli, occorre valutare il contributo del tratto giacente sul piano improprio. Si consideri un cammino chiuso C^* costituito da due curve sul piano proprio che, percorse in verso opposto, uniscono i punti di diramazione. Se si fa in modo che non sia incluso alcun polo, l'integrazione lungo C^* dà un risultato nullo. Se dunque in luogo del solo cammino C_2 si considera $C_2 + C^*$ il valore dell'integrale non cambia.

Da un esame delle Figg. 13.7a e 13.7b, nelle quali si è mantenuta la convenzione di indicare le curve giacenti sulla superficie impropria tratteggiate, si deduce che l'integrazione sul cammino $C_2 + C^*$ equivale a quella lungo l'asse reale C_o , più il contributo dei poli, più un integrale lungo un cammino chiuso, che sarà indicato con L , costituito da un tratto di curva da $-k_{y\text{BP}}$ a $+k_{y\text{BP}}$, giacente sul piano improprio, e da un altro tratto congiungente gli stessi punti in verso opposto, giacente sul piano proprio.

I cammini definiti in questo paragrafo verranno esaminati nel capitolo 15, nel quale la loro scelta verrà giustificata da un punto di vista matematico più rigoroso.

13.4 Considerazioni preliminari sul significato fisico di un modo leaky: la condizione per il leakage

Nel paragrafo 13.2 si è visto che, affinché si verifichino fenomeni di perdita per radiazione, la costante di fase del modo considerato deve essere minore della costante di fase dell'onda che trasporta l'energia lontano dalla linea. La validità di questa condizione è stata ipotizzata a priori nel precedente paragrafo, in modo da dedurre i cammini di integrazione che possono fornire soluzioni con un certo meccanismo di perdita radiativa.

Tuttavia un cammino del tipo C_1 può essere utilizzato per la valutazione dell'integrale a prescindere dal fatto che la condizione di eccitazione per l'onda superficiale sia verificata e lo stesso vale per C_2 . Ciò significa che le soluzioni complesse che si ottengono con cammini diversi da C_o rappresentano in generale soluzioni improprie, il cui possibile significato fisico deve essere valutato, controllando che sia verificata la opportuna condizione di eccitazione.

²la condizione di radiazione all'infinito richiede che sia $\text{Im}[k_z] < 0$ per $z > 0$.

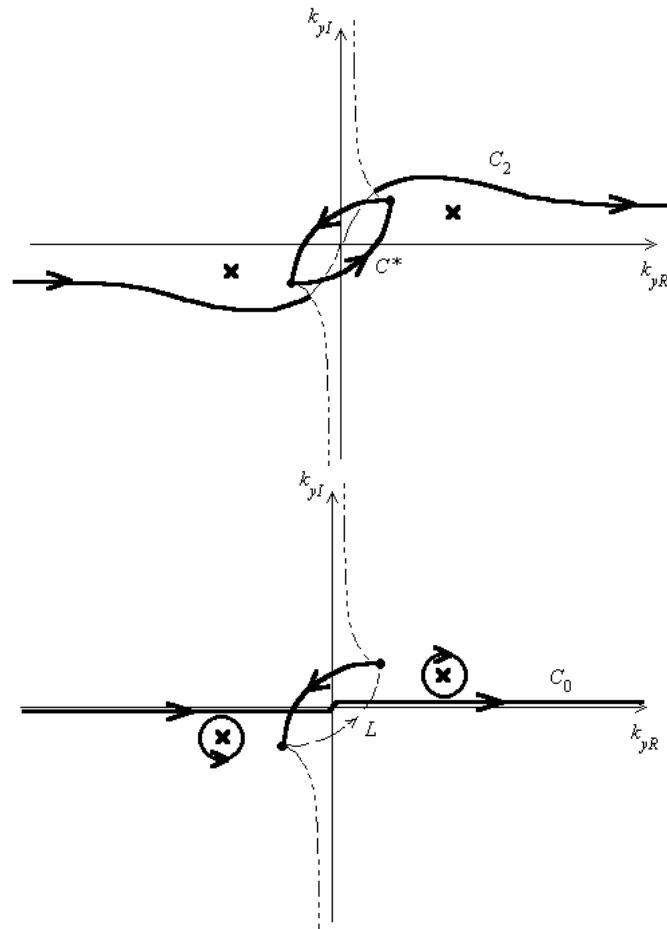


Figura 13.7: Cammini equivalenti a C_2 . a) Cammino $C_2 + C^*$, che equivale a C_2 in quanto l'integrale su C^* è nullo. b) Trasformazione di $C_2 + C^*$ nel cammino C_0 più due cammini circolari intorno ai poli ed il cammino L .

Se, ad esempio, si ottiene una soluzione con un cammino di tipo C_1 e la relativa costante di fase è maggiore di quella dell'onda superficiale, corrispondente al polo incluso, ci si aspetta che il modo non abbia alcuna rilevanza fisica e rappresenti una soluzione puramente matematica.

Con un ragionamento analogo si conclude che, se con il cammino C_2 si ottiene una soluzione tale che per essa sia verificata la relazione $k_o < \beta < k_{TM_o}$, essa non può avere significato fisico, poiché se pure soddisfa alla condizione di eccitazione per l'onda superficiale, la stessa condizione non è verificata per l'onda spaziale, che tuttavia è tenuta in considerazione dal cammino scelto.

Le precedenti considerazioni possono essere generalizzate al caso in cui più modi del substrato siano sopra cutoff. In tal caso si può pensare ad un cammino di tipo C_1 o C_2 che includa più di una coppia di poli e quindi combini gli effetti di radiazione per mezzo di più onde superficiali. È inoltre possibile utilizzare diverse combinazioni di poli inclusi, ciascuna delle quali permette di calcolare soluzioni improprie differenti.

Per stabilire se le soluzioni ottenibili sono candidate ad assumere un qualche significato fisico, appare naturale richiedere che la condizione di eccitazione sia soddisfatta soltanto per ciascuna delle componenti radianti incluse dal cammino attraverso il quale le soluzioni sono state calcolate.

Se, ad esempio, si suppone che alla frequenza considerata si possano propagare le onde TM_o , TM_1 e TE_1 e si sceglie un cammino che includa solo i poli relativi alle onde TM_o e TE_1 , affinché le soluzioni ottenute abbiano significato, la condizione di eccitazione deve essere soddisfatta per queste due onde, ma non può essere vera per la TM_1 . Se infatti così fosse, l'onda TM_1 potrebbe essere eccitata, ma ciò sarebbe in contraddizione con il fatto che il residuo corrispondente non è stato incluso nel calcolo della soluzione. Questa condizione di eccitazione generalizzata, introdotta in [47] viene indicata come condizione per il leakage di una soluzione impropria.

13.5 Considerazioni conclusive

In questo capitolo sono stati descritti gli aspetti principali connessi alla presenza di soluzioni complesse in strutture guidanti planari. Si è visto come queste possono essere calcolate e quali criteri possano essere adottati per stabilire se esse posseggono un qualche significato fisico.

Gli stessi criteri possono essere derivati da un'analisi del campo irradiato dalla struttura nel piano dello Steepest Descent [43], [44], [48]. Tuttavia, l'analisi svolta, che si basa su quanto è disponibile in letteratura, non consente di valutare se il modo complesso possa essere effettivamente eccitato in una struttura reale e rappresentare una componente importante ed identificabile del campo totale. Infatti, i modi complessi non sono soluzioni spettrali e non è lecito per essi affermare che una volta eccitati da una sorgente si comportino effettivamente come un modo. Essi, come si è detto, costituiscono una rappresentazione alternativa dello spettro continuo e quindi sono in generale accoppiati con esso. Ciò può essere compreso più chiaramente considerando il seguente esempio.

Si supponga che per una certa struttura esista una soluzione leaky, che soddisfi alla condizione per il leakage. Se si calcola il campo radiato nel piano dello Steepest Descent, si ricava che, deformando il cammino d'integrazione in modo che coincida con il cammino di massimo decadimento (Steepest Descent Path), il polo, a partire da un certo angolo di osservazione, viene catturato ed il suo residuo compare nell'espressione del campo. Si potrebbe concludere allora che, entro una certa regione angolare, il modo leaky viene eccitato con un'ampiezza proprio pari al valore del residuo e si comporta come i modi guidati.

Tuttavia se al variare della frequenza la condizione per il leakage cessa di essere verificata, il residuo non compare più nell'espressione del campo. In tali condizioni si dice che la soluzione impropria entra in una regione di transizione in cui non può avere alcun significato. In inglese la regione di transizione viene spesso indicata come Spectral Gap [49]. L'interpretazione data precedentemente per il ruolo del polo nella rappresentazione del campo, implica che il significato fisico del modo cessa bruscamente di esistere in corrispondenza della frequenza per la quale il modo si trova sulla soglia della regione di transizione.

Questo tipo di definizione di significato fisico non è evidentemente accettabile, poiché la sua evoluzione deve essere graduale. Ciò che ha condotto all'erronea valutazione è stato avere trascurato il fatto che l'integrale lungo il cammino di massima discesa non fornisce un campo ortogonale alla componente data dal residuo, poiché entrambe fanno parte dello spettro continuo. L'integrale deve, quindi, fornire un contributo che tende ad "oscurare" il residuo, quanto più il polo si avvicina al cammino ed è quindi prossimo alla regione di transizione.

Capitolo 14

Eccitazione dei modi leaky in una struttura guidante di lunghezza finita: metodo numerico

Premessa

Il § 14.2 del presente Capitolo costituisce un esempio di applicazione del metodo dei momenti ad una microstriscia di lunghezza finita, in presenza di eccitazione, secondo lo schema tipico dello scattering, con corrente eccitante e correnti indotte. Si tratta dunque di un problema deterministico.

Inoltre nel § 3.4 si è applicato lo stesso metodo per un problema di autovalori (problema omogeneo), allo scopo di determinare i modi della microstriscia di lunghezza infinita, così come nel § 3.3 è stato fatto per la slot line di lunghezza infinita.

Infine nel § 15.2 si affronta, sempre con il metodo dei momenti, il problema dell'eccitazione di una microstriscia di lunghezza infinita (ancora un problema deterministico). Di notevole importanza la distinzione fra la funzione di Green per l'intera struttura guidante (substrato più striscia conduttrice) e la funzione di Green del solo substrato, come pure importante l'osservazione che il denominatore della funzione di Green, nel dominio spettrale, della struttura guidante coincide con l'equazione caratteristica che si ottiene dal corrispondente problema di autovalori.

Questi tre paragrafi costituiscono quindi un microcorso sul metodo dei momenti applicato a problemi di propagazione guidata. A complemento di questi, il § 15.3 sul ruolo dei poli, che prelude all'illuminante espressione (15.16) del § 15.4, illuminante anche per il fatto che i residui appaiono chiaramente come coefficienti di eccitazione di ciascun modo.

14.1 Introduzione

Nel capitolo 13 si è avuto occasione di osservare che la condizione per il leakage introdotta in [47], sulla base di considerazioni di tipo fisico, non rappresenta un criterio sufficiente per de-

terminare se un modo improprio possa effettivamente prendere parte alla rappresentazione del campo.

Per poter trarre conclusioni più attendibili occorre studiare se il modo leaky viene effettivamente eccitato da sorgenti reali e può far parte del campo totale che soddisfa alle condizioni di radiazione. Il significato fisico della soluzione può allora essere definito dal grado di correlazione esistente tra il campo eccitato nella struttura ed il campo caratteristico del modo leaky.

Nelle strutture guidanti planari, poiché il campo è completamente determinato dalle densità di corrente presenti sui conduttori, è sufficiente confrontare la corrente totale con la corrente modale della soluzione leaky.

L'oggetto del presente capitolo è quello di descrivere una procedura di calcolo delle correnti eccitate su una striscia conduttrice di lunghezza finita in una generica struttura stratificata da parte di diversi tipi di sorgente. Poiché la procedura consiste in un'applicazione del metodo dei momenti, il metodo verrà indicato come numerico, per distinguerlo da quello che sarà illustrato nel capitolo 15, che verrà chiamato analitico. Vengono, quindi, proposte alcune tecniche per analizzare le correnti sulla striscia, in modo da stabilire se contengono una componente attribuibile al modo leaky.

14.2 Calcolo delle correnti sulla striscia con il metodo dei momenti

In questo paragrafo non si ipotizza un ben preciso modo. Ci saranno tutti i modi eccitati da una certa sorgente.

Le linee planari possono essere alimentate in differenti modi, in considerazione della configurazione del modo che si vuole eccitare o dell'entità dell'accoppiamento che si intende realizzare. Per questo motivo si è preferito analizzare l'eccitazione della linea per mezzo di sorgenti di tipo elementare, che potessero essere considerate come casi canonici.

Si assume un riferimento cartesiano come quello considerato in Fig. 3.9, con il piano verticale xz passante per l'asse centrale della striscia che costituisce la struttura guidante. Per questa configurazione sono stati considerati in particolare tre tipi diversi di eccitazione schematicamente rappresentati in Fig. 14.1.

Un primo caso è rappresentato da un dipolo elementare di corrente orientato verticalmente, posto, sul piano xz , nel substrato al di sotto della striscia conduttrice. Accanto al dipolo verticale è stato, quindi, considerato un dipolo orizzontale, nella direzione dell'asse x , che è assunta come direzione di propagazione.

Si è considerato infine un dipolo di corrente magnetica orientato trasversalmente, posto esattamente sulla striscia. Tale eccitazione, spesso indicata come *delta-gap*, corrisponde a considerare un campo elettrico longitudinale impresso in una certa sezione della striscia.

Poiché la striscia è di lunghezza finita in tutti i casi, per semplificare l'analisi, la sorgente è stata posta nella sezione mediana, che si è assunta coincidente con il piano $x = 0$.

Prima di illustrare la metodologia di analisi conviene specificare a che tipo di soluzioni

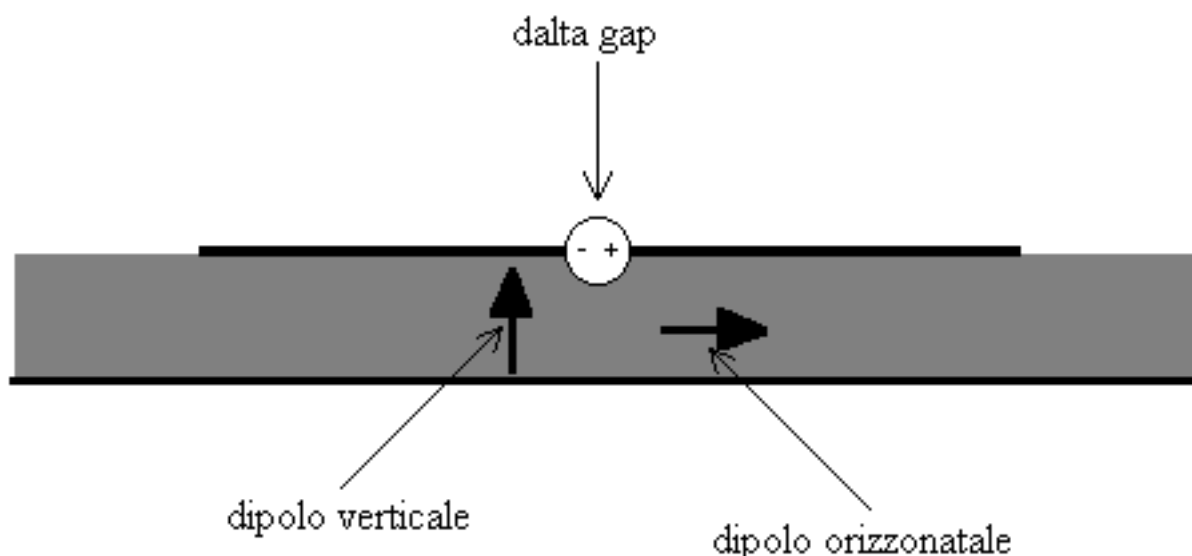


Figura 14.1: Tipi di eccitazione considerati.

improprie è rivolta l'indagine. Negli ultimi anni, in molte strutture di pratico interesse [52], [53], [54], sono state trovate soluzioni improprie dette dominanti. L'appellativo deriva dal fatto che la configurazione trasversa della corrente sulla striscia associata a tali soluzioni è molto simile a quella del modo dominante guidato della struttura. Essi devono quindi essere studiati con particolare attenzione, poiché una struttura di alimentazione progettata per eccitare il modo guidato è potenzialmente in grado di eccitare altrettanto bene il modo leaky dominante.

Se la larghezza della striscia è piccola rispetto alla lunghezza d'onda, la densità di corrente trasversale è trascurabile rispetto a quella longitudinale. In tal caso è sufficiente imporre l'annullamento sulla striscia conduttrice della sola componente longitudinale del campo elettrico E_x , dato che la componente trasversale si può considerare linearmente dipendente.

Si consideri dapprima il caso del dipolo verticale. La geometria considerata è rappresentata schematicamente in Fig. 14.2, nella quale si è indicata con $2w$ la larghezza della striscia e con $2l$ la sua lunghezza.

Le uniche correnti presenti nella struttura sono quella impressa del dipolo e quella indotta sulla striscia. Con riferimento alla Fig. 14.2, si può pertanto porre:

$$\begin{aligned} \underline{J}(x, y, z) &= J_s(x, y) \delta(z) \underline{x}_o + J_{dip}(x, y) \delta(z - z') \underline{z}_o = \\ &= J_s(x, y) \delta(z) \underline{x}_o + \delta(x) \delta(y) \delta(z - z') \underline{z}_o \quad z' < 0 \end{aligned} \quad (14.1)$$

Se si impone che il campo longitudinale E_x sia nullo sulla striscia conduttrice e si utilizza la rappresentazione spettrale del campo vista nel capitolo 3, si ottiene la seguente equazione

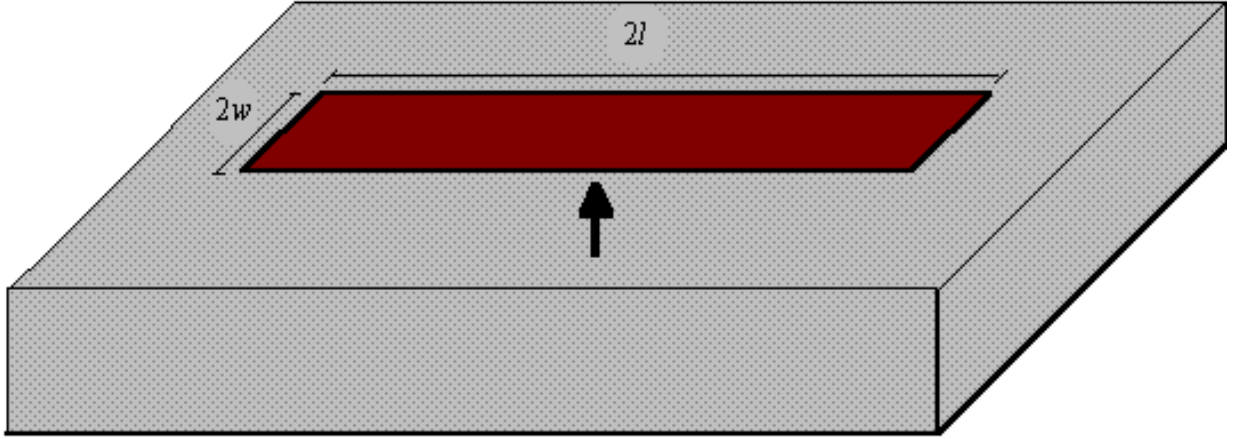


Figura 14.2: Linea rappresentata da una striscia conduttrice di lunghezza $2l$ e larghezza $2w$ eccitata da un dipolo verticale posto sotto di essa.

integrale (cfr. la prima delle equazioni (3.11)) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{J}_s(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \\ = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{xz}(k_x, k_y, 0, z') e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \end{aligned} \quad \begin{cases} |x| \leq l \\ |y| \leq w \end{cases} \quad (14.2)$$

Se la larghezza della striscia $2w$ è solo una frazione della lunghezza d'onda, è lecito supporre che la dipendenza trasversale (cioè da y) della corrente longitudinale sulla striscia può essere molto ben approssimata dalla prima delle funzioni base definite dalla (3.71). Ciò corrisponde a considerare valida la seguente posizione:

$$J_s(x, y) = L(x) T(y) \quad (14.3)$$

con $L(x)$ incognita e $T(y)$ data dall'espressione:

$$T(y) = \left(\frac{1}{\pi w} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - (y/w)^2}} \quad |y| \leq w \quad (14.4)$$

In altri termini si introduce l'ipotesi che alla frequenza considerata sulla striscia vengono eccitate principalmente correnti aventi la configurazione trasversa del modo dominante. Questa assunzione rispecchia molto bene ciò che accade in pratica, se la frequenza di lavoro è molto al di sotto delle frequenze di taglio dei modi di ordine superiore.

Per applicare il metodo dei momenti alla (14.2) e determinare $L(x)$, la striscia viene suddivisa nella direzione longitudinale, data la posizione centrale dell'eccitazione, in $2N$ intervalli di lunghezza d , in modo che sia $2Nd = 2l$. Si scelgono funzioni di base di tipo

triangolare così definite (funzioni di base a sottodominio):

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{d} & |x| \leq d \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (14.5)$$

La corrispondente trasformata di Fourier è fornita dalla seguente relazione:

$$\tilde{\Lambda}(k_x) = d \left[\frac{\sin(k_x d/2)}{k_x d/2} \right]^2 \quad (14.6)$$

Si assume, quindi, che la dipendenza longitudinale della corrente possa essere espressa attraverso il seguente sviluppo (si tratta ovviamente di un'approssimazione),

$$L(x) \cong \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} a_n \Lambda(x - n d) \quad (14.7)$$

cui corrisponde nel dominio spettrale la seguente espressione:

$$\tilde{L}(k_x) \cong \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} a_n \tilde{\Lambda}(k_x) e^{+j n k_x d} \quad (14.8)$$

Sostituendo l'espressione considerata per la corrente nella (14.2) e applicando la procedura di risoluzione con il metodo dei momenti, avendo scelto come funzioni peso le stesse funzioni utilizzate per esprimere la corrente, si ottiene il seguente sistema nelle incognite a_n :

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} a_n Z_{mn} = R_m^v \quad m = -(N-1), \dots, 0, \dots, N-1 \quad (14.9)$$

dove si sono introdotte le definizioni:

$$Z_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{\Lambda}^2(k_x) \tilde{T}^2(k_y) \cos[k_x (m - n) d] dk_x dk_y \quad (14.10)$$

$$R_m^v = j \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \tilde{G}_{xz}(k_x, k_y, 0, z') \tilde{\Lambda}(k_x) \tilde{T}(k_y) \sin(k_x m d) dk_x dk_y \quad (14.11)$$

Nel ricavare la (14.10) e la (14.11) si è tenuto conto del fatto che $\tilde{T}(k_y)$ e $\tilde{\Lambda}(k_x)$ sono funzioni pari dei rispettivi argomenti, $\tilde{G}_{xx}$ è pari sia rispetto a k_x che a k_y , mentre $\tilde{G}_{xz}$ è pari rispetto a k_x e dispari rispetto a k_y .

Il sistema (14.9) permette di determinare le correnti sulla striscia, che rappresentano il dato di ingresso per lo studio dell'eccitazione del modo leaky dominante della struttura.

La procedura descritta può essere facilmente adattata per esaminare l'eccitazione da parte di un dipolo orizzontale. In tal caso, infatti, è sufficiente modificare la colonna dei termini noti del sistema (14.9), utilizzando la seguente relazione.

$$R_m^h = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, z') \tilde{\Lambda}(k_x) \tilde{T}(k_y) \cos(k_x m d) dk_x dk_y \quad (14.12)$$

L'eccitazione di tipo *delta-gap*, infine, risulta la più semplice da analizzare. Si è infatti detto che essa può essere pensata come un campo longitudinale impulsivo, impresso al centro della striscia. Se ne deduce che la reazione tra tale campo e le funzioni peso è nulla in tutti i casi fuorché per la funzione peso centrata nell'origine.

Si può pertanto concludere che per il caso di eccitazione di tipo *delta-gap*, la colonna dei termini noti del sistema (14.9) è costruita a partire dalle relazioni:

$$R_m^{dg} = \begin{cases} 1 & \text{per } m = 0 \\ 0 & \text{per } m \neq 0 \end{cases} \quad (14.13)$$

Si osservi che la funzione $L(x)$, che descrive la dipendenza longitudinale della densità di corrente nella (14.3), è numericamente pari alla intensità di corrente che scorre sulla striscia, poiché si è scelta la $T(y)$ normalizzata. L'intensità di corrente si ottiene, infatti, integrando sulla larghezza della striscia la densità J_s ,

$$I(x) = \int_{-w}^{+w} J_s(x, y) dy = L(x) \int_{-w}^{+w} T(y) dy = L(x) \quad (14.14)$$

14.3 Analisi delle correnti sulla striscia

I metodi qui descritti sono applicabili comunque si riesca ad ottenere la corrente $I(x)$, quindi anche con il metodo del capitolo 15.

Quando una struttura guidante viene alimentata da una certa sorgente, in generale tutto lo spettro della struttura viene eccitato. Se la guida non presenta fenomeni di perdita per radiazione, i modi, che alla frequenza considerata sono sopra cutoff, entrano in propagazione e trasportano energia lungo la linea, mentre nell'intorno della sorgente è presente anche una componente di campo di tipo reattivo, che si attenua velocemente non appena ci si allontana dalla sezione iniziale.

Se la struttura presenta perdite radiative, una parte dello spettro continuo eccitato trasporta potenza lontano dalla guida. In molti casi questa fuga di potenza, come si è detto, può essere rappresentata dall'eccitazione di un modo leaky.

Nel caso delle linee planari tutte le informazioni sul campo nella struttura possono essere desunte dalla corrente eccitata. Se è presente una soluzione leaky dominante, ci si aspetta che la corrente totale, calcolata nel modo illustrato nel paragrafo precedente, rappresenti la sovrapposizione della componente legata al modo confinato dominante, della componente che produce il campo di tipo reattivo ed eventualmente di quella del modo leaky. Poiché le componenti relative alla propagazione di un modo, sia esso confinato o leaky, devono presentare una variazione longitudinale determinata dal numero d'onda del modo cui si riferiscono, esse possono essere individuate ed estratte.

Questa considerazione suggerisce di condurre lo studio dell'eccitazione del modo leaky verificando che la corrispondente componente sia presente nella corrente totale. Questo approccio presenta il vantaggio di fornire anche informazioni quantitative sul peso del modo improprio nella rappresentazione del campo.

L'analisi delle correnti, per individuarvi le componenti modali, è stata affrontata con due tecniche differenti, che verranno illustrate in dettaglio nel seguito. La prima, più semplice, assume per ipotesi che le correnti contengano termini di tipo esponenziale, in cui l'esponente è fornito dalle costanti di propagazione dei modi che si suppongono presenti. Questi modi sono assegnati preliminarmente e vengono fornite le loro costanti di propagazione. Le ampiezze incognite delle componenti modali vengono, quindi, determinate minimizzando l'errore quadratico medio, da qui il nome di metodo dei minimi quadrati.

La seconda tecnica, invece, estrae direttamente dalle correnti le costanti di propagazione e quindi determina le ampiezze delle varie componenti, anche in questo caso, minimizzando l'errore quadratico.

14.3.1 Metodo dei minimi quadrati

La struttura in esame, rappresentata in Fig. 14.2, è stata supposta di lunghezza limitata. Il troncamento agli estremi, che corrisponde approssimativamente ad un circuito aperto, determina una riflessione della corrente, accompagnata dall'eccitazione di una componente reattiva in prossimità della discontinuità. Se tuttavia la linea è sufficientemente lunga, si può a ragione supporre che, in un tratto centrale ad una certa distanza dalla sorgente e dalla sezione finale, la corrente sia essenzialmente dovuta ai soli contributi modali.

Se si suppone che i modi eccitati nella struttura siano p , in questo tratto centrale la corrente dovrebbe poter essere espressa dalla combinazione di $2p$ termini esponenziali, corrispondenti alle onde dirette e riflesse relative a ciascun modo. Si può pertanto porre:

$$I(x) \cong \sum_{n=1}^p c_n e^{-j k_{x_n} x} + \sum_{n=1}^p c_{p+n} e^{+j k_{x_n} x} \quad (14.15)$$

dove k_{x_n} indica la costante di propagazione del modo n -simo. Si suppone quindi che i modi eccitati siano p ben precisi modi, di cui si conoscono le costanti di propagazione.

Dette x_1 e x_2 le ascisse che definiscono il tratto di linea considerato, si definisce l'errore relativo nel seguente modo (si ricordi che la funzione $I(x)$ si suppone nota):

$$E = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \left| I(x) - \sum_{n=1}^p \left(c_n e^{-j k_{x_n} x} + c_{p+n} e^{+j k_{x_n} x} \right) \right|^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} |I(x)|^2 dx} \quad (14.16)$$

Le ampiezze incognite dello sviluppo, c_n , vengono determinate richiedendo che l'errore sia minimo. Se si deriva l'espressione dell'errore rispetto alle incognite e si impone che tutte le derivate parziali ottenute siano contemporaneamente nulle, si ottiene il sistema:

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \int_{x_1}^{x_2} \left| I(x) - \sum_{n=1}^p \left(c_n e^{-j k_{x_n} x} + c_{p+n} e^{+j k_{x_n} x} \right) \right|^2 dx = 0 \quad m = 1, \dots, 2p \quad (14.17)$$

Si dimostra facilmente che il sistema descritto dalla (14.17) è lineare ed i coefficienti possono essere valutati a partire dalla conoscenza della funzione $I(x)$. Se la corrente viene calcolata con la tecnica descritta nel precedente paragrafo essa è data dall'espressione:

$$I(x) \cong \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} a_i \Lambda(x - i d) \quad (14.18)$$

La (14.18) sarebbe la (14.7), tenendo conto della (14.14). È possibile confrontare la (14.18), con i coefficienti dati dalla (14.9), e la (14.15), i cui coefficienti sono dati dalla (14.17).

14.3.2 Metodo GPOF

Da un esame dei risultati sull'eccitazione di modi leaky, ottenuti con la tecnica descritta nel precedente paragrafo, emerge che la necessità di assumere a priori quanti e quali modi siano presenti costituisce una limitazione del metodo, poiché rappresenta una sorta di forzatura del risultato. In altri termini il fatto che una corrente sia ben approssimata da un certo numero di funzioni esponenziali non assicura che i modi ad esse associati siano effettivamente presenti nella corrente. Per superare questa difficoltà è stata utilizzata una tecnica che permette di ricavare direttamente dall'analisi della $I(x)$ le funzioni esponenziali che meglio la approssimano.

Questa tecnica è una generalizzazione del cosiddetto metodo di Prony ed è spesso indicata come metodo **G**eneralized **P**encil **O**f **F**unction (**GPOF**) [55]. Essa consente data una sequenza di dati, con un certo intervallo di campionamento, di ricavare la rappresentazione ottima di tale sequenza in termini di funzioni esponenziali.

Si assume che la funzione sia approssimabile da una combinazione lineare di esponenziali complessi, nella quale sia le ampiezze che gli esponenti vengono considerati incogniti. Il numero di funzioni esponenziali da considerare può essere sia stabilito a priori che ricavato dall'algoritmo in modo che l'errore sia minore di una certa quantità prefissata.

Il metodo GPOF prevede due passi. Durante il primo, dalla sequenza di dati si estraggono le costanti di propagazione; successivamente si determinano le ampiezze risolvendo un sistema ottenuto richiedendo che sia minimo l'errore quadratico medio. La seconda parte del procedimento, quindi, ripete i passi già descritti per il metodo dei minimi quadrati, mentre per la prima si rimanda al riferimento bibliografico riportato [55]. È possibile confrontare la corrente ottenuta con questo metodo ed i valori dati dalla (14.18), i cui coefficienti sono dati dalla (14.9).

14.4 Limitazioni del metodo numerico

La metodologia di analisi descritta consente di studiare l'eccitazione dei modi leaky dominanti in una struttura qualsiasi e rappresenta un approccio in grado di fornire buoni risultati, insieme ai risultati ottenuti con il metodo analitico, oggetto del capitolo 15. Il metodo

numerico, infatti, da solo risulta insufficiente per una piena comprensione del fenomeno del leakage e rende difficile una definizione di coefficiente di eccitazione del modo leaky. Infatti, poiché la struttura è troncata, l'ampiezza della corrente dipende dalla lunghezza della linea, oltre che dal tipo di sorgente. L'analisi delle correnti con i metodi descritti, per dare buoni risultati, richiede che queste siano calcolate con ottima accuratezza. Questo significa che è necessario usare molte funzioni di base per lunghezza d'onda e pone un limite superiore alla lunghezza della linea, poiché la dimensione del sistema da risolvere diventa proibitiva ed il calcolo dei coefficienti difficile. La limitazione di lunghezza, legata a problemi di tipo numerico, risulta particolarmente seria poiché, come si è avuto modo di osservare, il tratto utile sul quale è possibile l'analisi delle correnti è inferiore alla lunghezza della linea, in quanto è necessario tenersi ad una certa distanza dalle discontinuità.

La presenza della discontinuità agli estremi della linea aumenta, inoltre, gli effetti di accoppiamento tra il modo leaky e lo spettro continuo, determinando a volte risultati di difficile interpretazione.

Infine il metodo, essendo puramente numerico, non fornisce alcuno strumento per comprendere più a fondo il legame esistente tra la condizione per il leakage e l'eccitazione del modo.

Questi problemi sono superati completamente dal metodo analitico, illustrato nel capitolo 15.

Capitolo 15

Metodo analitico per lo studio dell'eccitazione dei modi leaky

15.1 Introduzione

Alla fine del capitolo 14 sono state discusse alcune limitazioni insite in un'indagine dell'eccitazione delle soluzioni improprie di tipo esclusivamente numerico. In particolare una delle principali difficoltà deriva dalla necessità di considerare una linea di lunghezza finita.

Il presente capitolo ha come oggetto la descrizione di un metodo, qui indicato come analitico, che consente l'analisi di strutture illimitate. Calcolare le correnti indotte in una striscia di lunghezza infinita, dovute ad un impulso di corrente, equivale a ricavare la funzione di Green per la struttura guidante. Poiché, come è noto, la funzione di Green contiene tutte le informazioni riguardanti i modi della struttura, è possibile dedurre dallo studio delle sue proprietà analitiche importanti informazioni, che permettono di tracciare un quadro completo sulla natura delle soluzioni ottenute utilizzando i diversi cammini di integrazione introdotti nel capitolo 3. In particolare è possibile stabilire chiaramente il ruolo svolto dai poli corrispondenti ai modi del substrato e dagli eventuali punti di diramazione della funzione di Green del mezzo stratificato di supporto.

Infine, indagando sulle soluzioni modali che possono contribuire al campo eccitato, è possibile fornire una prova matematica della necessità che la condizione per il leakage sia soddisfatta, affinché un modo improprio possa avere un qualche significato fisico.

15.2 Costruzione della funzione di Green per la linea di trasmissione

Si consideri una struttura guidante planare costituita da una striscia conduttrice in un mezzo dielettrico stratificato, genericamente raffigurata in Fig. 15.1. Il metodo verrà descritto nel dettaglio per il caso di un dipolo verticale lungo z_o , posto sotto la striscia ad una certa quota z' .

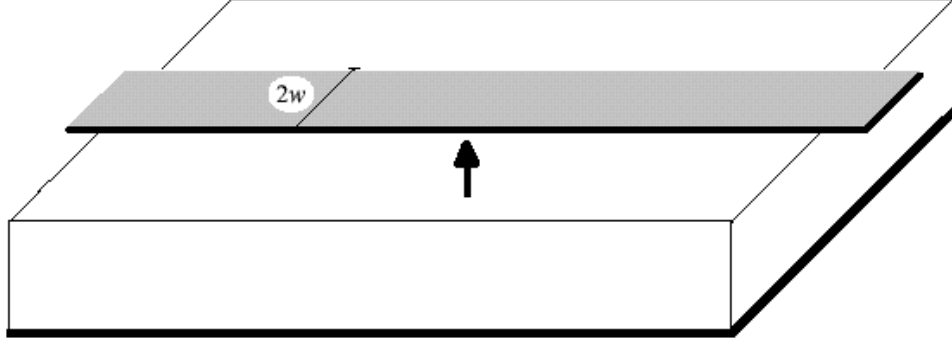


Figura 15.1: Linea rappresentata da una striscia conduttrice di lunghezza infinita e larghezza $2w$, eccitata da un dipolo verticale.

Si intende eseguire il calcolo delle correnti sulla striscia infinita con il metodo dei momenti, in corrispondenza ad assegnate eccitazioni, senza ipotizzare un ben preciso modo.

Il campo elettrico $\underline{E}_t$ sul piano xy parallelo a quello della striscia, utilizzando i risultati ricavati nel capitolo 3, può essere così espresso:

$$\begin{aligned} \underline{E}_t(x, y, z) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}_{tt}(k_x, k_y, z, 0) \cdot \underline{\tilde{J}}_s(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}_{tz}(k_x, k_y, z, z') \cdot \underline{z}_o e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (15.1)$$

dove si sono introdotte le diadi $\underline{\tilde{G}}_{tt}$ e $\underline{\tilde{G}}_{tz}$ che esprimono il legame tra il campo elettrico sul piano xy e rispettivamente le correnti sullo stesso piano e dirette parallelamente all'asse z .

Imponendo che il campo $\underline{E}_t$ si annulli sulla striscia si ottiene la seguente equazione integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}_{tt}(k_x, k_y, 0, 0) \cdot \underline{\tilde{J}}_s(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \\ = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}_{tz}(k_x, k_y, 0, z') \cdot \underline{z}_o e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \end{aligned} \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ |y| \leq w \end{cases} \quad (15.2)$$

Poiché la precedente deve essere verificata per qualsiasi x , si può pensare di moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza per $e^{+jk'_x x}$ e integrarli rispetto a x da $-\infty$ a $+\infty$, ottenendo l'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}_{tt}(k'_x, k_y, 0, 0) \cdot \underline{\tilde{J}}_s(k'_x, k_y) e^{-jk_y y} dk_y = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{G}}_{tz}(k'_x, k_y, 0, z') \cdot \underline{z}_o e^{-jk_y y} dk_y \end{aligned} \quad \begin{cases} \forall k'_x \\ |y| \leq w \end{cases} \quad (15.3)$$

Quindi si è trasformato rispetto a x e chiamata k'_x la variabile spettrale. La (15.3) esprime l'annullamento sulla striscia di $\underline{E}_t(k'_x, y, z)$. Successivamente si potrà dalla variabile k'_x passare nuovamente alla variabile k_x .

La precedente esprime il fatto che la condizione al contorno sulla striscia conduttrice infinita deve essere soddisfatta non solo dal campo nel dominio spaziale, ma anche da ogni sua componente spettrale, relativa alla trasformata di Fourier lungo la direzione x di propagazione. La (15.3) può essere risolta con il metodo dei momenti ponendo, in analogia a quanto visto nel § 3.4.5:

$$\begin{aligned}\tilde{J}_x(k_x, k_y) &\cong \sum_{m=1}^M \tilde{A}_m(k_x) \tilde{T}_{xm}(k_y) \\ \tilde{J}_y(k_x, k_y) &\cong \sum_{n=1}^N \tilde{B}_n(k_x) \tilde{T}_{yn}(k_y)\end{aligned}\tag{15.4}$$

Ora ovviamente c'è anche la dipendenza da k_x , perché non si prescrive più la presenza di un solo modo, con un'assegnata dipendenza da x .

Le funzioni $\tilde{T}_{xm}$ e $\tilde{T}_{yn}$ che compaiono rappresentano un opportuno insieme di funzioni base per esprimere la dipendenza trasversa delle correnti, come quelle definite nel capitolo 3. Le funzioni di k_x , $\tilde{A}_m$ e $\tilde{B}_n$ sono, invece, funzioni incognite da determinare. Se si applica il procedimento di risoluzione descritto nel § 3.4.5, utilizzando le stesse funzioni $\tilde{T}$ come funzioni peso, è facile dimostrare che si ottiene il seguente sistema lineare (si confronti con la (3.69))

$$\begin{pmatrix} [Z_{xx}] & [Z_{xy}] \\ [Z_{yx}] & [Z_{yy}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{R}_{xz} \\ \underline{R}_{yz} \end{pmatrix}\tag{15.5}$$

nel quale $[Z_{xx}]$, $[Z_{xy}]$, $[Z_{yx}]$ e $[Z_{yy}]$ sono matrici di dimensioni rispettivamente $(M \times M)$, $(M \times N)$, $(N \times M)$ e $(N \times N)$, i cui coefficienti sono definiti dalle seguenti relazioni (si confronti con le (3.70)):

$$Z_{ij}^{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{xi}(-k_y) \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}_{xj}(k_y) dk_y\tag{15.6}$$

$$Z_{ij}^{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{xi}(-k_y) \tilde{G}_{xy}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}_{yj}(k_y) dk_y\tag{15.7}$$

$$Z_{ij}^{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{yi}(-k_y) \tilde{G}_{yx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}_{xj}(k_y) dk_y\tag{15.8}$$

$$Z_{ij}^{yy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{yi}(-k_y) \tilde{G}_{yy}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}_{yj}(k_y) dk_y\tag{15.9}$$

$\underline{A}$ e $\underline{B}$ nella (15.5) sono i due vettori colonna aventi come componenti rispettivamente le funzioni $\tilde{A}_m$ e $\tilde{B}_n$, mentre $\underline{R}_{xz}$ e $\underline{R}_{yz}$ sono vettori rispettivamente a M e N componenti,

definite dalle seguenti espressioni:

$$R_i^{xz} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{xi}(-k_y) \tilde{G}_{xz}(k_x, k_y, 0, z') dk_y \quad (15.10)$$

$$R_i^{yz} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{yi}(-k_y) \tilde{G}_{yz}(k_x, k_y, 0, z') dk_y \quad (15.11)$$

Dalla soluzione del sistema (15.5) è facile calcolare la corrente prodotta sulla striscia. Si supponga di avere scelto per comodità le funzioni T normalizzate, in modo che integrate sulla larghezza della striscia forniscano tutte un valore unitario. La trasformata di Fourier rispetto a x della corrente che scorre lungo la direzione di propagazione ha la seguente espressione (come si è visto nella (14.14))

$$\tilde{I}(k_x) = \sum_{m=1}^M \tilde{A}_m(k_x) \quad (15.12)$$

e quindi:

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_m(k_x) e^{-j k_x x} dk_x \quad (15.13)$$

La (15.13) rappresenta la funzione di Green per la corrente sulla striscia, eccitata da un dipolo verticale ed il campo da essa prodotto rappresenta la funzione di Green per il campo. È facile convincersi che una volta noti i vettori $\underline{A}$ e $\underline{B}$, soluzioni del sistema (15.5), è possibile calcolare la funzione di Green per tutto il campo. Si vuole insistere sul fatto che in tal modo si costruisce numericamente la funzione di Green per la struttura guidante, cioè il substrato più la striscia conduttrice, da non confondere con la funzione di Green le cui componenti sono utilizzate per il calcolo dei coefficienti del sistema, che si riferisce al solo substrato. Per esaminare le proprietà della funzione di Green della guida e poter trarre le conclusioni che interessano, conviene riferirsi al caso semplice in cui le densità di corrente eccitate siano praticamente solo longitudinali e per descriverne la dipendenza trasversale sulla striscia basti una sola funzione di base. In altri termini si considera la stessa condizione operativa specificata nel § 14.2 (striscia stretta rispetto a λ), allorché si è ristretta l'indagine ai modi leaky dominanti. Come in quel caso si considera un'unica funzione T (confronta § 13.3.1) definita dalla (14.4). L'espressione della trasformata di Fourier della corrente assume in questo caso una forma semplice, dato che il sistema (15.5) diventa una equazione lineare.

$$\tilde{I}(k_x) = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{xz}(k_x, k_y, 0, z') \tilde{T}(k_y) dk_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}^2(k_y) dk_y} \quad (15.14)$$

Si osservi che il denominatore della (15.14) non dipende dall'eccitazione, ma coincide con l'equazione caratteristica (13.5), che si ottiene dall'analisi della struttura omogenea.

Ciò significa che le autosoluzioni della struttura corrispondono ai poli della trasformata della corrente. Quest'ultima, come notato in precedenza, non è altro che la funzione di Green nel dominio spettrale. Questo risultato non deve sorprendere, in quanto è in accordo con le proprietà generali delle funzioni di Green nel dominio spettrale [56]. Il residuo in ciascun polo dipende invece anche dal numeratore della (15.14) e quindi dal tipo di sorgente considerato.

Per calcolare la corrente $I(x)$ occorre svolgere un'integrazione rispetto a k_x , richiedendo che siano soddisfatte le condizioni di radiazione. Il cammino di integrazione da seguire nel piano k_x può essere scelto a partire dalla situazione in cui siano presenti piccole perdite nel materiale. In tal caso i poli corrispondenti ai modi della struttura sono leggermente spostati nel quarto e secondo quadrante del piano k_x , poiché posseggono una piccola costante di attenuazione.

L'integrazione può essere svolta lungo l'asse reale, come indicato in Fig. 15.2a, nella quale le croci rappresentano le posizioni dei poli e k_{max} è il numero d'onda massimo tra quelli relativi ai diversi materiali che compongono la struttura. Se le perdite nel materiale diminuiscono progressivamente i poli si avvicinano all'asse reale. Il cammino d'integrazione deve essere deformato in modo da evitare di essere toccato dai poli e che il valore dell'integrale abbia una evoluzione continua. Si ricava in tal modo che in assenza di perdite una possibile scelta del cammino è quella indicata in Fig. 15.2b.

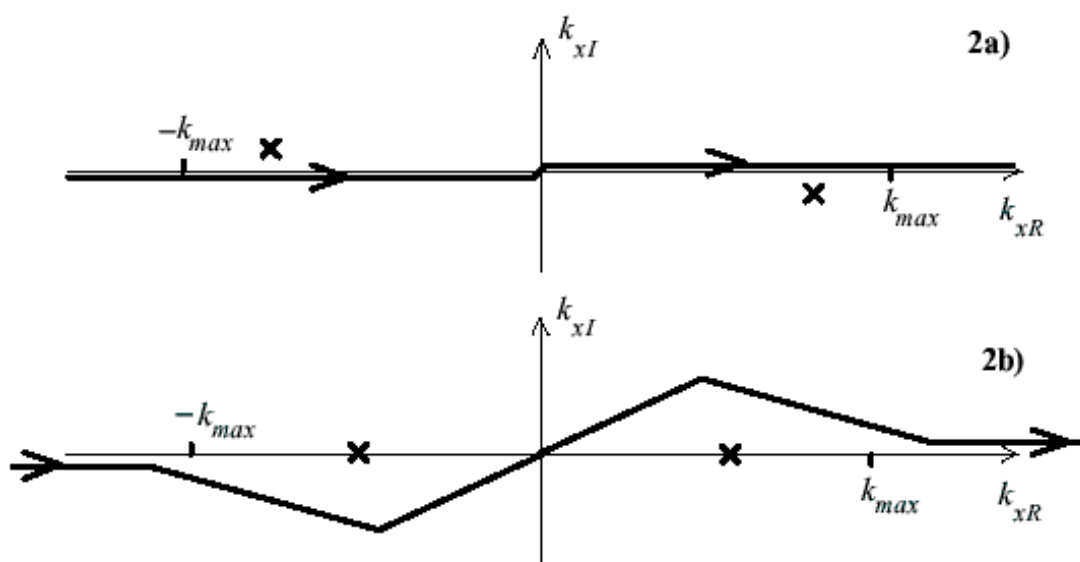


Figura 15.2: a) Cammino di integrazione in k_x per calcolare la corrente $I(x)$ lungo la linea, quando sono presenti perdite nei materiali. b) Cammino C_x di integrazione in k_x per il calcolo della corrente nel caso di assenza di perdite. Le croci indicano le posizioni dei poli e k_{max} è il numero d'onda massimo tra quelli relativi ai mezzi che compongono la struttura.

La valutazione della trasformata di Fourier della corrente data dalla (15.14), da invertire

nel modo ora specificato, richiede a sua volta un'integrazione nel piano k_y . Come è stato illustrato nel capitolo 13, nel piano k_y sono possibili diversi cammini di integrazione e si deve tenere conto dello spostamento dei punti singolari al variare del valore di k_x considerato. Questo richiede che durante l'integrazione rispetto a k_x , per ogni punto nel quale si deve valutare la funzione integranda, sia specificato il cammino di integrazione nel piano k_y , in modo che siano soddisfatte le condizioni di radiazione. Si deve richiedere che la $I(x)$ produca un campo che decada lungo la direzione trasversale e che la $\tilde{I}(k_x)$, al variare di k_x , descriva una funzione monodroma e continua. Ciò significa stabilire la posizione relativa dei punti singolari rispetto al cammino di integrazione. Per determinare la scelta, è sufficiente considerare la presenza di un solo polo, poiché le conclusioni rimangono valide nel caso vi siano più poli e punti di diramazione. Sia dato nuovamente il caso in cui siano presenti piccole perdite e nel piano k_x si possa integrare lungo l'asse reale. Quando k_x assume un valore maggiore in modulo di k_{max} , poiché ogni onda superficiale deve avere costante di fase minore di tale valore, la coppia di poli si trova vicino all'asse immaginario¹, come indicato in Fig. 15.3a e l'integrazione in k_y è svolta lungo l'asse reale. Quando il valore di k_x diminuisce e diviene in modulo minore di k_{max} , i poli si spostano, sempre restando nel secondo e quarto quadrante, e si portano in prossimità dell'asse reale nella posizione indicata in Fig. 15.3b. Poiché sono presenti delle dissipazioni i poli non toccano mai l'asse reale e si può continuare ad integrare lungo esso, ma se la struttura è priva di perdite, per esigenze di continuità analitica della funzione $\tilde{I}(k_x)$, bisogna deformare il cammino come indicato in Fig. 15.3c.

Il procedimento descritto in questo capitolo permette di calcolare la corrente in qualsiasi sezione della guida e tale risultato può essere utilizzato per studiare da un punto di vista numerico l'eccitazione dei modi leaky, con gli strumenti di analisi della corrente introdotti nel capitolo 14. L'espressione derivata per la trasformata della corrente consente di svolgere considerazioni aggiuntive di carattere analitico sul ruolo dei poli corrispondenti alle onde del substrato e dei punti di diramazione eventualmente presenti. Si ottiene, in tal modo, un quadro consistente sulla natura analitica dei diversi cammini d'integrazione visti nel capitolo 13.

15.3 Proprietà analitiche della funzione di Green della struttura guidante

Nel paragrafo precedente si è visto come la scelta del cammino di integrazione nel piano k_y sia intimamente connessa al valore assunto dal numero d'onda longitudinale k_x . La ragione di questa connessione sono le singolarità della funzione di Green del substrato, la posizione delle quali nel piano k_y dipende da k_x . Ci si può domandare che ruolo svolgano tali singolarità per la funzione di Green della struttura guidante, analizzando la natura dei corrispondenti punti sul piano k_x . Per rendere più chiara la trattazione verranno dapprima

¹Così come accadeva ai punti di diramazione nella Fig. 13.5. Al diminuire delle perdite, essi si portano sull'asse immaginario.

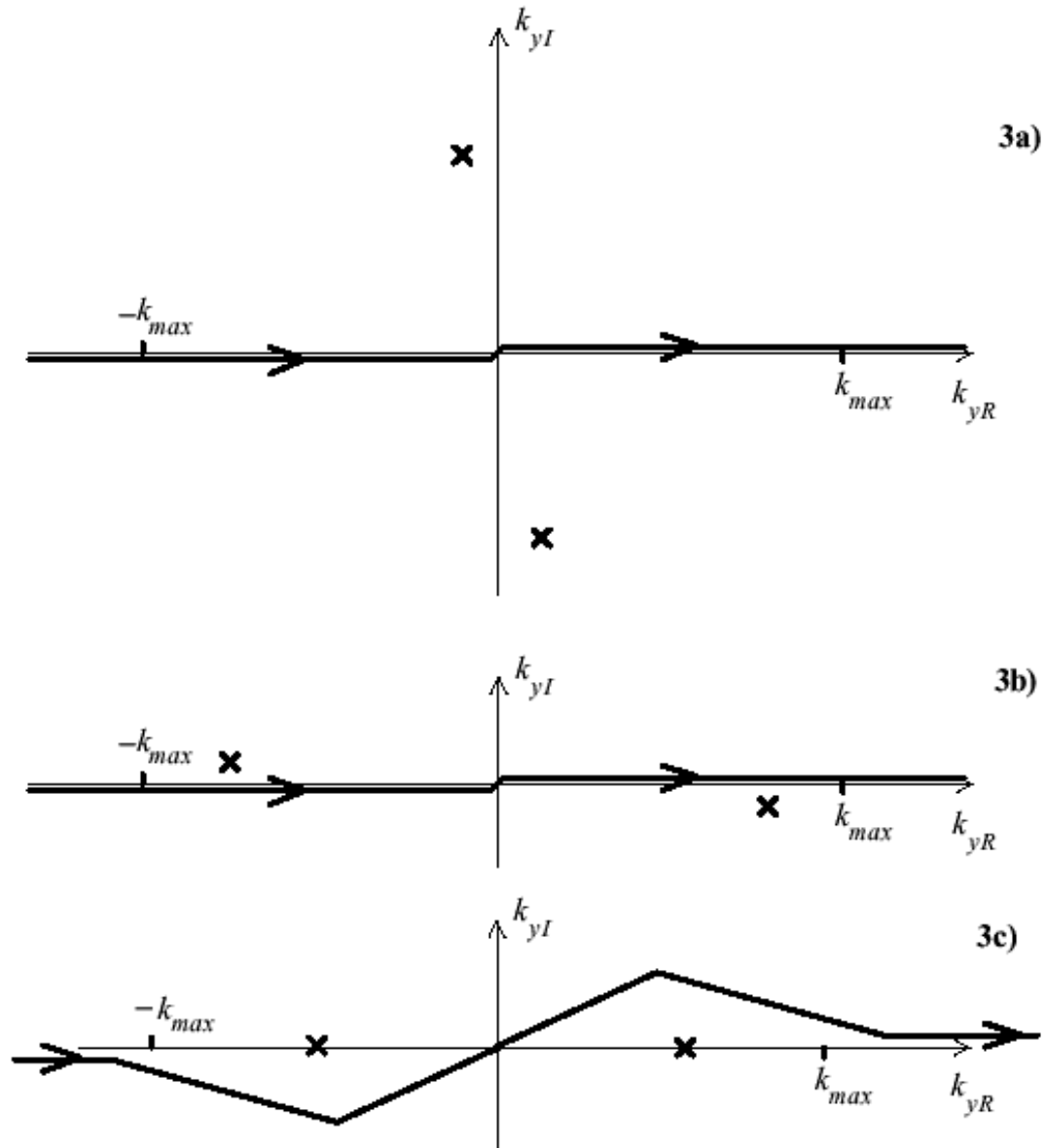


Figura 15.3: Cammini di integrazione nel piano k_y per il calcolo della $\tilde{I}(k_x)$. a) Cammino per $k_x > k_{max}$; in presenza di piccole perdite. b) Cammino per $k_x < k_{max}$; in presenza di piccole perdite. c) Cammino C_y da utilizzare in assenza di piccole perdite.

ma considerati separatamente il caso in cui la funzione di Green del substrato abbia solo singolarità polari e quello in cui sono presenti i soli punti di diramazione. Successivamente si discuterà della situazione generale caratterizzata dall'esistenza di entrambi i tipi di singolarità.

15.3.1 Ruolo dei poli della funzione di Green del substrato corrispondenti alle onde superficiali

Verrà mostrato che tali poli diventano sul piano k_x punti di diramazione algebrici del primo ordine, come quelli della funzione radice quadrata.

Si consideri una linea di trasmissione stampata con copertura. La presenza dei due piani metallici inferiore e superiore determina la presenza di infinite onde superficiali, corrispondenti ai modi della guida a piatti paralleli, riempita da un dielettrico stratificato, che rappresenta il substrato della linea. Ad una certa frequenza solo un numero limitato di onde superficiali si possono propagare, mentre tutte le altre sono sotto cutoff. Si osservi tuttavia che i relativi poli esistono comunque: si tratta infatti del cutoff di una guida metallica chiusa, quindi c'è comunque un numero infinito di poli. L'attenzione sarà qui rivolta ai soli poli relativi alle onde in propagazione, poiché sono gli unici che hanno rilevanza dal punto di vista pratico, trovandosi in prossimità del cammino di integrazione.

Si supponga di trovarsi nella semplice condizione in cui un solo modo della guida a piatti paralleli, la cui costante di propagazione verrà indicata con k_T , si possa propagare. Se la struttura è priva di perdite, k_T si trova sull'asse reale. Allo scopo di indagare la natura di questo punto per la funzione di Green della linea, si supponga di muovere il punto k_x , in cui si valuta la (15.14), in modo da girare attorno a k_T , come viene indicato in Fig. 15.4, nella quale alcune delle successive posizioni occupate dal punto durante la rotazione sono state identificate con un numero d'ordine. Poiché la (15.14) deve rappresentare una funzione analitica, quando si muove il punto nel piano k_x , il cammino di integrazione nel piano k_y deve essere corrispondentemente variato, in modo che il polo non lo attraversi e la funzione vari con continuità. Quando il punto si trova nella posizione 1, si supponga di scegliere il corrispondente cammino di integrazione nel piano k_y coincidente con l'asse reale, come indicato in Fig. 15.5a. Si sposti, quindi, il punto nella posizione 2. Durante lo spostamento, i poli nel piano k_y attraversano l'asse reale ed il cammino di integrazione diventa quello indicato in Fig. 15.5b. Ci si porti ora nel punto 3. Poiché la posizione dei poli è data dalla relazione $k_{yp} = \pm \sqrt{k_T^2 - k_x^2}$, diversamente dal caso precedente essi attraversano, a seguito della variazione di k_x , l'asse immaginario. La loro posizione finale e la corrispondente deformazione del cammino sono riportate in Fig. 15.5c. Tale cammino è equivalente all'asse reale più due cammini chiusi intorno ai poli, come indicato in Fig. 15.5d.

Si osservi che il punto sul piano k_x è tornato nella posizione di partenza, ma la funzione dopo un giro non assume il valore iniziale, come si vede dal fatto che i cammini sono diversi. Possiamo, dunque, concludere che il punto k_T è un punto di diramazione per la funzione di Green della linea [57]. Per capire di che tipo di punto di diramazione si tratta, dalla posizione 3 si muova il punto nella 4. I poli attraversano nuovamente l'asse reale,

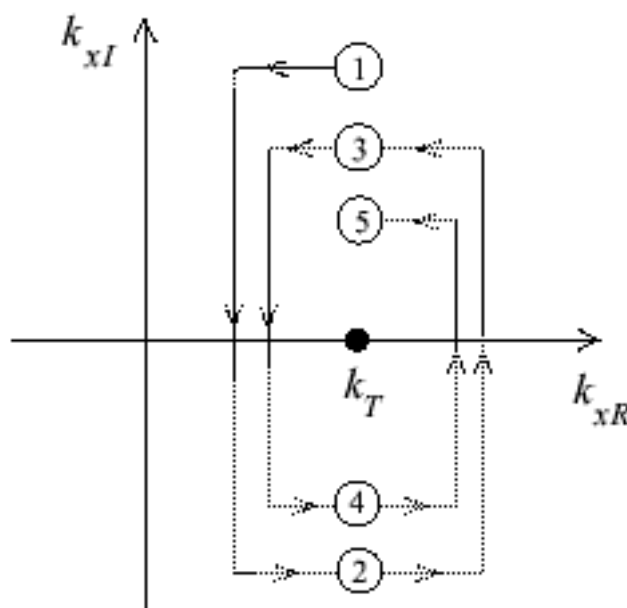


Figura 15.4: Percorso del punto nel piano k_x attorno al punto k_T , polo della funzione di Green del substrato. Alcune posizioni di riferimento sono distinte da un numero.

determinando la cancellazione dei cammini chiusi che li circondano, come schematizzato in Fig. 15.5e. È chiaro che il cammino di integrazione è di nuovo equivalente al solo asse reale, cosicché se ci si porta nella posizione 5, i poli attraversano l'asse immaginario, e si ottiene la stessa configurazione da cui si era partiti nella posizione 1. Si conclude, pertanto, che k_T rappresenta un punto di diramazione del primo ordine, caratteristico di una funzione del tipo $\sqrt{k_T^2 - k_x^2}$.

Si è avuto modo di osservare, nel capitolo 13, che aggiungere i residui dei poli relativi alle onde superficiali all'integrale lungo l'asse reale corrisponde a considerare una determinazione impropria della funzione, cioè che non soddisfa alle condizioni di radiazione. Il passaggio da determinazione propria a impropria e viceversa è perciò determinato dall'inclusione dei poli da parte del cammino, che si verifica ogni qual volta essi attraversano l'asse reale nel piano k_y . Se allora si sceglie il *branch cut* relativo a ciascun punto di diramazione in modo che coincida con il luogo dei punti k_x in corrispondenza dei quali i poli nel piano k_y si trovano esattamente sull'asse reale, si ottengono una superficie di Riemann completamente propria ed una completamente impropria. È facile verificare che il branch cut così definito, raffigurato in Fig. 15.6, coincide con quello detto di Sommerfeld, comunemente utilizzato nelle guide dielettriche aperte [58].

Si vuole, infine, accennare al caso in cui più di un modo della guida a piatti metallici si possa propagare. Per ciascuno di essi può essere ripetuto il ragionamento visto e altresì definire il relativo branch cut, nella maniera descritta. La struttura delle superfici di Riemann è in tal caso data dalla combinazione di quelle relative a ciascun polo. In particolare,

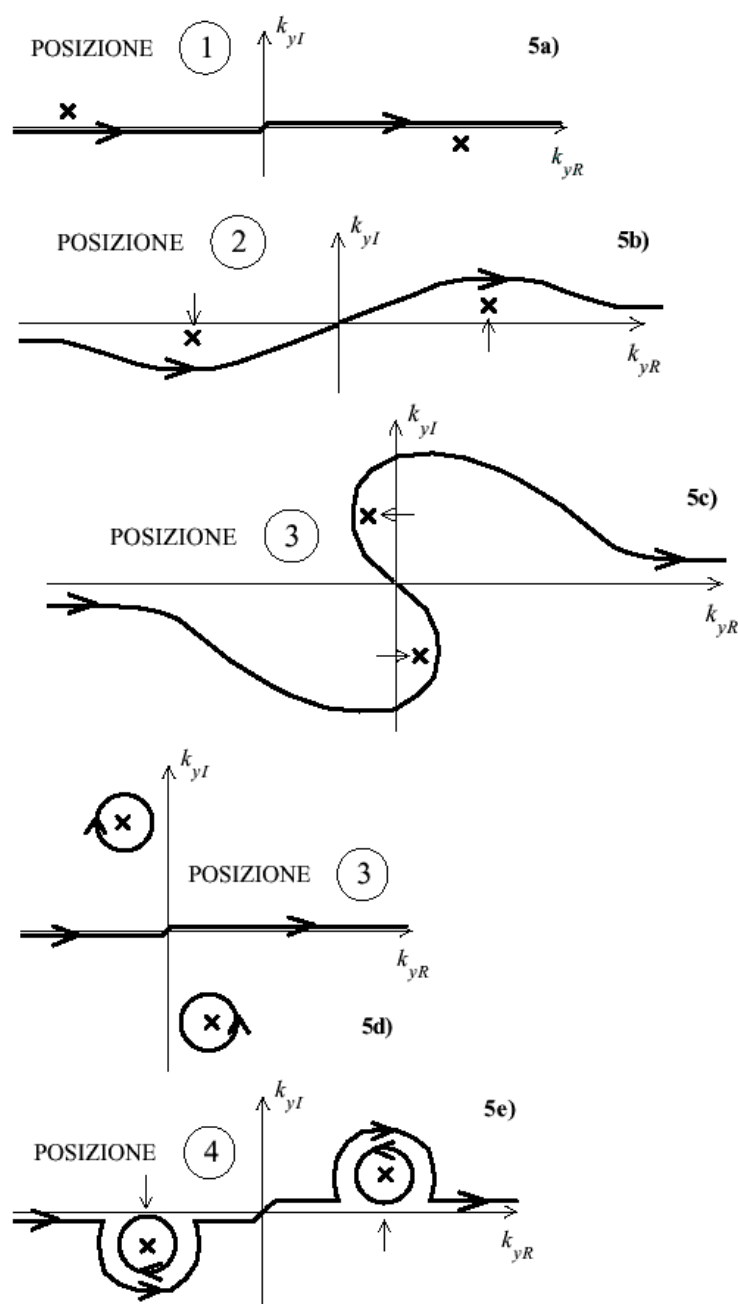


Figura 15.5: a) Cammino di integrazione in k_y nella posizione 1 di Fig. 15.4; le posizioni dei poli sono indicate dalle croci. b) Deformazione del cammino in k_y determinata dallo spostamento di k_x nella posizione 2: i poli attraversano l'asse reale, come indicano le frecce. c) Deformazione del cammino nello spostamento di k_x dalla posizione 2 alla 3: i poli attraversano l'asse immaginario come indicano le frecce. d) Cammino equivalente a quello in Fig. 15.5c. e) Cancellazione dei cammini chiusi attorno ai poli nel passaggio di k_x dalla posizione 3 alla 4.

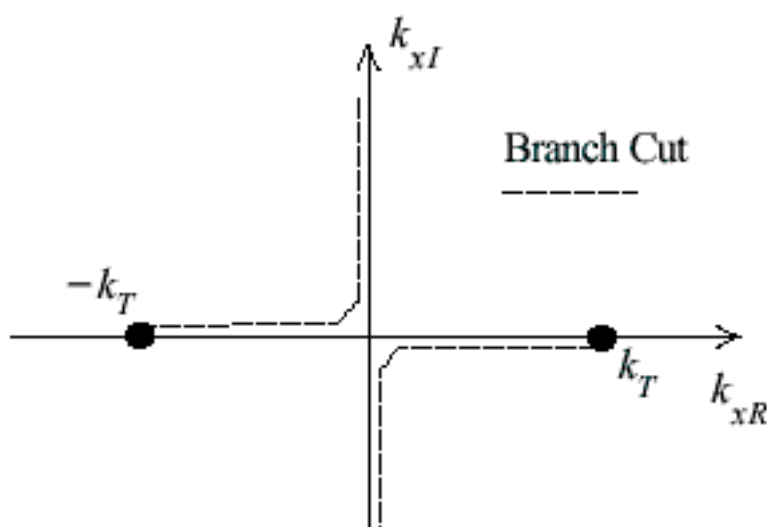


Figura 15.6: Branch Cut relativi a $\pm k_T$ nel piano k_x , tracciati secondo il criterio di Sommerfeld

una volta che i branch cuts sono stati tracciati risulta semplice definire la determinazione della funzione e stabilire quando si passa dalla superficie propria ad una impropria.

15.3.2 Ruolo dei punti di diramazione della funzione di Green del substrato

Per illustrare l'effetto dei punti di diramazione (diventano dei punti di diramazione trascendenti) in assenza di poli dovuti ad onde superficiali, si consideri una struttura molto semplice costituita da una striscia conduttrice e un piano di massa, senza alcun dielettrico interposto, la cui sezione è indicata in Fig. 15.7. In tal caso la funzione di Green del substrato è rappresentata da quella del semispazio definito dal piano conduttore.

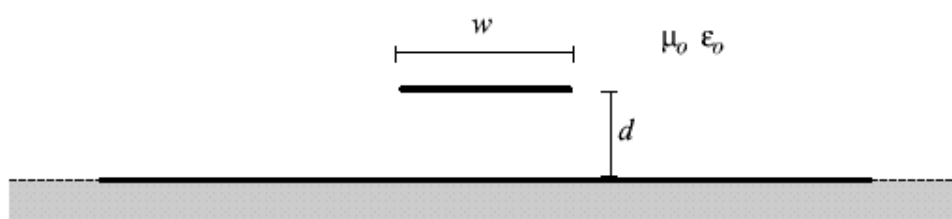


Figura 15.7: Striscia conduttrice posta su un piano conduttore infinito.

I punti di diramazione sono le uniche singolarità presenti e sono in $k_x = \pm k_o$. Come nel caso dei poli, si procede muovendo il punto attorno a k_o , distinguendo con un numero

d'ordine alcune delle posizioni successivamente toccate. Con riferimento alla Fig. 15.8, si supponga di trovarsi nella posizione 1. Il corrispondente cammino di integrazione nel piano k_y è indicato in Fig. 15.9a, nella quale compaiono anche i branch cut scelti secondo il criterio di Sommerfeld. Essi giacciono su iperboli di equazione $k_{yR} k_{yI} = k_{xR} k_{xI}$. Nel seguito si utilizzerà la convenzione di rappresentare a tratto continuo la porzione del cammino di integrazione sulla quale la funzione assume una determinazione propria e a trattini la parte sulla quale la funzione è impropria.

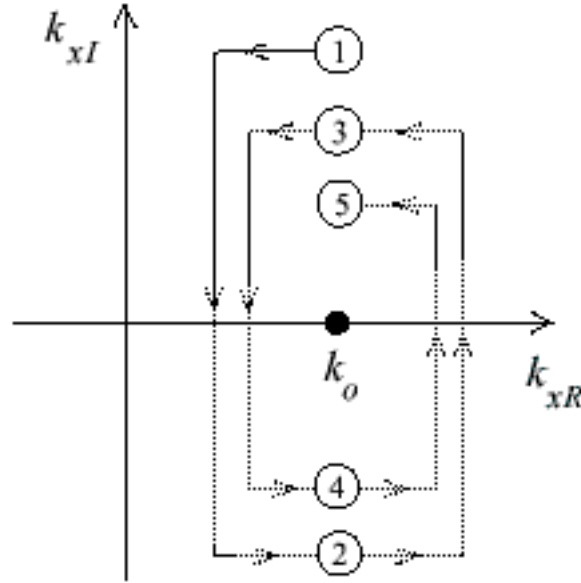


Figura 15.8: Percorso del punto nel piano k_x attorno al punto k_o , punto di diramazione della funzione di Green del substrato. Alcune posizioni di riferimento sono distinte da un numero.

Portandosi nella posizione 2, i punti di diramazione attraversano l'asse reale ed una parte del cammino diviene impropria, come descritto dalla Fig. 15.9b, nella quale i branch cut sono stati ridefiniti in modo da coincidere nuovamente con quelli di Sommerfeld.

Passando alla posizione 3, i punti di diramazione nel piano k_y attraversano l'asse immaginario ed il cammino diviene quello di Fig. 15.9c. Tale cammino è equivalente a quello di Fig. 15.9d, costituito dall'asse reale e una curva chiusa formata da un tratto sul piano proprio che va dal punto di diramazione nel secondo quadrante a quello del quarto ed un tratto sul piano improprio, congiungente i punti di diramazione in verso opposto.

Poiché i punti 1 e 3 si equivalgono, ma la funzione vi assume due differenti valori, che differiscono tra loro per il contributo dato dal cammino chiuso aggiuntivo, si conclude che i punti $+k_o$ e $-k_o$ sono punti di diramazione anche per la funzione di Green della linea. Per determinarne il tipo conviene considerare separatamente l'effetto che il movimento attorno a k_o ha sul cammino chiuso e sull'asse reale. Per quanto riguarda il cammino chiuso, quando

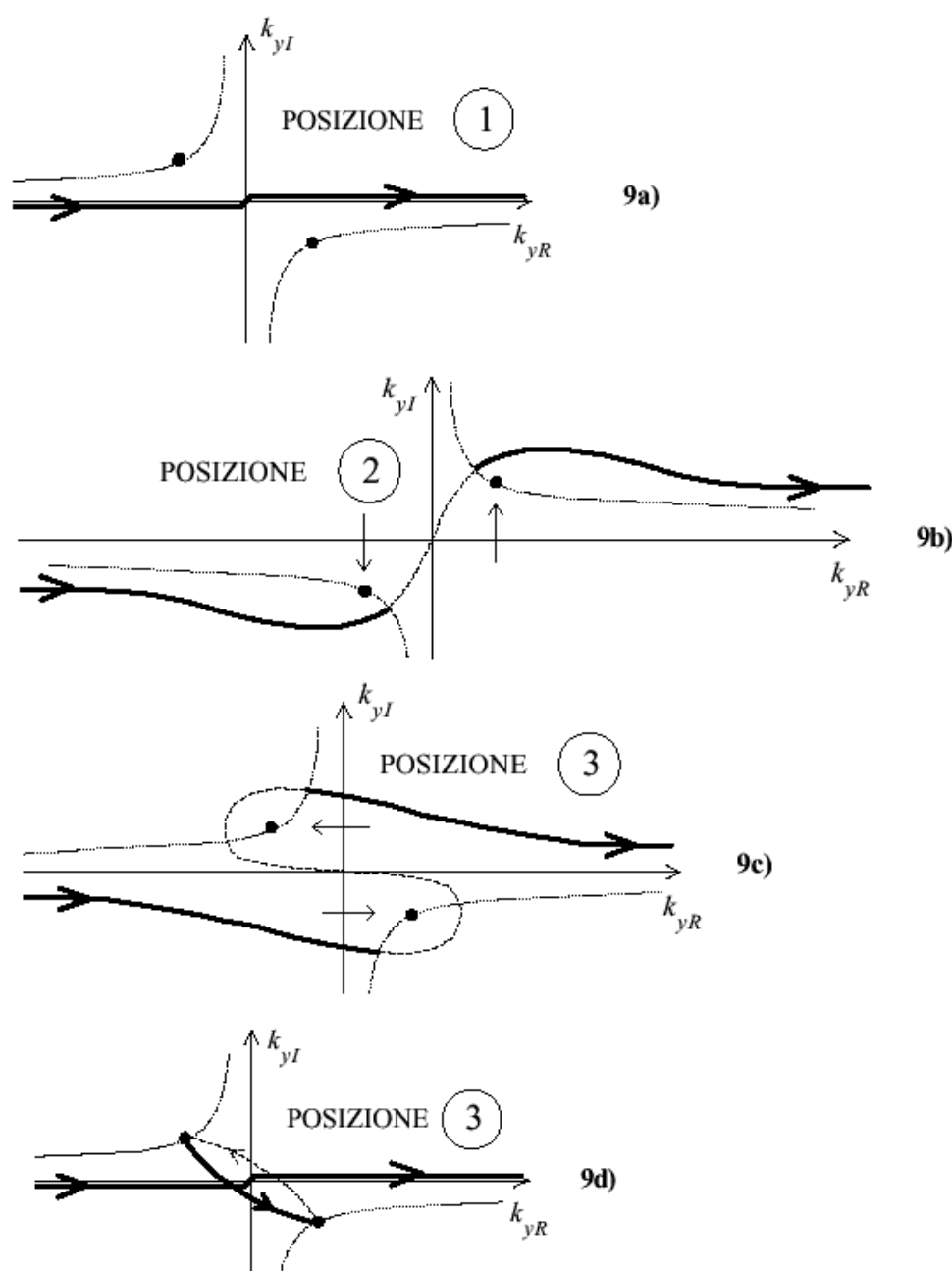


Figura 15.9: a) Cammino di integrazione in k_y quando k_x è nella posizione 1 di Fig. 15.8. Le linee a puntini e trattini corrispondono ai branch cut di Sommerfeld ($\text{Im}[k_z] = 0$), mentre le linee a soli puntini sono definite dalla condizione $\text{Re}[k_z] = 0$. b) Deformazione del cammino in k_y quando k_x si muove da 1 a 2 in Fig. 15.8. Sulla porzione di cammino tratteggiata la funzione assume valori impropri. c) Cammino nella posizione 3, ottenuto a seguito dell'attraversamento dell'asse immaginario da parte dei punti di diramazione. d) Cammino equivalente a quello in Fig. 15.9c.

il punto si porta dalla posizione 3 alla 4, le determinazioni della funzione sui due tratti che lo compongono si scambiano, poiché attraversano la linea che descrive il branch cut di Sommerfeld, quando i punti di diramazione attraversano l'asse reale. Muovendosi quindi da 4 a 5 si ottiene un cammino chiuso identico a quello nella posizione 3. Ciò significa che quando nel piano k_x si compie un giro completo attorno a k_o il cammino chiuso rimane inalterato.

L'asse reale invece, muovendosi dal punto 3 al 4 e successivamente al 5 subisce la stessa modificazione osservata nel movimento da 1 a 3, fornendo un nuovo cammino chiuso. Combinando gli effetti si deduce che ogni giro nel piano k_x aggiunge un cammino chiuso e pertanto k_o è un punto di diramazione di tipo logaritmico per la funzione di Green della linea, con un numero infinito di determinazioni [57].

Anche in questo caso la comparsa di un nuovo cammino è legata all'attraversamento dell'asse reale, nel piano k_y , da parte dei punti di diramazione. Pertanto se si vuole ottenere una superficie di Riemann interamente coincidente con il piano k_x proprio si ottiene un branch cut di Sommerfeld (cfr. Fig. 15.6). A differenza però di quanto accade per la funzione di Green del substrato, le superfici di Riemann sono ora infinite e non è possibile recuperare la determinazione propria continuando a girare intorno a k_o nello stesso senso.

15.3.3 Effetti derivanti dalla presenza contemporanea di poli e punti di diramazione

È utile ora aggiungere alcune considerazioni sul caso generale, nel quale siano presenti contemporaneamente poli dovuti ad onde superficiali e punti di diramazione, come accade ad esempio nella microstriscia, in presenza del dielettrico ed in assenza della copertura. In tal caso il numero di poli, a differenza di quanto accade nelle strutture con copertura, è finito ad una data frequenza.

Si consideri il caso più semplice possibile in cui sia presente una sola onda superficiale, la cui costante di propagazione k_T deve essere maggiore di k_o . Si traccino i branch cut di Sommerfeld relativi a k_T e k_o , come descritto in Fig. 15.10. Poiché ad ogni attraversamento dei branch cut relativi k_T e k_o si aggiunge o si sottrae rispettivamente un residuo ed il contributo di un cammino chiuso, le superfici di Riemann possono essere distinte attraverso il numero di residui e cammini chiusi corrispondenti. Il modo in cui queste superfici sono connesse è molto complesso e non è semplicemente deducibile combinando i risultati ottenuti separatamente per poli e punti di diramazione.

Per rendersi conto di questo, si cominci con il muoversi dalla posizione 1 alla posizione 2, seguendo il percorso indicato in Fig. 15.10. Poiché si attraversano entrambi i branch cut, si ottiene un cammino di integrazione, nel piano k_y , che oltre alla valutazione dell'integrale sull'asse reale prevede il calcolo del residuo dei poli e l'integrazione su un cammino chiuso. Se dalla posizione 2 si muove il punto nella posizione 3, poiché si riattraversa il solo branch cut relativo a k_T , i residui spariscono² e rimane il solo cammino chiuso. Se il punto, invece, dalla posizione 2 viene portato nella 4 ci si aspetta che nulla cambi, poiché non si attraversa

²è l'effetto di cancellazione di Fig. 15.5e.

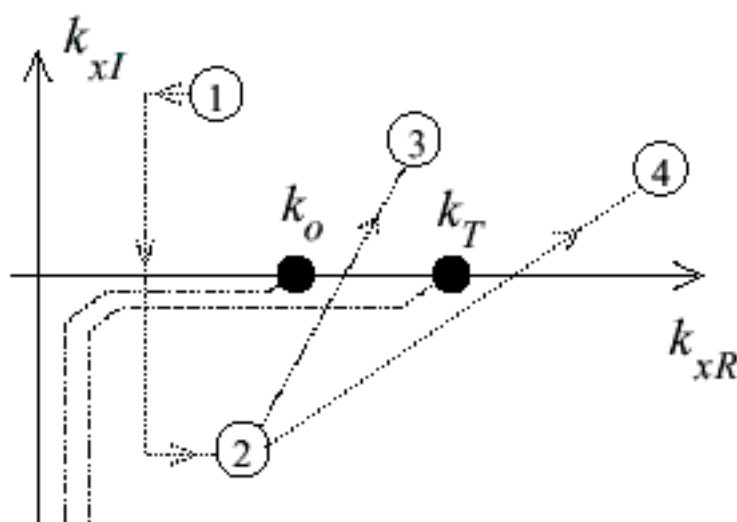


Figura 15.10: Possibili percorsi nel caso in cui siano presenti entrambe le singolarità k_o e k_T .

alcun branch cut. Tuttavia, quando si attraversa l'asse reale per andare da 2 a 4, sia i poli che i punti di diramazione nel piano k_y attraversano entrambi l'asse immaginario e nel farlo il polo attraversa anche il cammino aggiuntivo che congiunge i punti di diramazione. Questo determina la cancellazione del residuo, contrariamente a quanto si era previsto per semplice ispezione nel piano k_x .

Continuando a muovere il punto attorno a k_T e k_o la situazione si complica ulteriormente e non è affatto immediato tracciarne un quadro completo. Fortunatamente, però, tale indagine ha interesse solo dal punto di vista matematico, poiché nel capitolo 13 si è visto come le uniche soluzioni improprie che interessano si ottengono con un cammino del tipo C_2 e quindi si trovano tutte sulla superficie di Riemann corrispondente alla posizione 2 (cfr. Fig. 13.6). A tale superficie si giunge dal piano proprio attraversando solo una volta i branch cut e non è pertanto necessario considerare ulteriori spostamenti. Tale conclusione, basata sui risultati derivati nel capitolo 13, verrà confermata nel seguito, allorché si esaminerà, da un punto di vista analitico, quali soluzioni complesse possono avere influenza sul campo eccitato.

15.4 Classificazione delle diverse componenti della corrente

Nel § 15.2 è stata discussa la metodologia che permette di calcolare la corrente prodotta sulla striscia da un dipolo verticale. Nel caso semplice in cui interessa studiare il solo modo leaky dominante, ossia la situazione già descritta nel § 14.2, combinando i risultati ottenuti,

la corrente totale è fornita dall'espressione:

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_x} \left[- \frac{\int_{C_y} \tilde{G}_{xz}(k_x, k_y, 0, z') \tilde{T}(k_y) dk_y}{\int_{C_y} \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}^2(k_y) dk_y} \right] e^{-jk_x x} dk_x \quad (15.15)$$

dove con C_x si è indicato il cammino sul piano k_x di Fig. 15.2b e con C_y quello nel piano k_y di Fig. 15.3c.

La funzione integranda possiede punti di diramazione in corrispondenza delle costanti di propagazione delle onde superficiali ed eventualmente del numero d'onda dello spazio libero, come è stato illustrato nel paragrafo precedente. Inoltre, dato che il denominatore coincide con l'equazione di dispersione per i modi propri della linea, come già osservato dopo la (15.14), questi, essendo gli zeri di tale equazione, rappresentano anche i poli della funzione. Poiché le singolarità della trasformata di Fourier della corrente sono note, per il calcolo della (15.15) può essere utilizzato il lemma di Jordan [59], in modo da poter annullare il contributo della circonferenza all'infinito nell'applicazione del teorema dei residui.

Se, per esempio, si considera una struttura con copertura (quindi non esiste il punto di diramazione dato dal numero d'onda nello spazio libero) ad una frequenza che consenta la propagazione di una sola onda superficiale, l'applicazione del lemma permette di concludere che, per $x > 0$, la corrente è data dalla somma dei residui dei poli corrispondenti ai modi guidati della linea che si trovano nella regione al di sotto del cammino C_x , più l'integrale attorno al branch cut relativo al punto di diramazione, derivante dalla presenza dell'onda superficiale³. La situazione è descritta dalla Fig. 15.11, in cui i poli catturati sono racchiusi da un cerchio ed il cammino attorno al branch cut è indicato con C_{bc} . La corrispondente espressione per la corrente è la seguente:

$$I(x) = -j \sum_n \text{Res} [\tilde{I}(k_{x_n})] e^{-jk_{x_n} x} + \frac{1}{2\pi} \int_{C_{bc}} \tilde{I}(k_x) e^{-jk_x x} dk_x \quad (15.16)$$

Nella (15.16) $\text{Res} [\tilde{I}(k_{x_n})]$ indica il residuo della funzione $\tilde{I}$ in corrispondenza della costante di propagazione k_{x_n} del modo n -simo. Il fatto che si calcoli il residuo della $\tilde{I}(k_x)$ senza l'esponentiale (che viene solo calcolato in k_{x_n}) deriva dall'assunzione che si tratti di poli del primo ordine, altrimenti non sarebbe vero.

Questa rappresentazione della corrente, di grande importanza concettuale, mette in evidenza le diverse componenti che contribuiscono alla corrente totale. La sommatoria relativa ai modi guidati rappresenta il contributo dello spettro discreto della guida ed i residui forniscono i coefficienti di eccitazione di ciascun modo. Il termine integrale tiene conto dello spettro continuo, che quindi è legato all'integrazione sul taglio.

Nel caso in cui una soluzione leaky abbia un significato fisico, essa deve rappresentare una parte dello spettro continuo in una forma altamente convergente. Questo significa che

³Si ricordi che nel caso di struttura con copertura (cfr. § 15.3.1) ci sono infiniti poli relativi a tutti i modi guidati, anche quelli sotto cutoff.

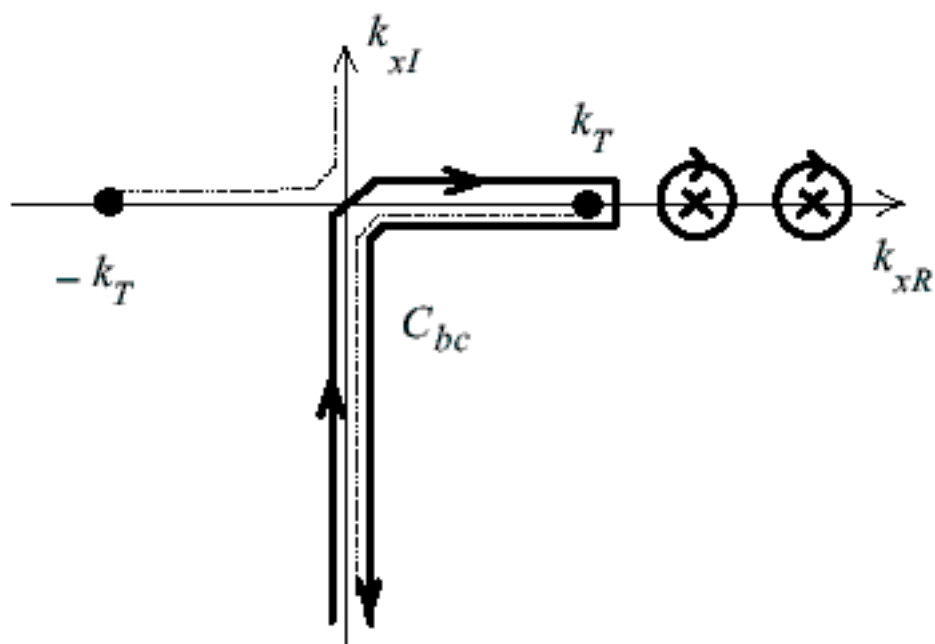


Figura 15.11: Deformazione del cammino di integrazione a seguito dell'applicazione del lemma di Jordan. Le croci indicano i poli corrispondenti ai modi propri, mentre le linee a puntini e trattini rappresentano i branch cut relativi a $\pm k_T$.

indagare sull'eccitazione della soluzione leaky equivale a valutare in termini quantitativi la frazione dello spettro continuo da essa rappresentata. D'altra parte è interessante avere una misura di quanto la soluzione leaky possa essere assimilata ad un normale modo guidato della struttura. Poiché i modi confinati appaiono nella corrente con un'ampiezza definita dai residui, anche per la soluzione leaky si può pensare di utilizzare come valore di riferimento il corrispondente residuo. In altri termini si può assumere come coefficiente d'eccitazione teorico per la soluzione leaky il valore calcolato dal residuo, che corrisponderebbe al caso in cui la soluzione ha pieno significato fisico e può essere considerata alla stregua di un comune modo guidato. Dal confronto con l'ampiezza desunta numericamente dall'analisi dello spettro continuo, si ricava una misura relativa del significato fisico della soluzione leaky.

Conseguentemente alla definizione data per il coefficiente di eccitazione della soluzione impropria, la corrente totale risulta suddivisa in tre componenti:

- la prima è quella dovuta allo spettro discreto dei modi guidati;
- un secondo contributo è dato dall'onda leaky, la cui ampiezza è calcolata direttamente dal residuo;
- infine vi è la parte dello spettro continuo che non viene rappresentata dalla soluzione leaky, che sarà indicata con il termine di onda spaziale, ed è operativamente definita come la differenza tra lo spettro continuo totale e l'onda leaky.

Se il significato dell'onda leaky è rilevante, la suddivisione adottata deve essere in accordo con quella che numericamente si ricava da un'analisi delle correnti con i metodi descritti nel capitolo 14.

Le definizioni date permettono di stabilire criteri oggettivi per valutare il significato fisico delle soluzioni improprie e contengono elementi di grande interesse.

15.4.1 Calcolo dei residui

Le definizioni del paragrafo precedente richiedono il calcolo dei residui della funzione $\tilde{I}(k_x)$ in corrispondenza delle soluzioni proprie ed improprie della struttura guidante. Conviene osservare che, mentre quelle proprie corrispondono ad un cammino di integrazione nel piano k_y equivalente a C_y , indicato nella (15.15) (cfr. Fig. 15.3c), le soluzioni improprie devono essere calcolate utilizzando un cammino del tipo C_1 o C_2 (cfr. Figg. 13.5 e 13.6), a seconda della natura del leakage, rispettivamente solo superficiale, oppure superficiale e spaziale. La maniera più efficiente di valutare i residui per la funzione considerata consiste nell'applicazione diretta della loro definizione, che si riporta per comodità [59]:

$$\text{Res}\left[f(z_p)\right] = \lim_{z \rightarrow z_p} (z - z_p) f(z) \quad (15.17)$$

dove z_p rappresenta un generico polo della funzione f ⁴.

⁴Si ricordi che tale espressione è valida per poli del primo ordine.

Applicando la (15.17) alla trasformata della corrente, per i modi guidati si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{Res}[\tilde{I}(k_{x_n})] &= \\ &= \left[- \int_{C_y} \tilde{G}_{xz}(k_{x_n}, k_y, 0, z') \tilde{T}(k_y) dk_y \right] \lim_{k_x \rightarrow k_{x_n}} \frac{(k_x - k_{x_n})}{\int_{C_y} \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}^2(k_y) dk_y} \end{aligned} \quad (15.18)$$

Per la soluzione leaky, detto $k_{x_{\text{LW}}}$ il corrispondente numero d'onda e C_{LW} il cammino di integrazione con cui è stato calcolato, si ricava la seguente definizione:

$$\begin{aligned} \text{Res}[\tilde{I}(k_{x_{\text{LW}}})] &= \\ &= \left[- \int_{C_{\text{LW}}} \tilde{G}_{xz}(k_{x_{\text{LW}}}, k_y, 0, z') \tilde{T}(k_y) dk_y \right] \lim_{k_x \rightarrow k_{x_{\text{LW}}}} \frac{(k_x - k_{x_{\text{LW}}})}{\int_{C_{\text{LW}}} \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y, 0, 0) \tilde{T}^2(k_y) dk_y} \end{aligned} \quad (15.19)$$

I limiti che compaiono nelle (15.18) e (15.19) possono essere calcolati accuratamente con il metodo di estrapolazione di Richardson [60].

15.5 La condizione per il leakage come condizione necessaria

Nel § 13.4, a seguito di speculazioni di carattere fisico, è stata introdotta la condizione per il leakage di una soluzione impropria, che costituisce un semplice strumento per stabilire se la soluzione considerata può rappresentare il campo realmente eccitato. Tuttavia essa non è sufficiente ad assicurare che ciò avvenga. Inoltre, nel caso in cui la soluzione includa perdite per radiazione tramite più di un'onda superficiale, lascia aperte alcune questioni non ancora chiarite.

Si consideri, infatti, una soluzione leaky in una struttura con copertura, ottenuta includendo i poli relativi ai soli modi della guida a piatti metallici paralleli, parzialmente riempita di dielettrico, TM_o e TM_1 , mentre la frequenza considerata consente anche la propagazione del modo TE_1 . Si supponga che la costante di fase β della soluzione leaky sia minore di quella delle onde TM_o e TM_1 e che $k_{\text{TE}_1} > k_{\text{TM}_1}$. In tal caso la condizione per il leakage suggerisce che il modo non possa avere significato fisico, poiché la condizione di eccitazione è soddisfatta anche per il modo TE_1 , che non è stato incluso nella soluzione.

Tuttavia, è stata sollevata l'obiezione [61] che tale soluzione potrebbe comunque avere un qualche significato fisico se essa fosse in qualche modo ortogonale al modo TE_1 e non potesse interagire con esso. Infine, alcuni autori [62] hanno addirittura messo in dubbio che la condizione per il leakage rappresenti un criterio valido per stabilire l'eccitabilità di una soluzione leaky.

In questo paragrafo si vuole proporre una prova, basata su considerazioni di carattere analitico, che la condizione per il leakage, pur non essendo sufficiente a garantire che una

soluzione leaky rappresenti un campo fisico, risulta comunque una condizione che deve essere necessariamente soddisfatta, affinché ciò avvenga. Esaminando come e quando la soluzione leaky può contribuire alla corrente eccitata, in relazione con le proprietà analitiche della funzione di Green della linea, è possibile confermare le conclusioni del capitolo 13 e rispondere alle obiezioni, cui si è accennato.

15.5.1 Prova della necessità della condizione per il leakage

Si consideri la (15.15) che fornisce l'espressione con la quale si valuta la corrente sulla linea. Il cammino di integrazione C_x che vi è indicato è scelto in modo da evitare di incappare nei poli della funzione corrispondenti ai modi guidati. La (15.16), d'altra parte, stabilisce che tali poli contribuiscono in modo significativo alla corrente attraverso i loro residui. Si può allora affermare che i poli sull'asse reale, anche se non vengono toccati da C_x , hanno grande influenza sui valori che la funzione integranda assume sul cammino C_x , tanto che se lo spettro continuo è scarsamente eccitato, la corrente è dovuta quasi esclusivamente al loro contributo. Questa circostanza si può giustificare, in modo qualitativo, dicendo che ciò accade perché il cammino “vede” i poli sull'asse reale. Infatti esso può essere deformato fino a toccarli, senza che la correttezza del calcolo della corrente ne sia compromessa.

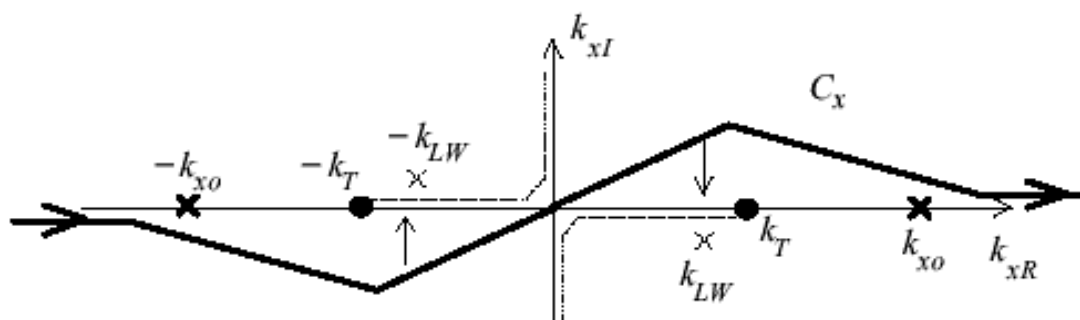


Figura 15.12: Cammino di integrazione per il calcolo della corrente in presenza di un polo leaky, indicato dalla croce tratteggiata, che soddisfa alla condizione per il leakage. k_{x0} è la costante di propagazione del modo proprio della linea e k_T è quella dell'onda superficiale sopra cutoff. La freccia indica il movimento del generico punto sul cammino verso la posizione occupata dal polo.

Si supponga di voler calcolare la corrente in una linea con pareti metalliche di copertura, nel caso in cui sia in propagazione il solo modo dominante e tra le onde superficiali solo una sia sopra cutoff. Il calcolo sia svolto seguendo il cammino C_x , indicato in Fig. 15.12, in modo da evitare i poli relativi al modo dominante in $\pm k_{x0}$ e i punti di diramazione $\pm k_T$ corrispondenti all'onda superficiale. Si suppone che esista una soluzione leaky, che irradia attraverso l'onda superficiale e soddisfi alla condizione per il leakage, cioè $\text{Re}(k_{LW}) < k_T$. I corrispondenti poli sono indicati in Fig. 15.12 attraverso delle croci tratteggiate, per porre in evidenza il fatto che tali poli si trovano sul piano improprio.

Sulla base di quanto affermato per i poli dei modi guidati, si potrebbe concludere che anche il polo leaky può contribuire alla corrente se il cammino di integrazione lo vede. Si può supporre che se il comportamento della funzione sul tratto del cammino che passa in prossimità del branch cut è influenzato dalla presenza del polo leaky, nella corrente sarà comunque presente un suo contributo.

Per verificare tale supposizione si consideri il punto sul cammino più vicino al polo e da questo ci si muova verso il polo variando con continuità la funzione. Nel punto di partenza il valore della funzione si ottiene integrando, nel piano k_y , lungo l'asse reale, come indicato in Fig. 15.13a, in presenza di perdite nei materiali. Quando si attraversa il branch cut, e quindi si passa nel piano improprio, i poli nel piano k_y , relativi all'onda superficiale, attraversano l'asse reale ed il valore della funzione si ottiene integrando lungo il cammino indicato in Fig. 15.13b, che coincide con quello utilizzato per calcolare la soluzione leaky (in particolare si tratta del cammino C_1 di Fig. 13.5). Se ne conclude che il polo improprio si può considerare vicino al cammino da un punto di vista matematico.

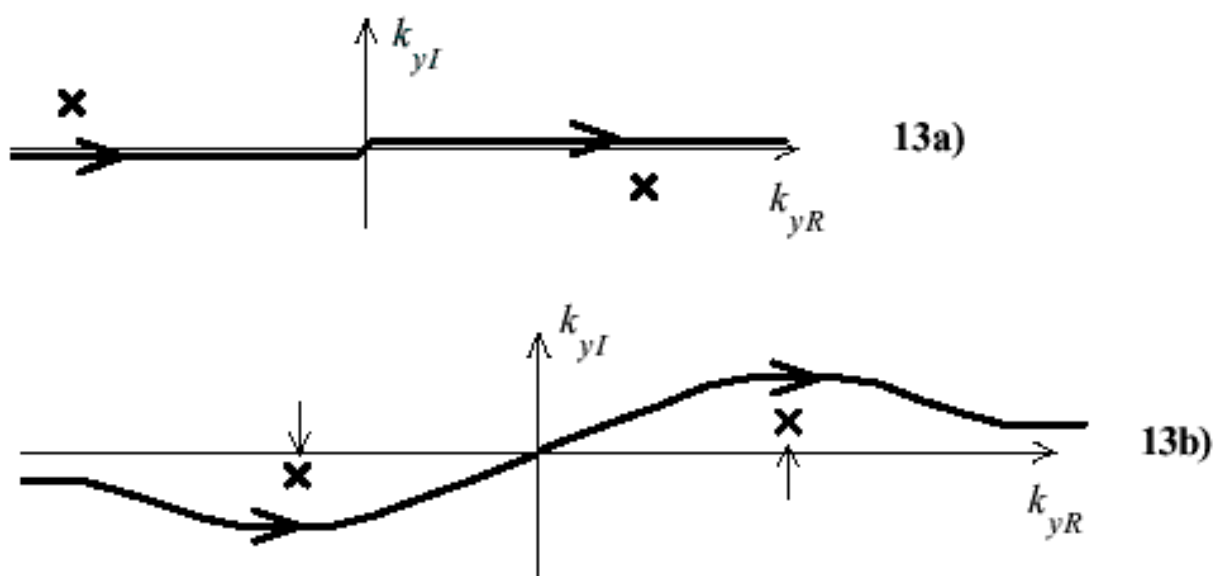


Figura 15.13: a) Cammino in k_y che fornisce i valori della funzione su C_x in Fig. 15.12, in prossimità del branch cut, in presenza di perdite nei materiali. b) Deformazione del cammino di Fig. 15.13a determinata dal movimento del punto su C_x in Fig. 15.12 come indicato dalla freccia.

Si vuole ora esaminare cosa accade quando il polo non soddisfa la condizione per il leakage, ovvero $\text{Re}(k_{LW}) > k_T$. La situazione è rappresentata in Fig. 15.14. È facile prevedere che il polo leaky non può in questo caso avere alcuna influenza sulla corrente. Infatti se fosse visibile al cammino, questo potrebbe essere deformato, a partire dal punto più vicino, fino a toccarlo. Ciò evidentemente non è possibile, poiché il cammino giace sul piano proprio, mentre la soluzione leaky deve trovarsi su quello improprio. La conferma di tale

previsione può essere ottenuta immaginando di muovere il punto più vicino sul cammino verso la posizione occupata dal polo sul piano in Fig. 15.14. Nel punto di partenza la posizione dei poli nel piano k_y ed il corrispondente cammino di integrazione sono rappresentati in Fig. 15.15, come succedeva per i punti di diramazione nella Fig. 13.4. Quando il punto si muove e raggiunge la crocetta tratteggiata in Fig. 15.14 la determinazione che si ottiene, richiedendo che la funzione vari con continuità, è relativa al cammino di integrazione indicato con una linea continua in Fig. 15.16. D'altra parte la soluzione leaky, in tal caso, è ottenuta seguendo il cammino tratteggiato.

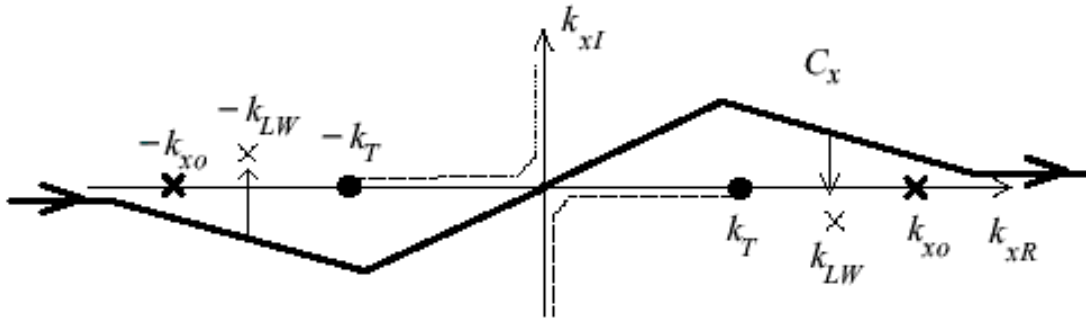


Figura 15.14: Cammino di integrazione per il calcolo della corrente in presenza di un polo leaky, indicato dalla croce tratteggiata, che non soddisfa alla condizione per il leakage.

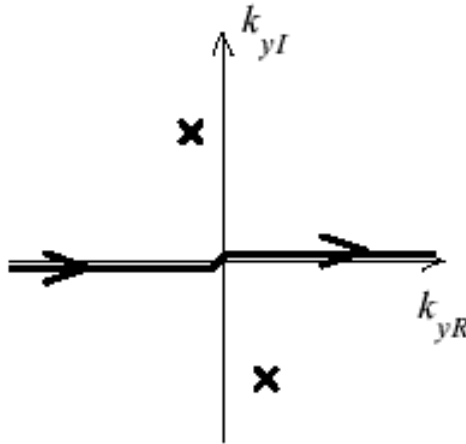


Figura 15.15: Cammino nel piano k_y corrispondente al punto su C_x in Fig. 15.14 più vicino alla crocetta tratteggiata corrispondente al polo leaky.

Si conclude che solo quando la soluzione leaky soddisfa alla condizione per il leakage essa, pur trovandosi sulla superficie di Riemann impropria, è visibile al cammino attraverso il branch cut.

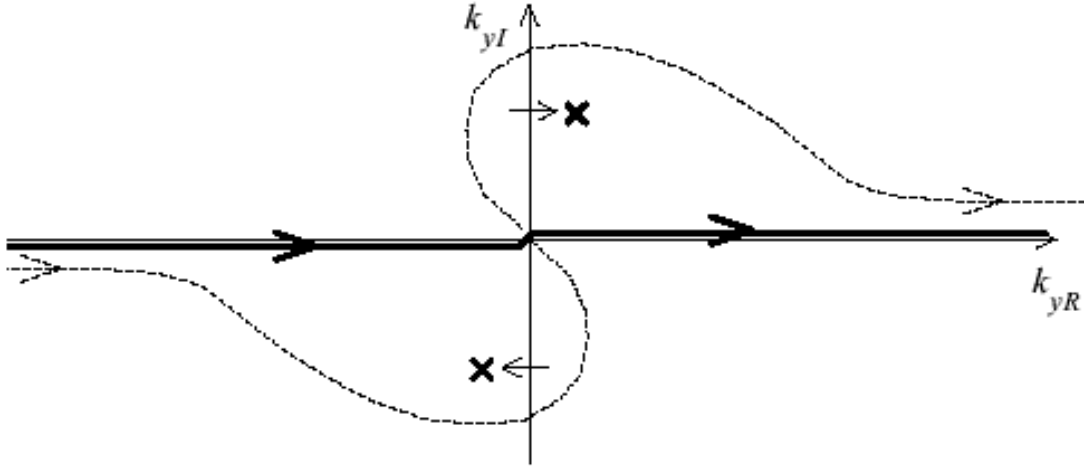


Figura 15.16: Spostamento dei poli (crocette) quando il punto k_x viene mosso a partire dal cammino C_x in Fig. 15.14, come indicato dalla freccia. Il cammino indicato dalla linea continua è quello che si ottiene variando la funzione con continuità. La linea tratteggiata denota il cammino con il quale si calcola la soluzione leaky.

Le considerazioni svolte possono essere applicate al caso in cui la soluzione leaky irradia energia attraverso più tipi di onde. Con questa dizione si intende comprendere sia il caso in cui siano inclusi più poli di onde superficiali, sia quello in cui, oltre ad uno o più poli, venga considerata anche la radiazione per onda spaziale.

Si consideri l'esempio discusso nel paragrafo precedente, relativo ad una struttura con copertura, in cui si possono propagare tre modi del substrato, il TM_o , il TM_1 ed il TE_1 . Si suppone che esista una soluzione leaky, ottenuta includendo i poli relativi alle onde TM_o e TM_1 , la cui costante di fase verifichi la seguente disequazione:

$$\beta_{LW} < k_{TM_1} < k_{TE_1} < k_{TM_o} \quad (15.20)$$

Nel calcolo della corrente sulla striscia attraverso la (15.15) bisogna tener conto della presenza dei punti di diramazione in $\pm k_{TM_o}$, $\pm k_{TM_1}$ e $\pm k_{TE_1}$. La coppia di poli leaky giace su una superficie di Riemann che è propria rispetto ai punti di diramazione $\pm k_{TE_1}$ ed impropria rispetto a $\pm k_{TM_o}$ e $\pm k_{TM_1}$, calcolata utilizzando il cammino di integrazione riportato in Fig. 15.17.

La posizione dei poli leaky sul piano k_x è indicata con una croce tratteggiata in Fig. 15.18, nella quale sono stati anche tracciati i branch cut di Sommerfeld relativi ai punti di diramazione ed il cammino C_x per il calcolo della corrente. Se a partire da C_x si cerca di raggiungere il punto in cui si trova la crocetta tratteggiata, come indicato dalla freccia, si ottiene una determinazione della funzione che corrisponde al cammino di integrazione nel piano k_y indicato in Fig. 15.19, che non corrisponde a quello con il quale è stata calcolata la soluzione. Infatti, poiché si attraversano inevitabilmente i tre branch cut, si finisce su una superficie di Riemann che è impropria anche rispetto ai punti di diramazione

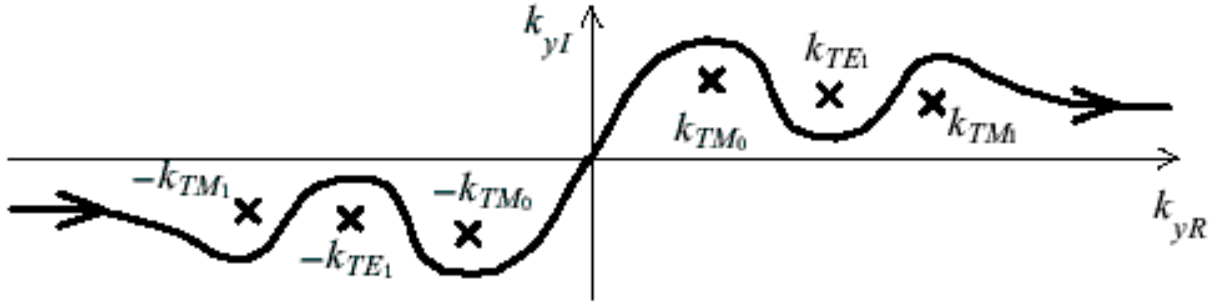


Figura 15.17: Cammino nel piano k_y per il calcolo di una soluzione leaky che include i soli modi TM sopra cutoff.

$\pm k_{TE1}$. Se ne deduce che i poli leaky non sono visibili al cammino C_x e quindi non possono fornire alcun contributo alla corrente.

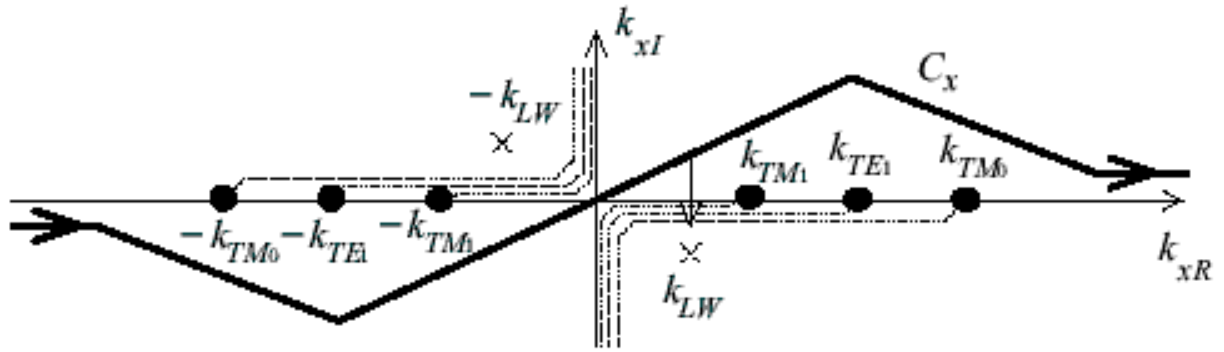


Figura 15.18: Cammino C_x per il calcolo della corrente in presenza di tre onde superficiali in propagazione, per le quali sono indicati i relativi branch cut. Le crocette tratteggiate rappresentano poli leaky e la freccia indica lo spostamento del punto a partire dal cammino per raggiungere la posizione di uno di essi.

Ragionando in modo analogo si può verificare che se è presente anche una soluzione ottenuta includendo i poli delle onde TM_o e TE_1 , la cui costante di fase verifica la condizione per il leakage,

$$k_{TM1} < \beta_{LW} < k_{TE1} < k_{TMo} \quad (15.21)$$

essa è visibile al cammino e può contribuire al campo in modo significativo.

Si può, dunque, concludere che la condizione per il leakage, così come è stata formulata nel capitolo 13, rappresenta una condizione che deve essere soddisfatta, affinché una soluzione impropria possa essere considerata rilevante dal punto di vista fisico.

È opportuno aggiungere un ultimo commento alle conclusioni esposte. Infatti, la condizione per il leakage così come è stata descritta sembrerebbe indicare un brusco cambiamento

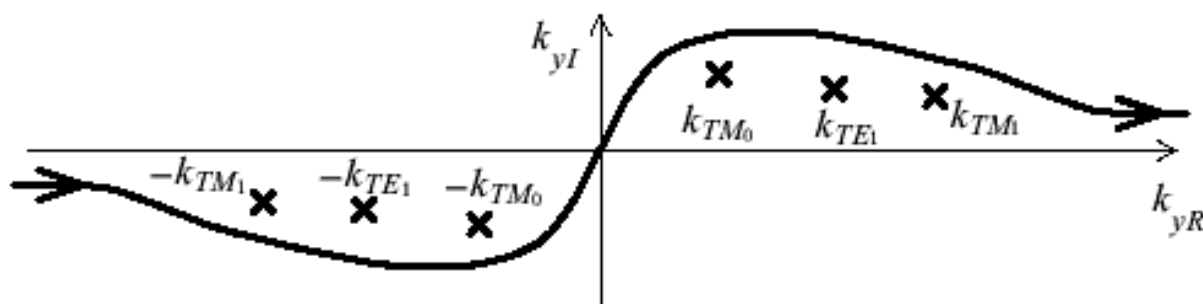


Figura 15.19: Cammino che si ottiene a seguito dello spostamento indicato dalla freccia in Fig. 15.18, come è avvenuto in Fig. 15.13.

di ruolo della soluzione quando questa, al variare di variabili geometriche o fisiche, cessa di soddisfare detta condizione. Un esame più attento degli argomenti esposti in questo paragrafo, tuttavia, suggerisce che il cambiamento debba avvenire gradualmente all'avvicinarsi del polo alla regione del piano improprio nella quale la condizione per il leakage non è soddisfatta. Infatti, quanto più il polo è vicino alla posizione limite, nella quale l'angolo di fuga della radiazione sarebbe nullo, tanto minore è la porzione di cammino che risente della sua presenza.

15.5.2 Ulteriori considerazioni sulla eccitabilità di un modo leaky

È stato più volte messo in evidenza che la condizione per il leakage è da considerarsi necessaria, ma non assicura che il modo leaky appaia nella rappresentazione del campo. L'eccitazione della soluzione leaky, infatti, dipende essenzialmente dal ruolo del corrispondente polo nel determinare il valore della funzione sul cammino di integrazione. Tale ruolo dipende, oltre che dalla sua posizione rispetto al punto di diramazione, discussa nel paragrafo precedente, dalla effettiva vicinanza tra il polo ed il cammino. Ciò significa che se la costante di attenuazione è molto piccola e quindi il polo è quasi sull'asse reale, ci si aspetta che il modo leaky sia fortemente eccitato e si comporti quasi come un modo guidato.

D'altra parte l'ampiezza con la quale viene eccitato dipende direttamente dal valore del corrispondente residuo. Se il residuo, ad esempio, è molto maggiore di quello dei modi guidati, il peso del polo leaky può essere rilevante. Quindi, per essere eccitato bene, un modo leaky deve avere il polo vicino all'asse reale e con residuo grande rispetto ai modi guidati. In tal caso è possibile variare la configurazione di alimentazione al fine di amplificare o eliminare l'eccitazione del modo leaky. Queste considerazioni sono pienamente confermate dai risultati che si ottengono da un esame dei dati numerici ricavati dall'analisi della corrente totale.

15.6 Conclusioni

La costruzione della funzione di Green della linea, nel modo indicato nel § 15.2, e la conseguente analisi delle sue proprietà analitiche hanno consentito di pervenire ad importanti conclusioni circa il ruolo dei poli e punti di diramazione della funzione di Green del substrato. I risultati ottenuti permettono di classificare lo spettro della guida in modo del tutto consistente con quanto si ricava per strutture aperte⁵, per le quali è possibile fornire una rappresentazione esatta del campo eccitato [58].

Ciò rende possibile anche uno studio sistematico delle possibili soluzioni improprie, che possono rappresentare il campo elettromagnetico nella linea. Infatti, lo studio della configurazione delle superfici di Riemann ha consentito di stabilire quali soluzioni improprie sono effettivamente vicine al cammino di integrazione e possono, quindi, comportarsi in maniera molto simile ad un modo confinato.

Infine, la trattazione svolta chiarisce alcune questioni finora irrisolte sull'argomento, fornendo una risposta definitiva non facile da ottenere altrimenti.

⁵qui si intende soprattutto strutture chiuse ed il leakage attraverso onde superficiali.

Parte III

Richiami di Campi Elettromagnetici I

Capitolo 16

Algebra e analisi vettoriale

16.1 Algebra vettoriale

In generale

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) \neq (\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C}$$

Si noti però che se $\underline{A} = \underline{C}$ si ha:

$$\underline{C} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{C} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{C} \times \underline{B} \times \underline{C}$$

In particolare se $\underline{C}$ è un versore $\underline{v}_o$ si ha:

$$\underline{v}_o \times \underline{B} \times \underline{v}_o = \underline{B}_\perp$$

ove $\underline{B}_\perp$ è la componente (vettoriale) di $\underline{B}$ ortogonale a $\underline{v}_o$. La componente (vettoriale) parallela a $\underline{v}_o$ sarà $\underline{B}_\parallel = (\underline{B} \cdot \underline{v}_o) \underline{v}_o$. Si può quindi scrivere, per un qualsiasi vettore $\underline{B}$ ed un qualsiasi versore $\underline{v}_o$:

$$\underline{B} = \underline{v}_o \times \underline{B} \times \underline{v}_o + (\underline{B} \cdot \underline{v}_o) \underline{v}_o$$

Si ricordi infine che dalla $\underline{A} = \underline{B} \times \underline{C}$ segue sempre:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{A} \cdot \underline{C} = 0$$

anche per vettori complessi. Si ha infine:

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot (\underline{C} \times \underline{D}) = (\underline{A} \cdot \underline{C})(\underline{B} \cdot \underline{D}) - (\underline{A} \cdot \underline{D})(\underline{B} \cdot \underline{C})$$

Infatti il primo membro si può vedere come un prodotto misto, nel quale si può scambiare il punto con la croce. Per cui:

$$\begin{aligned} \underline{A} \times \underline{B} \cdot (\underline{C} \times \underline{D}) &= \underline{A} \cdot \underline{B} \times (\underline{C} \times \underline{D}) = \underline{A} \cdot [(\underline{B} \cdot \underline{D})\underline{C} - (\underline{B} \cdot \underline{C})\underline{D}] = \\ &= (\underline{A} \cdot \underline{C})(\underline{B} \cdot \underline{D}) - (\underline{A} \cdot \underline{D})(\underline{B} \cdot \underline{C}) \end{aligned}$$

ove si è applicata la regola del doppio prodotto vettoriale.

16.2 Analisi vettoriale

La formula per la derivata di un prodotto di funzioni di una variabile:

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}$$

si estende anche al prodotto di una funzione scalare per una vettoriale:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \underline{A}) = \frac{d\varphi}{dt} \underline{A} + \varphi \frac{d\underline{A}}{dt}$$

al prodotto scalare:

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \frac{d\underline{A}}{dt} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \frac{d\underline{B}}{dt}$$

e al prodotto vettoriale:

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \times \underline{B}) = \frac{d\underline{A}}{dt} \times \underline{B} + \underline{A} \times \frac{d\underline{B}}{dt}$$

Attenzione al fatto che qui è importante l'ordine dei fattori. Si definisce poi il differenziale totale di un vettore $\underline{A}(q_1, q_2, q_3)$ in perfetta analogia:

$$d\underline{A} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \underline{A}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \underline{A}}{\partial q_3} dq_3$$

16.3 Operatore nabla. Identità vettoriali

Occorre porre attenzione al fatto che le identità vettoriali sono valide solo per funzioni continue, e con derivate parziali (esistenti e) continue fino all'ordine utilizzato.

Si ricordi in proposito (Analisi I) che, diversamente dal caso di funzioni di una variabile, per funzioni di più variabili l'esistenza in un punto di tutte le derivate parziali non implica la continuità della funzione nel punto stesso. Per implicarlo tali derivate devono essere continue. Inoltre il teorema di Schwarz vale solo se le derivate scambiate sono continue.

Ad esempio, con riferimento all'identità $\nabla \times \nabla \varphi = 0$, si consideri la seguente funzione:

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{punti dell'asse } z)$$

Tale funzione è continua $\forall (x, y, z)$. Inoltre le derivate parziali prime $\varphi_x(x, y)$, $\varphi_y(x, y)$ e $\varphi_z \equiv 0$ sono continue $\forall (x, y, z)$.

Si ha:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \underline{x}_o & \underline{y}_o & \underline{z}_o \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \varphi_x & \varphi_y & 0 \end{vmatrix} = \underline{z}_o (\varphi_{yx} - \varphi_{xy})$$

Le derivate parziali seconde $\varphi_{xy}(x, y)$ e $\varphi_{yx}(x, y)$ sono continue $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, ma non sono continue sull'asse z . Per cui il teorema di Schwarz sull'asse z non vale, ed infatti sull'asse z si ha: $\varphi_{xy} = -1$ e $\varphi_{yx} = 1 \neq \varphi_{xy}$, per cui sull'asse z : $\nabla \times \nabla \varphi = \underline{z}_o 2 \neq 0$.

Capitolo 17

Coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche

Occorre notare che nell'origine i versori $\underline{\varrho}_o$ e $\underline{\varphi}_o$, in coordinate cilindriche, ed i versori $\underline{r}_o$, $\underline{\theta}_o$ e $\underline{\varphi}_o$ in coordinate sferiche non sono definiti. Per cui in questi sistemi non ha senso pensare i vettori applicati nell'origine.

17.1 Coefficienti metrici

Esprimendo il vettore posizione $\underline{r}$ in coordinate cartesiane:

$$h_i \underline{q}_{i_o} = \underline{x}_o \frac{\partial x}{\partial q_i} + \underline{y}_o \frac{\partial y}{\partial q_i} + \underline{z}_o \frac{\partial z}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

allora il modulo h_i del vettore $h_i \underline{q}_{i_o}$ sarà dato dalla:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = \frac{\partial s_i}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Questo risultato coincide con le formule per l'ascissa curvilinea (Analisi I).

In coordinate cartesiane si ha banalmente:

$$h_1 = 1 \quad h_2 = 1 \quad h_3 = 1$$

In coordinate cilindriche si ha invece:

$$h_1 = 1 \quad h_2 = \varrho \quad h_3 = 1$$

Infatti applicando la formula precedente:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-\varrho \sin \varphi)^2 + (\varrho \cos \varphi)^2} = \varrho \\ h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

In coordinate sferiche:

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

Infatti:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1 \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r \\ h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2} = \\ &= r \sin \theta \end{aligned}$$

L'elemento di volume dV in coordinate ortogonali generiche sarà:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Una tale espressione va adoperata quando si risolve un integrale di volume in un sistema di coordinate generico,

$$\int_V f(q_1, q_2, q_3) dV$$

- In coordinate cartesiane banalmente si avrà: $dV = dx dy dz$.
- In coordinate cilindriche: $dV = \varrho d\varrho d\varphi dz$.
- In coordinate sferiche: $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Per quanto riguarda gli elementi di area dS , nel calcolo degli integrali di superficie, si ricordi che in coordinate polari nel piano si ha

$$dS = \varrho d\varrho d\varphi = h_1 h_2 dq_1 dq_2$$

Invece in coordinate sferiche si ha, su una sfera centrata nell'origine:

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = h_2 h_3 \, dq_2 \, dq_3$$

Si ricordi inoltre (dal corso di Analisi II) che l'elemento di volume dV poteva scriversi in termini del cosiddetto (determinante) jacobiano della trasformazione, definito dalla:

$$J(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

Si aveva infatti:

$$dV = |J(q_1, q_2, q_3)| \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3$$

Dal confronto fra le due espressioni del dV risulta:

$$|J(q_1, q_2, q_3)| = h_1 h_2 h_3$$

D'altra parte, ricordando l'espressione del prodotto misto come determinante (in coordinate cartesiane):

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \times \underline{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ne segue che:

$$J(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_3} = h_1 h_2 h_3 \, \underline{q}_{1o} \cdot \underline{q}_{2o} \times \underline{q}_{3o}$$

Lo scalare $\underline{q}_{1o} \cdot \underline{q}_{2o} \times \underline{q}_{3o}$ vale +1 se la terna è destra (come si è supposto), -1 se la terna è sinistra. Nel nostro caso si ha dunque:

$$J(q_1, q_2, q_3) = h_1 h_2 h_3$$

(la verifica può essere fatta in coordinate cilindriche o sferiche).

Si noti infine che l'esprimere l'elemento di volume dV per mezzo di un prodotto misto è in accordo col significato geometrico di tale prodotto (il modulo del prodotto misto è pari al volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori).

17.2 Trasformazioni di coordinate: versori, componenti, prodotti

Consideriamo ora le formule che esprimono i versori generici $\underline{q}_{1o}$, $\underline{q}_{2o}$, $\underline{q}_{3o}$ in termini dei versori cartesiani $\underline{x}_o$, $\underline{y}_o$ e $\underline{z}_o$. Dalla relazione:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1} = h_1 \underline{q}_{1o}$$

segue che:

$$\underline{q}_{1o} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1}$$

per cui si ha:

$$\underline{q}_{1o} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \underline{x}_o + \frac{\partial y}{\partial q_1} \underline{y}_o + \frac{\partial z}{\partial q_1} \underline{z}_o \right)$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} \underline{q}_{2o} &= \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \underline{x}_o + \frac{\partial y}{\partial q_2} \underline{y}_o + \frac{\partial z}{\partial q_2} \underline{z}_o \right) \\ \underline{q}_{3o} &= \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \underline{x}_o + \frac{\partial y}{\partial q_3} \underline{y}_o + \frac{\partial z}{\partial q_3} \underline{z}_o \right) \end{aligned}$$

Le trasformazioni viste possono essere scritte simbolicamente in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} \\ \underline{q}_{2o} \\ \underline{q}_{3o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix}$$

È importante notare che in un sistema ortogonale la matrice di trasformazione $[M]$ gode della proprietà che la sua inversa $[M]^{-1}$ coincide con la sua trasposta $[M]^T$. Del resto si noti che le righe di $[M]$ (che sono le colonne di $[M]^T$) non sono altro, vista la formula precedente, che le componenti cartesiane dei versori $\underline{q}_{1o}$, $\underline{q}_{2o}$, $\underline{q}_{3o}$. Pertanto se si esegue il prodotto $[M][M]^T$ righe per colonne, si eseguono in realtà tutti i possibili prodotti scalari fra i versori $\underline{q}_{1o}$, $\underline{q}_{2o}$, $\underline{q}_{3o}$ mutuamente ortogonali. Quindi la matrice risultante avrà tutti gli elementi nulli, tranne quelli della diagonale principale che saranno pari a 1. Si tratta pertanto della matrice unitaria $[I]$.

Espressioni particolari si possono ottenere per i versori $\underline{\rho}_o$, $\underline{\varphi}_o$, $\underline{z}_o$ in coordinate cilindriche, e per $\underline{r}_o$, $\underline{\theta}_o$, $\underline{\varphi}_o$ in coordinate sferiche, sostituendo le espressioni opportune per le coordinate e per i coefficienti metrici.

In coordinate cilindriche, eseguendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} \underline{\rho}_o \\ \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = [M_c] \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_o &= \cos \varphi \underline{x}_o + \sin \varphi \underline{y}_o \\ \underline{\varphi}_o &= -\sin \varphi \underline{x}_o + \cos \varphi \underline{y}_o \\ \underline{z}_o &= \underline{z}_o \end{aligned}$$

In coordinate sferiche:

$$\begin{pmatrix} \underline{r}_o \\ \underline{\theta}_o \\ \underline{\varphi}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = [M_s] \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix}$$

(la terza riga doveva essere uguale alla seconda delle coordinate cilindriche).

Ossia:

$$\begin{aligned} \underline{r}_o &= \sin \theta \cos \varphi \underline{x}_o + \sin \theta \sin \varphi \underline{y}_o + \cos \theta \underline{z}_o \\ \underline{\theta}_o &= \cos \theta \cos \varphi \underline{x}_o + \cos \theta \sin \varphi \underline{y}_o - \sin \theta \underline{z}_o \\ \underline{\varphi}_o &= -\sin \varphi \underline{x}_o + \cos \varphi \underline{y}_o \end{aligned}$$

Per ottenere le trasformazioni inverse, ossia per esprimere i versori cartesiani $\underline{x}_o, \underline{y}_o, \underline{z}_o$ in termini dei versori generici $\underline{q}_{1o}, \underline{q}_{2o}, \underline{q}_{3o}$ è necessario invertire la matrice vista. Come già visto, però, per tale matrice l'inversa coincide con la trasposta (proprietà di unitarietà, caratteristica delle matrici che in uno spazio vettoriale trasformano una base ortonormale, cioè costituita da versori mutuamente ortogonali, in un'altra ortonormale). Si ha dunque, trasponendo:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} \\ \underline{q}_{2o} \\ \underline{q}_{3o} \end{pmatrix} = [M]^T \begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} \\ \underline{q}_{2o} \\ \underline{q}_{3o} \end{pmatrix} =$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \underline{x}_o &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} \underline{q}_{1o} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} \underline{q}_{2o} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \underline{q}_{3o} \\ \underline{y}_o &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} \underline{q}_{1o} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} \underline{q}_{2o} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \underline{q}_{3o} \\ \underline{z}_o &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \underline{q}_{1o} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \underline{q}_{2o} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \underline{q}_{3o} \end{aligned}$$

Particolarizzando alle coordinate cilindriche si ha:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varrho}_o \\ \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = [M_c]^T \begin{pmatrix} \underline{\varrho}_o \\ \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \underline{x}_o &= \cos \varphi \underline{\varrho}_o - \sin \varphi \underline{\varphi}_o \\ \underline{y}_o &= \sin \varphi \underline{\varrho}_o + \cos \varphi \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o &= \underline{z}_o \end{aligned}$$

In coordinate sferiche:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{r}_o \\ \underline{\theta}_o \\ \underline{\varphi}_o \end{pmatrix} = [M_s]^T \begin{pmatrix} \underline{r}_o \\ \underline{\theta}_o \\ \underline{\varphi}_o \end{pmatrix} =$$

ossia:

$$\begin{aligned} \underline{x}_o &= \sin \theta \cos \varphi \underline{r}_o + \cos \theta \cos \varphi \underline{\theta}_o - \sin \varphi \underline{\varphi}_o \\ \underline{y}_o &= \sin \theta \sin \varphi \underline{r}_o + \cos \theta \sin \varphi \underline{\theta}_o + \cos \varphi \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o &= \cos \theta \underline{r}_o - \sin \theta \underline{\theta}_o \end{aligned}$$

Per completezza si può considerare la trasformazione che permette di passare dai versori in coordinate cilindriche a quelli in coordinate sferiche. Si può ad esempio passare attraverso le coordinate cartesiane. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{r}_o \\ \underline{\theta}_o \\ \underline{\varphi}_o \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\rho}_o \\ \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = [M_s][M_c]^T \begin{pmatrix} \underline{\rho}_o \\ \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Svolgendo il prodotto matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} \underline{r}_o \\ \underline{\theta}_o \\ \underline{\varphi}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\rho}_o \\ \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix}$$

(questa terza riga era evidente). Trasponendo si ha la trasformazione inversa:

$$\begin{pmatrix} \underline{\rho}_o \\ \underline{\varphi}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{r}_o \\ \underline{\theta}_o \\ \underline{\varphi}_o \end{pmatrix} =$$

Le trasformazioni dei versori possono essere utilizzate per vedere come cambiano le componenti di un generico vettore $\underline{A}$, nel passaggio da un sistema di coordinate ad un altro. Essendo, come già visto, i versori delle funzioni di punto, tale vettore dovrà essere pensato sempre applicato in un ben preciso punto P . Del resto i vettori che si considerano in elettromagnetismo sono in generale campi vettoriali funzioni di punto, e quindi è ben naturale applicarli nel punto cui si riferiscono.

In un sistema cartesiano si ha:

$$\underline{A} = A_x \underline{x}_o + A_y \underline{y}_o + A_z \underline{z}_o$$

mentre in un generico sistema curvilineo si scriverà:

$$\underline{A} = A_1 \underline{q}_{1o} + A_2 \underline{q}_{2o} + A_3 \underline{q}_{3o}$$

Con simbolismo matriciale si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \underline{A} = (A_x \ A_y \ A_z) \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} &= (A_x \ A_y \ A_z) [M]^T \begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} \\ \underline{q}_{2o} \\ \underline{q}_{3o} \end{pmatrix} = \\ &= (A_1 \ A_2 \ A_3) \begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} \\ \underline{q}_{2o} \\ \underline{q}_{3o} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dal confronto segue:

$$(A_1 \ A_2 \ A_3) = (A_x \ A_y \ A_z) [M]^T$$

Per passare ai vettori colonna si devono trasporre i due membri, ricordando che se $[B] = [C][D]$, ne segue $[B]^T = [D]^T[C]^T$. Per cui:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Si noti che la trasformazione coincide con quella usata per i versori.

In particolare in coordinate cilindriche si ha:

$$\underline{A} = A_\varrho \underline{\varrho}_o + A_\varphi \underline{\varphi}_o + A_z \underline{z}_o$$

ove:

$$\begin{pmatrix} A_\varrho \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = [M_c] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

In coordinate sferiche si ha:

$$\underline{A} = A_r \underline{r}_o + A_\theta \underline{\theta}_o + A_\varphi \underline{\varphi}_o$$

ove:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = [M_s] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

(la terza riga doveva essere uguale alla seconda in coordinate cilindriche).

In modo analogo si può passare dalle componenti in coordinate cilindriche a quelle in coordinate sferiche. Le varie trasformazioni inverse si ottengono trasponendo le matrici.

Si noti dagli esempi visti che in un sistema di coordinate curvilinee generico le componenti di uno stesso vettore dipendono dal punto di applicazione, mentre in coordinate cartesiane esse sono delle costanti.

Come esempio si consideri il vettore posizione $\underline{r}$, che in coordinate cartesiane ha l'espressione:

$$\underline{r} = x \underline{x}_o + y \underline{y}_o + z \underline{z}_o$$

In coordinate curvilinee generiche sarà:

$$\underline{r} = r_1 \underline{q}_{1o} + r_2 \underline{q}_{2o} + r_3 \underline{q}_{3o}$$

ove però $\underline{r}$ è pensato applicato nel punto P cui si riferisce, e non nell'origine, dove i versori non sono in generale definiti.

Si ha:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

In particolare in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_\varrho \\ r_\varphi \\ r_z \end{pmatrix} &= [M_c] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi \\ -\varrho \cos \varphi \sin \varphi + \varrho \sin \varphi \cos \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per cui $\underline{r} = \varrho \underline{\varrho}_o + z \underline{z}_o$, come doveva essere.

In coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_r \\ r_\theta \\ r_\varphi \end{pmatrix} &= [M_s] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r \cos^2 \theta \\ r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - r \sin \theta \cos \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta \\ r \sin \theta \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per cui $\underline{r} = r \underline{r}_o$ come doveva essere.

Si elencano ora i sistemi di coordinate curvilinee ortogonali nei quali l'equazione di Helmholtz è risolvibile per separazione di variabili:

1. coordinate cartesiane ortogonali;
2. coordinate cilindriche circolari;
3. coordinate cilindriche ellittiche;
4. coordinate cilindriche paraboliche;
5. coordinate paraboliche di rotazione;
6. coordinate paraboloidali;
7. coordinate sferiche;
8. coordinate sferoidali prolate;
9. coordinate sferoidali oblate;
10. coordinate coniche;
11. coordinate ellissoidali.

Quest'ultimo caso comprende come sottocasi tutti i precedenti.

In un sistema di coordinate curvilinee ortogonali generico il prodotto scalare si esegue nello stesso modo che in coordinate cartesiane (somma di prodotti di componenti omonime), e si ottiene sempre lo stesso risultato, come deve essere per coerenza. Considerando infatti i vettori:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= A_1 \underline{q}_{1o} + A_2 \underline{q}_{2o} + A_3 \underline{q}_{3o} \\ \underline{B} &= B_1 \underline{q}_{1o} + B_2 \underline{q}_{2o} + B_3 \underline{q}_{3o}\end{aligned}$$

si ha:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_1 \underline{q}_{1o} + A_2 \underline{q}_{2o} + A_3 \underline{q}_{3o}) \cdot (B_1 \underline{q}_{1o} + B_2 \underline{q}_{2o} + B_3 \underline{q}_{3o}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

per la proprietà distributiva del prodotto scalare e la mutua ortogonalità fra i versori. In termini matriciali:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

In particolare si ha in coordinate cilindriche:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_\rho B_\rho + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z$$

e in coordinate sferiche:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$$

Ricordando ora la matrice di trasformazione delle componenti, tale che:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

e ricordando la regola di trasposizione del prodotto fra due matrici, per cui:

$$(A_1 \ A_2 \ A_3) = (A_x \ A_y \ A_z) [M]^T$$

si ha infine per il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} (A_1 \ A_2 \ A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} &= (A_x \ A_y \ A_z) [M]^T [M] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = (A_x \ A_y \ A_z) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

essendo $[M]^T = [M]^{-1}$, per cui il prodotto $[M]^T [M]$ dà la matrice unitaria. Si è dunque ottenuto lo stesso valore del prodotto scalare in coordinate cartesiane, come doveva essere.

Del resto al prodotto scalare è legata la definizione stessa di modulo di un vettore. Si ha infatti, se $\underline{A}$ è un vettore reale (cioè le cui componenti sono numeri reali):

$$|\underline{A}| = \sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Attenzione al fatto che tale definizione non si estende automaticamente al caso dei vettori complessi.

Per quanto riguarda il prodotto vettoriale, si eseguirà anch'esso allo stesso modo, ossia:

$$\begin{aligned} \underline{A} \times \underline{B} &= (A_1 \underline{q}_{1o} + A_2 \underline{q}_{2o} + A_3 \underline{q}_{3o}) \times (B_1 \underline{q}_{1o} + B_2 \underline{q}_{2o} + B_3 \underline{q}_{3o}) = \\ &= \begin{vmatrix} \underline{q}_{1o} & \underline{q}_{2o} & \underline{q}_{3o} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

poiché $\underline{q}_{1o}, \underline{q}_{2o}, \underline{q}_{3o}$ sono una terna destra di versori ortogonali.

In particolare si ha in coordinate cilindriche:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{\rho}_o & \underline{\varphi}_o & \underline{z}_o \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \\ B_\rho & B_\varphi & B_z \end{vmatrix}$$

e in coordinate sferiche:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{r}_o & \underline{\theta}_o & \underline{\varphi}_o \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix}$$

Per verificare l'invarianza del risultato ottenuto, si ricordi la proprietà che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso valore del determinante, per cui si ha:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{q}_{1o} & A_1 & B_1 \\ \underline{q}_{2o} & A_2 & B_2 \\ \underline{q}_{3o} & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

Osservando ora le colonne di tale matrice e ricordando le formule di trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} \\ \underline{q}_{2o} \\ \underline{q}_{3o} \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

ne segue che per l'intera matrice si ha:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} & A_1 & B_1 \\ \underline{q}_{2o} & A_2 & B_2 \\ \underline{q}_{3o} & A_3 & B_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} \underline{x}_o & A_x & B_x \\ \underline{y}_o & A_y & B_y \\ \underline{z}_o & A_z & B_z \end{pmatrix}$$

Passando ai determinanti, ricordando che il determinante di un prodotto è pari al prodotto dei determinanti, si ha:

$$\begin{vmatrix} \underline{q}_{1o} & A_1 & B_1 \\ \underline{q}_{2o} & A_2 & B_2 \\ \underline{q}_{3o} & A_3 & B_3 \end{vmatrix} = \det[M] \begin{vmatrix} \underline{x}_o & A_x & B_x \\ \underline{y}_o & A_y & B_y \\ \underline{z}_o & A_z & B_z \end{vmatrix} = \det[M] \begin{vmatrix} \underline{x}_o & \underline{y}_o & \underline{z}_o \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Per quanto riguarda il determinante di $[M]$, si osservi che dalla proprietà $[M]^T = [M]^{-1}$ segue che $\det[M]^T = \det[M]^{-1}$, ove però $\det[M]^T = \det[M]$, mentre $\det[M]^{-1} = 1/\det[M]$, essendo il determinante dell'inversa pari all'inverso del determinante. Risulta quindi che deve essere:

$$\det[M] = \frac{1}{\det[M]} \implies \left\{ \det[M] \right\}^2 = 1 \implies \det[M] = \pm 1.$$

Ricordando però la relazione di trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{1o} \\ \underline{q}_{2o} \\ \underline{q}_{3o} \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix}$$

si ha che le righe di $[M]$ non sono altro che le componenti cartesiane di $\underline{q}_{1o}$, $\underline{q}_{2o}$ e $\underline{q}_{3o}$ rispettivamente. Pertanto il determinante di $[M]$ non è altro che il prodotto misto $\underline{q}_{1o} \cdot \underline{q}_{2o} \times \underline{q}_{3o}$. Se allora la terna $\underline{q}_{1o}$, $\underline{q}_{2o}$, $\underline{q}_{3o}$ è destra (come si è ipotizzato) si ha $\det[M] = +1$, e segue l'invarianza della regola del prodotto vettoriale.

Dalle considerazioni precedenti segue infine anche la validità generale della regola del prodotto misto:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \times \underline{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

17.3 Operatori differenziali in coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche

Mediante alcune manipolazioni si può ottenere l'espressione in coordinate cilindriche:

$$\nabla^2 \underline{A} = \underline{\varrho}_o \left(\nabla^2 A_\varrho - \frac{A_\varrho}{\varrho^2} - \frac{2}{\varrho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \underline{\varphi}_o \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{\varrho^2} + \frac{2}{\varrho^2} \frac{\partial A_\varrho}{\partial \varphi} \right) + \underline{z}_o (\nabla^2 A_z)$$

Si noti come le componenti del laplaciano di un vettore non coincidano in generale con i laplaciani delle componenti, come avviene in coordinate cartesiane, per cui bisogna prestare attenzione quando si proietta un'equazione in cui compaia $\nabla^2 \underline{A}$ (ad esempio l'equazione di Helmholtz) in coordinate generiche.

In coordinate sferiche si ottiene l'espressione:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{A} = & \underline{r}_o \left(\nabla^2 A_r - \frac{2 A_r}{r^2} - \frac{2 A_\theta}{r^2 \tan \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \underline{\theta}_o \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \underline{\varphi}_o \left(\nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{(r \sin \theta)^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

Come è noto, i versori in coordinate cartesiane sono delle costanti, per cui:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{x}_o &= \nabla \cdot \underline{y}_o = \nabla \cdot \underline{z}_o = 0 \\ \nabla \times \underline{x}_o &= \nabla \times \underline{y}_o = \nabla \times \underline{z}_o = 0 \\ \nabla^2 \underline{x}_o &= \nabla^2 \underline{y}_o = \nabla^2 \underline{z}_o = 0 \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\nabla x = \underline{x}_o \quad \nabla y = \underline{y}_o \quad \nabla z = \underline{z}_o$$

Con queste formule si può verificare la relazione di trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{y}_o \\ \underline{z}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1o} \\ q_{2o} \\ q_{3o} \end{pmatrix} = [M]^T \begin{pmatrix} q_{1o} \\ q_{2o} \\ q_{3o} \end{pmatrix} =$$

Infatti per ottenere $\underline{x}_o$, $\underline{y}_o$ e $\underline{z}_o$ non si fa altro che sfruttare le espressioni di ∇x , ∇y , e ∇z in coordinate generiche.

Si ha inoltre:

$$\begin{aligned}\nabla^2 x &= \nabla^2 y = \nabla^2 z = 0 \\ \nabla \cdot \underline{r} &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \\ \nabla \times \underline{r} &= \begin{vmatrix} \underline{x}_o & \underline{y}_o & \underline{z}_o \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \underline{x}_o \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \underline{y}_o \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \underline{z}_o \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0\end{aligned}$$

Queste due formule si potevano vedere in coordinate sferiche, per cui ad esempio:

$$\nabla \cdot \underline{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = \frac{1}{r^2} 3r^2 = 3$$

In coordinate sferiche si vede anche la $\nabla \times \underline{r}_o = 0$

$$\begin{aligned}\nabla r &= \underline{x}_o \frac{\partial r}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial r}{\partial y} + \underline{z}_o \frac{\partial r}{\partial z} = \\ &= \underline{x}_o \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \underline{y}_o \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \underline{z}_o \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\underline{x}_o x + \underline{y}_o y + \underline{z}_o z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \frac{\underline{r}}{r} = \underline{r}_o\end{aligned}$$

(più semplicemente si poteva vedere in coordinate sferiche). Ragionando in coordinate sferiche si possono poi dimostrare altre relazioni:

$$\nabla^2 r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{1}{r^2} 2r = \frac{2}{r}$$

oppure anche:

$$\nabla^2 r = \nabla \cdot \nabla r = \nabla \cdot \underline{r}_o = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{2}{r}$$

Si ha poi:

$$\nabla^2 \underline{r} = \underline{r}_o \left(\nabla^2 r - \frac{2r}{r^2} \right) = \underline{r}_o \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r} \right) = 0$$

mentre invece:

$$\nabla^2 \underline{r}_o = \underline{r}_o \left(-\frac{2}{r^2} \right) \neq 0$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\nabla r^n &= \underline{r}_o \frac{\partial(r^n)}{\partial r} = n r^{n-1} \underline{r}_o = n r^{n-1} \nabla r \\ \nabla \left(\frac{1}{r} \right) &= \underline{r}_o \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\underline{r}_o \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r^2} \nabla r\end{aligned}$$

Queste ultime due formule sono dei casi particolari di una proprietà più generale del gradiente di funzioni composte:

$$\nabla \left\{ f[\xi(q_1, q_2, q_3)] \right\} = \frac{df}{d\xi} \nabla \xi$$

Ad esempio, per mezzi non omogenei:

$$\nabla(\ln \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon$$

Una proprietà analoga vale per la divergenza:

$$\nabla \cdot \left\{ \underline{A}[\xi(q_1, q_2, q_3)] \right\} = \frac{d\underline{A}}{d\xi} \cdot \nabla \xi$$

Si ha invece per il rotore:

$$\nabla \times \left\{ \underline{A}[\xi(q_1, q_2, q_3)] \right\} = \nabla \xi \times \frac{d\underline{A}}{d\xi}$$

(in questo caso è importante l'ordine dei fattori).

Tali proprietà sono facilmente dimostrabili in coordinate cartesiane. Si ha poi (coordinate sferiche):

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r^2} r^2 \right) = 0 \quad (\text{per } r \neq 0)$$

Quest'ultima formula si può scrivere in modo più completo facendo uso della funzione (o meglio distribuzione) di Dirac tridimensionale (in coordinate cartesiane):

$$\delta(\underline{r}) = \delta(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

detta anche impulso matematico. La relazione cercata è:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\underline{r})$$

Si può verificare infatti che, preso un volume sferico V centrato nell'origine e di raggio a , si ha:

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = -4\pi$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
 \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV &= \int_V \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dV = \quad (\text{applicando il teorema della divergenza}) \\
 &= \oint_S \underline{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS = \quad (\text{derivata secondo una direzione}) \\
 &= \oint_S \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \quad (\text{coincidendo la direzione normale con quella radiale}) \\
 &= \oint_S -\frac{1}{r^2} dS = -\frac{1}{a^2} \oint_S dS = \quad (\text{essendo } r \text{ costante sulla sfera e pari ad } a) \\
 &= -\frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = -4\pi
 \end{aligned}$$

Più in generale si ha la formula:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Si è visto che in coordinate generiche i versori non sono in generale delle costanti (per cui le loro derivate non sono in generale nulle). Per individuare un vettore è necessario quindi precisarne anche il punto di applicazione, e si hanno due terne di numeri: le coordinate del punto di applicazione e le componenti del vettore.

Ulteriori relazioni in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{\theta}_o &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \cos \theta = \frac{1}{r \tan \theta} \\
 \nabla \times \underline{\theta}_o &= \underline{\varphi}_o \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r) = \underline{\varphi}_o \frac{1}{r} \\
 \nabla \theta &= \underline{\theta}_o \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

Relazioni in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{\varrho}_o &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho) = \frac{1}{\varrho} \\
 \nabla \times \underline{\varrho}_o &= 0 \\
 \nabla^2 \underline{\varrho}_o &= \underline{\varrho}_o \left(-\frac{1}{\varrho^2} \right) \\
 \nabla \varrho &= \underline{\varrho}_o \\
 \nabla \cdot \underline{\varphi}_o &= 0 \\
 \nabla \times \underline{\varphi}_o &= \underline{z}_o \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varrho} = \underline{z}_o \frac{1}{\varrho} \\
 \nabla \varphi &= \underline{\varphi}_o \frac{1}{\varrho}
 \end{aligned}$$

Capitolo 18

Equazione di Poisson

Si ricordi (Fisica II) l'equazione di Poisson per l'elettrostatica (equazione scalare):

$$\nabla^2 V = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \quad (\text{mezzo omogeneo ed } \underline{E} = -\nabla V)$$

ove ϱ è la densità delle cariche libere, non di quelle di polarizzazione nei dielettrici.

Si noti per inciso che nel caso di mezzi non omogenei, i fenomeni elettrostatici sono regolati da un'equazione diversa da quella di Poisson. Infatti dall'equazione generale

$$\nabla \cdot \underline{D} = \varrho$$

ossia, per mezzi isotropi

$$\nabla \cdot (\varepsilon \underline{E}) = \varrho$$

e ricordando l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \underline{E}) = \nabla \varepsilon \cdot \underline{E} + \varepsilon \nabla \cdot \underline{E}$$

segue:

$$-\nabla \varepsilon \cdot \nabla V - \varepsilon \nabla \cdot \nabla V = \varrho$$

ossia, dividendo per ε :

$$\nabla^2 V + \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla V = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

oppure:

$$\nabla^2 V + \nabla (\ln \varepsilon) \cdot \nabla V = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

Per la magnetostatica si ha invece l'equazione di Poisson vettoriale:

$$\nabla^2 \underline{A} = -\underline{J} \quad (\text{mezzo omogeneo, } \nabla \cdot \underline{A} = 0 \text{ e } \underline{H} = \nabla \times \underline{A})$$

ove $\underline{J}$ è la densità delle correnti libere, non di quelle di magnetizzazione presenti nei materiali magnetici.

È noto (dal corso di Fisica II) che l'equazione scalare ammette una soluzione del tipo:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{\varrho(\underline{r}')}{\varepsilon} d\tau'$$

essendo τ il volume occupato dalla distribuzione di carica ϱ , $\underline{r}'$ il vettore posizione del generico punto P' in tale volume (punto di sorgente), $\underline{r}$ il vettore posizione del punto P dello spazio in cui si calcola il potenziale V (punto di osservazione).

Il fatto che l'espressione vista rappresenti una soluzione dell'equazione di Poisson può essere direttamente verificato. Si ha infatti:

$$\nabla^2 V = \nabla^2 \int_{\tau} \frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{\varrho(\underline{r}')}{\varepsilon} d\tau' = \int_{\tau} \frac{\varrho(\underline{r}')}{4\pi\varepsilon} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) d\tau'$$

ove l'operatore di Laplace, che opera su $\underline{r}$, è stato portato dentro l'integrale, che è rispetto a $\underline{r}'$.

Si ricordi inoltre che è:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

per cui

$$\nabla^2 V = \int_{\tau} -\frac{\varrho(\underline{r}')}{\varepsilon} \delta(\underline{r} - \underline{r}') d\tau' = \begin{cases} -\varrho(\underline{r})/\varepsilon & \text{se } \underline{r} \in \tau \\ 0 & \text{se } \underline{r} \notin \tau \end{cases}$$

per cui se il volume τ è quello nel quale ϱ è diversa da zero (come si è assunto) l'integrale considerato è soluzione $\forall \underline{r}$. Nel caso invece in cui τ fosse un sottoinsieme del dominio D ove $\varrho \neq 0$, la soluzione non sarebbe valida nell'insieme $D - \tau$.

Si noti come la soluzione che si sta considerando abbia la forma di un integrale di convoluzione spaziale, ove la funzione $1/(4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|)$ gioca il ruolo di risposta impulsiva spaziale. In elettromagnetismo si parla più spesso di “funzione di Green”, in questo caso per l'equazione di Poisson e per lo spazio libero. Infatti tale soluzione è utile nel caso in cui la distribuzione di carica ϱ sia immersa in uno spazio senza superfici di contorno (spazio libero), riempito di un dielettrico omogeneo di costante dielettrica ε , ed in cui si voglia conoscere la distribuzione del potenziale elettrostatico.

Nel caso in cui fossero presenti delle superfici di contorno, come si vedrà, all'integrale di volume andrebbe aggiunto un integrale di superficie, in cui intervengano le condizioni al contorno.

Inoltre tale soluzione è utile nell'ipotesi che la distribuzione di carica ϱ sia spazialmente limitata, ossia tutte le cariche si trovino a distanza finita dall'origine. In questo caso è naturale assumere come condizione al contorno (all'infinito) per il potenziale la seguente:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\underline{r}) r = l < \infty$$

Questa condizione ha il significato che al crescere di r la funzione V debba andare a zero almeno come $1/r$. La soluzione considerata soddisfa evidentemente tale condizione, visto il tipo di dipendenza da $\underline{r}$.

Si può vedere inoltre che essa è l'unica che soddisfi una tale condizione al contorno. Infatti si ricordi che una qualsiasi soluzione dell'equazione di Poisson può essere espressa mediante la sovrapposizione di una (arbitraria) soluzione di essa (ad esempio quella considerata) ed un'opportuna soluzione dell'equazione omogenea corrispondente (nel nostro caso l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$).

Per avere un'altra soluzione, diversa da quella considerata, ma che soddisfi anch'essa la condizione al contorno all'infinito, si dovrebbe aggiungere alla nostra soluzione una soluzione dell'equazione di Laplace che soddisfi anch'essa tale condizione. Pertanto una tale soluzione dell'equazione di Laplace dovrebbe andare a zero all'infinito.

Pertanto si può dimostrare che ogni soluzione dell'equazione di Laplace non possiede punti di massimo o di minimo nei punti interni del dominio di interesse. Per cui se all'infinito (ossia sulla frontiera) vale zero, essa dev'essere identicamente nulla, e pertanto la soluzione dell'equazione di Poisson che soddisfi la predetta condizione al contorno è unica.

Il fatto che una soluzione dell'equazione di Laplace non possieda punti di massimo o di minimo (nei punti interni) può essere visto nel modo seguente. Supponendo ad esempio che vi sia un punto P di minimo per la funzione V , si potrà individuare una (piccola) superficie chiusa S che contenga P , per tutti i punti della quale la derivata normale (esterna) di V sia (strettamente) positiva, essendo la funzione crescente intorno al minimo. Sarà dunque:

$$\oint_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = \oint_S \underline{n} \cdot \nabla V dS > 0$$

Ma applicando il teorema della divergenza si ha:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \nabla V dS = \int_\tau \nabla \cdot \nabla V d\tau = \int_\tau \nabla^2 V d\tau > 0$$

conclusione assurda, essendo per ipotesi $\nabla^2 V = 0$ in tutto il volume τ racchiuso dalla superficie S .

Per quanto riguarda il caso magnetostatico, proiettando l'equazione per $\underline{A}$ sui tre assi cartesiani si ottengono tre equazioni di Poisson scalari per le tre componenti di $\underline{A}$.

Ad esempio per A_x si ha:

$$A_x(\underline{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} J_x(\underline{r}') d\tau'$$

Moltiplicando le tre componenti per i versori cartesiani corrispondenti (che essendo costanti si possono introdurre nell'integrale) e sommando si ha:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_\tau \frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{J}(\underline{r}') d\tau'$$

Per tale formula si possono ripetere le stesse osservazioni fatte a proposito del potenziale scalare elettrostatico V . La condizione al contorno all'infinito sarà:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \underline{A}(\underline{r}) = \underline{l} \quad \text{con } |\underline{l}| < \infty$$

Si esamini ora il problema dell'equazione di Poisson in presenza di contorni, ossia all'interno di un certo volume τ racchiuso da una superficie chiusa S .

Si consideri allo scopo il lemma di Green nella sua seconda forma:

$$\int_{\tau} \left(\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi \right) d\tau = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

Si applichi tale teorema per la funzione:

$$\varphi = G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|}$$

cioè per la funzione di Green (per l'equazione di Poisson) per lo spazio libero. Si era visto che:

$$\nabla^2 G = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

da cui si osserva come la funzione di Green sia proprio la risposta (cioè il potenziale scalare V) ad una eccitazione (la funzione ϱ/ε) di tipo impulso matematico.

Si prenda inoltre: $\psi = V$. Applicando il lemma si ha:

$$\int_{\tau} \left(G \nabla^2 V - V \nabla^2 G \right) d\tau = \oint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

per cui il primo membro diventa:

$$\int_{\tau} \left[-G \frac{\varrho}{\varepsilon} + V \delta(\underline{r} - \underline{r}') \right] d\tau = - \int_{\tau} G \frac{\varrho}{\varepsilon} d\tau + V(\underline{r}')$$

avendo supposto $\underline{r}' \in \tau$. Si ha quindi:

$$V(\underline{r}') = \int_{\tau} G \frac{\varrho}{\varepsilon} d\tau + \oint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

Invertendo i ruoli delle variabili $\underline{r}$ ed $\underline{r}'$ ed osservando che $G(\underline{r}', \underline{r}) = G(\underline{r}, \underline{r}')$ si ha:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} G(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\varrho(\underline{r}')}{\varepsilon} d\tau' + \oint_S \left[G(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial V}{\partial n} - V(\underline{r}') \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS'$$

se $\underline{r} \in \tau$. Se invece $\underline{r}$ è esterno al volume τ considerato occorre porre zero a primo membro della formula precedente.

Su questa espressione si possono fare alcune osservazioni. Se la superficie S viene portata all'infinito e si suppone che il potenziale V su di essa decresca come $1/r$, l'integrale di superficie va a zero. Ciò può vedersi in modo semplice se si considera una sfera con centro nell'origine (per cui la derivata normale coincide con quella radiale) e di raggio crescente, e si ricorda che G va a zero come $1/r$ e che il dS è proporzionale a r^2 . Si ritorna quindi alla soluzione per lo spazio libero.

Si osservi inoltre che nell'integrale superficiale compaiono le cosiddette *condizioni al contorno di Cauchy*, che richiedono la conoscenza sul contorno sia del potenziale che della sua derivata normale. Se si richiede la conoscenza del solo potenziale sul contorno si parla di *condizioni di Dirichlet*; se si richiede la sola derivata normale si parla di *condizioni di Neumann*.

Ora, si può vedere che ciascuna delle due ultime condizioni è sufficiente da sola a determinare univocamente la soluzione dell'equazione di Poisson. Pertanto le condizioni di Cauchy sono sovrabbondanti, e non conducono in generale a nessuna soluzione, a meno che i valori del potenziale e della derivata normale non siano scelti accuratamente, ossia non siano più indipendenti. Dunque la formula precedente non va vista come la soluzione dell'equazione di Poisson che soddisfa certe condizioni al contorno (di Cauchy) assegnate, ma è in realtà essa stessa un'equazione (integrale, cioè nella quale la funzione incognita compare sotto il segno di integrale) cui deve soddisfare la funzione $V(r)$, soluzione dell'equazione di Poisson all'interno del volume τ .

Il fatto che assegnando condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann sulla superficie chiusa S la soluzione sia determinata univocamente può esser visto per assurdo, supponendo che esistano due soluzioni diverse V_1 e V_2 (che soddisfino alle stesse condizioni al contorno) e considerandone la differenza $V_o = V_2 - V_1$. Si avrà che V_o è soluzione dell'equazione di Laplace, soddisfacente le condizioni $V_o = 0$, oppure $\partial V_o / \partial n = 0$, su S nei due casi rispettivamente.

Si consideri ora il lemma di Green nella sua prima forma:

$$\int_{\tau} (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi) d\tau = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

ove si ponga $\varphi = \psi = V_o$. Ne segue:

$$\int_{\tau} (\nabla V_o \cdot \nabla V_o + V_o \nabla^2 V_o) d\tau = \oint_S V_o \frac{\partial V_o}{\partial n} dS = 0$$

per le condizioni al contorno in entrambi i casi. Si ha inoltre $\nabla^2 V_o = 0$. Ne segue:

$$\int_{\tau} |\nabla V_o|^2 d\tau = 0$$

da cui $\nabla V_o \equiv 0$ in τ , ossia V_o è costante in τ .

Nel caso del problema di Dirichlet si ha allora $V_o = 0$ in τ e l'unicità è dimostrata, mentre nel caso di Neumann l'unicità è dimostrata a meno di una costante additiva arbitraria, che

peraltro non è importante, essendo il potenziale sempre definito a meno di una costante arbitraria, che non altera il valore del campo elettrico.

Si ha inoltre l'unicità anche per condizioni al contorno miste, in cui sia assegnato il potenziale su una parte di S , e la sua derivata normale sulla parte restante. Calcolando invece $V(\underline{r})$ mediante condizioni di Cauchy assegnate e la formula vista, si ottengono in generale valori al contorno diversi da quelli assegnati.

Si noti infine che la formula vista poteva essere ricavata non soltanto per la funzione $1/(4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|)$, ma per qualsiasi funzione $G(\underline{r}, \underline{r}')$ soddisfacente la $\nabla^2 G = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$, e che si può ottenere dalla precedente aggiungendo un'arbitraria soluzione dell'equazione di Laplace in τ . Si può sfruttare tale arbitrarietà per eliminare nella formula vista l'uno o l'altro degli integrali di superficie ed ottenere così soluzioni formali dell'equazione di Poisson per condizioni di Dirichlet o di Neumann.

Si può ad esempio scegliere una funzione di Green $G_D(\underline{r}, \underline{r}')$ tale che $G_D(\underline{r}, \underline{r}') = 0$ per $\underline{r}' \in S$, e allora segue che:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} G_D(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\varrho(\underline{r}')}{\varepsilon} d\tau' - \oint_S V(\underline{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n} dS'$$

e questa è ora effettivamente l'espressione per la soluzione (unica) dell'equazione di Poisson per assegnate condizioni al contorno di Dirichlet per la funzione V .

Analogamente si può scegliere una funzione di Green $G_N(\underline{r}, \underline{r}')$ tale che $\partial G_N / \partial n = 0$ per $\underline{r}' \in S$, e allora:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} G_N(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\varrho(\underline{r}')}{\varepsilon} d\tau' + \oint_S G_N(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial V}{\partial n} dS'$$

ottenendo l'espressione per la soluzione (unica) dell'equazione di Poisson per assegnate condizioni al contorno di Neumann per la funzione V .

Si noti tuttavia che tali soluzioni sono per lo più formali, perché la determinazione effettiva di queste nuove funzioni di Green presenta spesso difficoltà notevoli.

Capitolo 19

Teorema di Helmholtz

Il teorema di Helmholtz è generalmente noto sotto forma di due enunciati:

1. un campo vettoriale $\underline{A}$ è completamente determinato assegnandone la divergenza ed il rotore;
2. ogni campo vettoriale $\underline{A}$ è scomponibile univocamente nella somma di una parte irrotazionale (a rotore nullo) ed una parte solenoidale (a divergenza nulla). In particolare si tratta rispettivamente di un gradiente e di un rotore.

Per dimostrare la prima parte si consideri l'identità vettoriale:

$$\nabla^2 \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = -(-\nabla \nabla \cdot \underline{A} + \nabla \times \nabla \times \underline{A})$$

Se la divergenza ed il rotore di $\underline{A}$ sono noti, tale relazione diventa un'equazione di Poisson vettoriale, che ammette nelle ipotesi viste la soluzione unica:

$$\underline{A}(\underline{r}) = - \int_{\tau} \frac{\nabla' \nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' + \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

ove gli operatori sono stati contrassegnati con un apice per indicare che operano su $\underline{r}'$ e non su $\underline{r}$.

Si noti tuttavia per inciso che assegnare divergenza e rotore determina la funzione $\underline{A}$ quasi completamente, cioè a meno del gradiente di una funzione scalare f che soddisfi l'equazione di Laplace $\nabla^2 f = 0$. Infatti il vettore $\underline{B} = \underline{A} + \nabla f$ è tale che $\nabla \times \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$, essendo $\nabla \times \nabla f = 0$ sempre. Ed inoltre $\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot \underline{A}$, essendo $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = 0$ per l'ipotesi che f soddisfi l'equazione di Laplace.

Il secondo enunciato del teorema equivale a dire che per qualsiasi $\underline{A}$ si può scrivere:

$$\underline{A} = \underline{A}_i + \underline{A}_s \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nabla \times \underline{A}_i = 0 & \implies \nabla \times \underline{A} = \nabla \times \underline{A}_s \\ \nabla \cdot \underline{A}_s = 0 & \implies \nabla \cdot \underline{A} = \nabla \cdot \underline{A}_i \end{cases}$$

Supponendo noto $\underline{A}$, sono noti anche $\nabla \times \underline{A}$ e $\nabla \cdot \underline{A}$, per cui $\nabla \times \underline{A}_s$ è assegnato (come pure $\nabla \cdot \underline{A}_s = 0$ per ipotesi), e così anche $\nabla \cdot \underline{A}_i$ (come pure $\nabla \times \underline{A}_i = 0$ per ipotesi). Quindi, per

la prima parte del teorema, $\underline{A}_i$ e $\underline{A}_s$ risultano determinati. Se ne vogliono ora trovare le espressioni esplicite.

Se il dominio considerato è a connessione lineare semplice, sarà:

$$\underline{A}_i = -\nabla\varphi \implies \nabla \cdot \underline{A}_i = -\nabla \cdot \nabla\varphi = -\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \underline{A}$$

e quindi $\nabla^2\varphi = -\nabla \cdot \underline{A}$, equazione di Poisson scalare, che ha la soluzione:

$$\varphi(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

da cui:

$$\underline{A}_i(\underline{r}) = -\nabla \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

Se poi il dominio è a connessione superficiale semplice (ad esempio l'intero spazio), si ha: $\underline{A}_s = \nabla \times \underline{F}$.

Il vettore $\underline{F}$ è completamente determinato assegnandone rotore e divergenza. Qui interessa solo il rotore, che deve essere $\underline{A}_s$; la divergenza rimane arbitraria, e la si può prendere nulla. Per cui:

$$\nabla \times \underline{A}_s = \nabla \times (\nabla \times \underline{F}) = \nabla \nabla \cdot \underline{F} - \nabla^2 \underline{F} = -\nabla^2 \underline{F} = \nabla \times \underline{A}$$

e quindi si ha l'equazione di Poisson vettoriale $\nabla^2 \underline{F} = -\nabla \times \underline{A}$, che ha la soluzione:

$$\underline{F}(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

per cui (e la seconda parte risulta così dimostrata):

$$\underline{A}_s(\underline{r}) = \nabla \times \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

Da quanto precede si ricava l'espressione per $\underline{A}$:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_i(\underline{r}) + \underline{A}_s(\underline{r}) = -\nabla \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' + \nabla \times \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

Si noti che la parte irrotazionale è un gradiente che dipende solo dalla divergenza di $\underline{A}$, mentre la parte solenoidale è un rotore che dipende solo dal rotore di $\underline{A}$.

Si noti infine la somiglianza tra questa formula e quella stabilita in precedenza: con le ipotesi supplementari di connessione del dominio è stato possibile portare fuori (per così dire) dall'integrale il gradiente ed il rotore, rendendo più agevole la determinazione di $\underline{A}$ a partire dalla sua divergenza e dal suo rotore.

Può essere inoltre derivata una formula più generale, valida per una arbitraria funzione vettoriale $\underline{A}$ (purché ovviamente derivabile), all'interno di un volume arbitrario τ delimitato da una superficie chiusa S . La relazione è:

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{r}) = & -\nabla \left(\int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' - \oint_S \frac{\underline{n} \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} dS' \right) + \\ & + \nabla \times \left(\int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' - \oint_S \frac{\underline{n} \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} dS' \right) \end{aligned}$$

In questa espressione intervengono i valori sul contorno S . Da essa si vede fra l'altro che la condizione $\nabla \cdot \underline{A} = 0$ nel volume considerato non è sufficiente da sola per poter esprimere $\underline{A}$ come un rotore di una certa funzione vettoriale. Se però a tale condizione si aggiunge (ad esempio) la condizione al contorno $\underline{n} \cdot \underline{A} = 0$ sulla superficie, ciò è sufficiente. In modo analogo, la condizione $\nabla \times \underline{A} = 0$ nel volume non è sufficiente da sola per poter esprimere $\underline{A}$ come il gradiente di una certa funzione scalare. Lo diventa se si aggiunge (ad esempio) la condizione $\underline{n} \times \underline{A} = 0$ al contorno.

Capitolo 20

Applicazione del teorema di Poynting ad un cavo coassiale in continua

Si consideri una struttura coassiale (di raggi r_1 e r_2) con pareti perfettamente conduttrici e che racchiuda un dielettrico perfetto, omogeneo, isotropo e non dispersivo.

Tra i due conduttori sia mantenuta una differenza di potenziale costante nel tempo V_0 ed il cavo sia chiuso su una resistenza R . Nei conduttori scorrerà allora una corrente costante nel tempo $I_0 = V_0/R$.

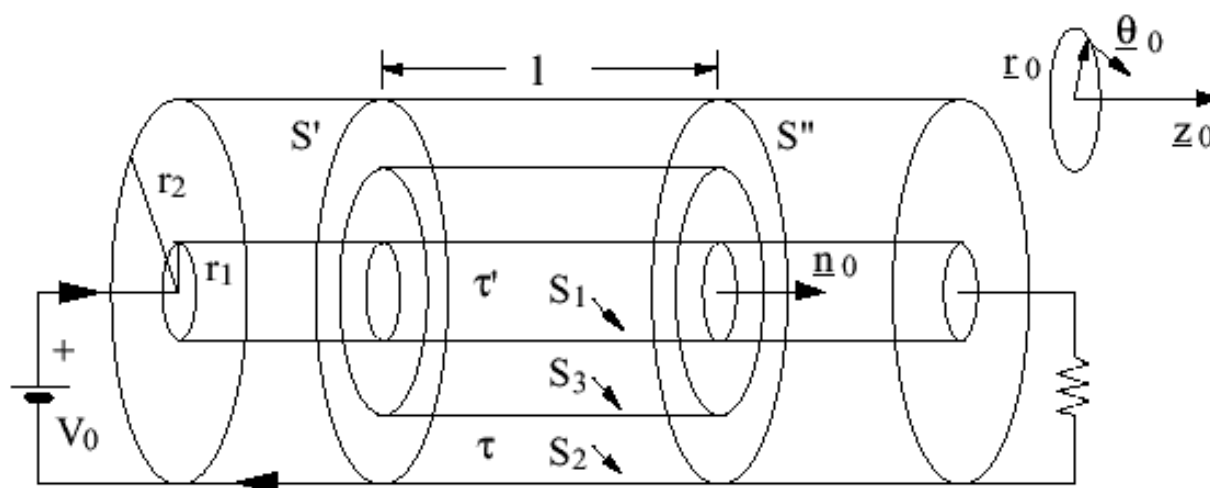


Figura 20.1:

Come è noto, per ragioni di simmetria, il campo elettrico risulta puramente radiale e dipendente solo dalla coordinata radiale:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

essendo λ la carica per unità di lunghezza, avendo supposto la distribuzione di carica indipendente da z (λ costante) e giacente ovviamente, trattandosi di conduttore perfetto, sulla superficie del cilindro.

Lo stesso risultato poteva ottenersi facendo uso della funzione di Dirac per esprimere la densità di carica ϱ , diversa da zero solo per $r = r_1$, e ponendo:

$$\varrho = \sigma \delta(r - r_1) = \left(\frac{\lambda}{2\pi r_1} \right) \delta(r - r_1)$$

essendo ora σ la densità superficiale di carica (carica per unità di superficie, ove $2\pi r_1$ è la superficie di un tratto di lunghezza unitaria, dotato della carica λ). Si ricordi che la δ ha le dimensioni fisiche dell'inverso di un volume nello spazio in cui opera: in questo caso, essendo uno spazio unidimensionale, l'inverso di una lunghezza.

Si ha allora:

$$\int_{\tau'} \varrho d\tau' = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r'} \frac{\lambda}{2\pi r_1} \delta(r - r_1) r dr d\theta dz$$

essendo $d\tau' = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 = r dr d\theta dz$.

Per cui:

$$\int_{\tau'} \varrho d\tau' = l 2\pi \frac{\lambda}{2\pi r_1} \int_0^{r'} \delta(r - r_1) r dr = \lambda l$$

essendo $r' > r_1$.

Si noti che l'espressione precedente di E_r è valida anche, per come è stata ottenuta, se il conduttore esterno non c'è. Si tratta inoltre di un'espressione indipendente dal valore di r_1 (con r ovviamente maggiore di r_1), per cui vale anche nel caso di un filo. Tale espressione non è altro che il campo elettrostatico generato da un cilindro carico perfettamente conduttore, di lunghezza infinita. Si noti infatti che si è supposto implicitamente che il volume τ non risenta degli effetti dei bordi dovuti alla necessaria finitezza della struttura, e che quindi il cavo coassiale sia di lunghezza virtualmente infinita (ed allora sono applicabili le considerazioni di simmetria).

Risulta poi:

$$\lambda = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} V_o = C V_o$$

essendo C una capacità per unità di lunghezza.

L'espressione di C è la stessa che per un condensatore cilindrico (anche qui trascurando gli effetti ai bordi, ossia lunghezza grande rispetto ai raggi e differenza tra i raggi piccola rispetto ai raggi stessi). Anche l'espressione del campo è la stessa:

$$E_r = \frac{V_o}{r \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

Il caso del condensatore cilindrico si ottiene ponendo un circuito aperto al posto della resistenza. In tal caso non scorre corrente e si è in presenza del solo campo elettrico.

Per quanto riguarda ora il campo magnetico, si può dedurre, sempre per simmetria, che sarà puramente circonferenziale, ossia $\underline{H} = H_\theta \underline{\theta}_o$, con $H_\theta = I_o/(2\pi r)$. Il risultato è indipendente da r_1 , quindi valido anche nel caso di un filo.

Si noti che questa espressione sarebbe la stessa se il conduttore esterno non ci fosse (campo magnetico generato da un filo infinito, legge di Biot e Savart). Si suppone ancora che la distanza dall'asse sia piccola rispetto alla lunghezza del conduttore (e che ci si ponga al centro). Il caso del filo indefinito corrisponderebbe a porre un corto circuito al posto della resistenza (differenza di potenziale nulla e quindi presenza del solo campo magnetico). Nella realtà poi il generatore avrà una resistenza interna che limita la corrente.

Nella nostra situazione sono presenti sia il campo elettrico che quello magnetico, ma trattandosi di un problema statico i due campi sono indipendenti (ecco perché vale la sovrapposizione degli effetti).

$$\int_{S''} \underline{n}_o \cdot \underline{P} dS'' = \int_{S''} \underline{n}_o \cdot \underline{r}_o \times \underline{\theta}_o \frac{V_o}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \frac{I_o}{2\pi r} dS'' = \frac{V_o I_o}{2\pi \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \int_{S''} \frac{1}{r^2} dS'' =$$

(essendo $dS'' = h_1 h_2 dq_1 dq_2 = r dr d\theta$)

$$\begin{aligned} &= \frac{V_o I_o}{2\pi \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} r dr d\theta = \\ &= \frac{V_o I_o}{2\pi \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} 2\pi \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = V_o I_o \end{aligned}$$

Ovviamente nel caso di guide dielettriche (ad esempio fibre ottiche) si ha invece che il campo all'interno non è nullo, anzi si concentra prevalentemente nel dielettrico, mentre all'esterno decade in modo simile ad un'esponenziale (funzione di Hankel di seconda specie).

Da notare infine che le espressioni ottenute per $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ coincidono con quelle del modo TEM a frequenza nulla (e quindi indipendenza da z).

Capitolo 21

Vettori complessi

Nel caso di vettori complessi (ossia vettori che hanno come componenti numeri complessi) i prodotti scalare e vettoriale sono eseguiti con le regole consuete. In particolare si ricordi che dalla $\underline{A} = \underline{B} \times \underline{C}$ segue sempre, anche per vettori complessi, che $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ e $\underline{A} \cdot \underline{C} = 0$.

Occorre invece mutare in questo caso la definizione di modulo. Si pone:

$$|\underline{A}| = \sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}^*} = \sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2} = \sqrt{|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2}$$

essendo $\underline{A}^*$ il vettore coniugato, che ha come componenti le coniugate delle componenti di $\underline{A}$.

Con questa definizione il modulo risulta, come deve essere, reale e positivo. Inoltre, se c è una costante complessa, dalla $\underline{A} = c \underline{B}$ segue $|\underline{A}| = |c| |\underline{B}|$, ossia il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli.

Dal momento che un vettore complesso non è più disegnabile in uno spazio tridimensionale, la nozione di modulo nel caso complesso perde il significato geometrico di lunghezza del vettore, che aveva nel caso reale.

In senso algebrico, tuttavia, con l'introduzione del concetto di modulo diventa possibile definire la distanza fra due vettori complessi, come il modulo della loro differenza.

Si ricordi poi che se il prodotto scalare fra due vettori complessi è nullo, non è affatto vero in generale che i vettori parte reale e parte immaginaria siano separatamente ortogonali fra loro.

Si noti che, da un punto di vista di algebra astratta, se si mantiene per il prodotto scalare la definizione abituale (come somma di prodotti di componenti omonime), lo spazio vettoriale dei vettori complessi sul campo dei numeri complessi non gode della proprietà di essere unitario (o di Hilbert), poiché tale proprietà richiedeva la:

$$\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \quad \text{e} \quad \underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{v} = 0$$

Tale condizione è invece verificata dal prodotto

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2^*$$

Può essere comunque utile, anche nel caso di vettori complessi, considerare la quantità:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

(nel caso di vettori reali essa è reale e coincide con il modulo). Tale quantità, tuttavia, risulterà ora in generale complessa, e potrà chiamarsi *ampiezza complessa*.

Si potrà allora scrivere, per un generico vettore complesso $\underline{A}$, come per i vettori reali (tranne il caso in cui tale ampiezza risulti nulla, caso che non implica in generale, come si vedrà in seguito per i vettori polarizzati circolarmente, la nullità del vettore, cioè delle tre componenti):

$$\underline{A} = A \underline{a}_o$$

essendo $\underline{a}_o = \underline{A}/A$ un vettore di ampiezza unitaria, ma non in generale di modulo unitario, che risulta essere una sorta di “pseudo-versore”. Si tratta però in generale di un vettore complesso, e quindi non indica più una direzione visualizzabile.

Un tale vettore risulta reale se e solo se $\underline{A}$ è polarizzato linearmente. Infatti in questo caso $\underline{A} = \underline{A}_R + j \underline{A}_j$, con $\underline{A}_R \parallel \underline{A}_j$, per cui $\underline{A}_R$ e $\underline{A}_j$ avranno lo stesso versore reale $\underline{a}_o$, ossia $\underline{A} = (A_R + j A_j) \underline{a}_o$. È inoltre vero anche il viceversa, come si vedrà.

Nel caso del prodotto $\underline{A} = c \underline{B}$, con $c \in \mathbb{C}$, si ha per le ampiezze:

$$A = c B$$

Tornando al prodotto vettoriale fra due vettori complessi $\underline{A}$ e $\underline{B}$, si supponga che sia $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$. In questo caso si può dimostrare che in generale $|\underline{A} \times \underline{B}| \neq |\underline{A}| |\underline{B}|$, mentre per il caso dei vettori reali valeva l'uguaglianza. Se si impone invece $\underline{A} \cdot \underline{B}^* = 0$, si ha effettivamente che $|\underline{A} \times \underline{B}| = |\underline{A}| |\underline{B}|$. Si noti che la condizione $\underline{A} \cdot \underline{B}^* = 0$ è equivalente alla $\underline{B} \cdot \underline{A}^* = 0$. Se si considerano in luogo dei moduli le ampiezze complesse, è di nuovo la condizione $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ che implica l'uguaglianza.

Le due condizioni $\underline{A} \cdot \underline{B}^* = 0$ e $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ non sono in generale equivalenti per vettori complessi. Lo sono se uno dei due vettori è reale, ma in realtà è sufficiente che uno dei due sia polarizzato linearmente. Infatti in tal caso il versore è reale, ed è esso ad entrare nel prodotto scalare.

Anche per i vettori complessi si parla per estensione di ortogonalità e parallelismo, in base ai prodotti scalare e vettoriale. Anche a queste nozioni non corrisponde tuttavia qualcosa di disegnabile, di visibile.

Si notino le relazioni fra vettori complessi nel dominio dei fasori ed i corrispondenti vettori nel dominio del tempo (indicati con la tilde):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{A} \cdot \underline{B}^*] &= \widetilde{\underline{A} \cdot \underline{B}}^t \\ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{A} \times \underline{B}^*] &= \widetilde{\underline{A} \times \underline{B}}^t \end{aligned}$$

Come si vede, quindi, la trasformazione che fa passare dai vettori nel dominio del tempo ai fasori non è un isomorfismo (perché non conserva i prodotti scalari). Ciò è legato al fatto che gli spazi vettoriali non sono unitari.

Si ricordi che le relazioni precedenti valgono ovviamente per i fasori, ma non per i vettori trasformati secondo Fourier. Infatti ad esempio si è visto che il teorema di Poynting complesso, come formulazione matematica, vale sia per i fasori, sia per i vettori trasformati secondo Fourier, poiché è una conseguenza delle equazioni di Maxwell, che hanno la stessa forma sia per i fasori, sia per i vettori trasformati. Invece l'interpretazione del teorema in termini di valori medi delle corrispondenti grandezze nel dominio del tempo vale solo nel caso dei fasori (regime sinusoidale).

Si noti infine che mentre i fasori hanno le stesse dimensioni fisiche dei corrispondenti vettori nel dominio del tempo, i vettori trasformati hanno le dimensioni dei vettori nel tempo divise per una frequenza (cioè moltiplicate per un tempo). Ad esempio il vettore trasformato di un campo elettrico si misura in V/(m Hz).

21.1 Polarizzazione dei vettori

Come si è detto, un vettore complesso non si può disegnare come i vettori reali, neanche se è polarizzato linearmente (se cioè ha versore reale), perché ha componenti complesse, che non sono associabili ai punti di una retta.

Si è visto che la condizione di polarizzazione lineare per un generico vettore complesso $\underline{A} = \underline{A}_R + j \underline{A}_j$ era:

$$\underline{A}_R \times \underline{A}_j = 0 \quad \text{ovvero} \quad \underline{A}_R \parallel \underline{A}_j$$

Tale condizione come si è dimostrato implica porre il vettore $\underline{A}$ come prodotto di un vettore reale per uno scalare complesso. D'altra parte se viceversa $\underline{A} = (a + j b) \underline{B}$, con $\underline{B}$ reale, si ha:

$$\underline{A}_R = a \underline{B}, \quad \underline{A}_j = b \underline{B} = (b/a) \underline{A}_R \implies \underline{A}_R \parallel \underline{A}_j$$

Nel caso particolare delle onde piane, si ha per il vettore complesso del campo elettrico:

$$\underline{E} = \underline{E}_o e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}}$$

ove la quantità $e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}}$ è uno scalare (complesso). Si potrà allora scrivere:

$$\underline{E} = \underline{E}_o (a + j b) = (\underline{E}_{oR} + j \underline{E}_{oJ})(a + j b)$$

Ora, il fatto di moltiplicare (o dividere) un vettore complesso per uno scalare complesso non ne modifica il tipo di polarizzazione, che è legata alla parte vettoriale. Ovviamente varierà l'ampiezza di oscillazione nel dominio del tempo.

Ad esempio, se $\underline{E}_o$ è polarizzato linearmente si ha $\underline{E}_{oR} \times \underline{E}_{oJ} = 0$, per cui:

$$\begin{aligned} \underline{E}_R \times \underline{E}_j &= (\underline{E}_{oR} a - \underline{E}_{oJ} b) \times (\underline{E}_{oR} b + \underline{E}_{oJ} a) = \underline{E}_{oR} \times \underline{E}_{oJ} a^2 - \underline{E}_{oJ} \times \underline{E}_{oR} b^2 = \\ &= \underline{E}_{oR} \times \underline{E}_{oJ} (a^2 + b^2) = 0 \end{aligned}$$

Ovviamente è vero il viceversa (essendo $a^2 + b^2 \neq 0$), potendosi del resto scrivere

$$\underline{E}_o = \underline{E} / (a + j b) = \underline{E} (c + j d)$$

In modo analogo, se $\underline{E}_{oR} \cdot \underline{E}_{oj} = 0$ e $|\underline{E}_{oR}| = |\underline{E}_{oj}|$, ossia polarizzazione circolare per $\underline{E}_o$, si ha:

$$\begin{aligned}\underline{E}_R \cdot \underline{E}_j &= (\underline{E}_{oR} a - \underline{E}_{oj} b) \cdot (\underline{E}_{oR} b + \underline{E}_{oj} a) = \underline{E}_{oR} \cdot \underline{E}_{oR} a b - \underline{E}_{oj} \cdot \underline{E}_{oj} b a = \\ &= (E_{oR}^2 - E_{oj}^2) a b = 0\end{aligned}$$

e, d'altra parte:

$$\begin{aligned}|\underline{E}_R| &= \sqrt{\underline{E}_R \cdot \underline{E}_R} = \sqrt{(\underline{E}_{oR} a - \underline{E}_{oj} b) \cdot (\underline{E}_{oR} a - \underline{E}_{oj} b)} = \sqrt{E_{oR}^2 a^2 + E_{oj}^2 b^2} = \\ &= E_{oR} \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

Mentre:

$$\begin{aligned}|\underline{E}_j| &= \sqrt{\underline{E}_j \cdot \underline{E}_j} = \sqrt{(\underline{E}_{oR} b + \underline{E}_{oj} a) \cdot (\underline{E}_{oR} b + \underline{E}_{oj} a)} = \sqrt{E_{oR}^2 b^2 + E_{oj}^2 a^2} = \\ &= E_{oR} \sqrt{a^2 + b^2} = |\underline{E}_R|\end{aligned}$$

Ovviamente è vero anche il viceversa.

Considerando ora un sistema di riferimento con il piano xy coincidente con il piano di polarizzazione, cioè con il piano individuato da $\underline{A}_R$ ed $\underline{A}_j$, si vedrà come le condizioni per i vari tipi di polarizzazione si traducono in termini delle componenti A_x e A_y .

Nel caso di polarizzazione lineare, si è visto che si può scrivere:

$$\underline{A} = (1 + j b) \underline{A}_R$$

per cui:

$$A_x = (1 + j b) A_{R_x} \quad A_y = (1 + j b) A_{R_y} = \frac{A_{R_y}}{A_{R_x}} A_x = r A_x \quad \text{con } r \in \mathbb{R}$$

Si ha allora che A_x e A_y come numeri complessi sono in fase (se A_{R_x} e A_{R_y} hanno lo stesso segno), oppure in opposizione di fase (se hanno segno opposto). Viceversa, se A_x e A_y come numeri complessi sono in fase oppure in opposizione di fase, si può passare dall'uno all'altro moltiplicando per un numero reale, cioè $A_y = r A_x$, con r reale. Per cui

$$\underline{A} = A_x \underline{x}_o + r A_x \underline{y}_o = A_x (\underline{x}_o + r \underline{y}_o)$$

e quindi $\underline{A}$ è il prodotto del numero complesso A_x per un vettore reale, ossia è polarizzato linearmente. Per cui risulta:

$$\underline{A} \text{ polarizzato linearmente} \iff A_y = r A_x, \quad \text{con } r \in \mathbb{R}$$

Per quanto riguarda la polarizzazione circolare, ossia:

$$|\underline{A}_R| = |\underline{A}_j| \quad \underline{A}_R \cdot \underline{A}_j = 0$$

Dalla prima segue:

$$A_{R_x}^2 + A_{R_y}^2 = A_{j_x}^2 + A_{j_y}^2$$

Dalla seconda invece:

$$A_{R_x} A_{j_x} + A_{R_y} A_{j_y} = 0 \implies A_{R_x}^2 A_{j_x}^2 = A_{R_y}^2 A_{j_y}^2 \implies A_{R_x}^2 = \frac{A_{R_y}^2 A_{j_y}^2}{A_{j_x}^2}$$

Sostituendo nella prima si trova:

$$\frac{A_{R_y}^2 A_{j_y}^2}{A_{j_x}^2} + A_{R_y}^2 = A_{j_x}^2 + A_{j_y}^2 \implies A_{R_y}^2 \left(\frac{A_{j_y}^2}{A_{j_x}^2} + 1 \right) = A_{j_x}^2 + A_{j_y}^2$$

Da cui:

$$A_{R_y}^2 = \frac{A_{j_x}^2 + A_{j_y}^2}{A_{j_y}^2 + A_{j_x}^2} A_{j_x}^2 \implies A_{R_y}^2 = A_{j_x}^2 \implies A_{R_y} = \pm A_{j_x}$$

Dalla seconda: $A_{R_y} A_{j_y} = -A_{R_x} A_{j_x}$ segue $A_{j_y} = \mp A_{R_x}$. Ma allora:

$$A_y = A_{R_y} + j A_{j_y} = \pm A_{j_x} \mp j A_{R_x} = \mp j (A_{R_x} + j A_{j_x}) = \mp j A_x$$

Viceversa se: $A_y = \pm j A_x$ segue:

$$A_{R_y} + j A_{j_y} = \pm j (A_{R_x} + j A_{j_x}) = \pm j A_{R_x} \mp A_{j_x}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} A_{j_y} &= \pm A_{R_x} \\ A_{R_y} &= \mp A_{j_x} \end{aligned}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \underline{A}_R \cdot \underline{A}_j &= A_{R_x} A_{j_x} + A_{R_y} A_{j_y} = \pm A_{j_y} A_{j_x} \mp A_{j_x} A_{j_y} = 0 \\ |\underline{A}_R|^2 &= A_{R_x}^2 + A_{R_y}^2 = A_{j_y}^2 + A_{j_x}^2 = |\underline{A}_j|^2 \implies |\underline{A}_R| = |\underline{A}_j| \end{aligned}$$

Per cui risulta:

$$\underline{A} \text{ polarizzato circolarmente} \iff A_y = \pm j A_x$$

In questo caso quindi A_x e A_y , come numeri complessi, sono in quadratura (differenza di fase di $\pi/2$, essendo $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$). Si noti che le dimostrazioni precedenti non hanno coinvolto il dominio del tempo, per cui sono valide per vettori complessi generici nel piano xy .

Nel caso più generale invece di polarizzazione ellittica si avrà $A_y = c A_x$, con c complesso, e quindi $c = M e^{j\varphi}$, con $M > 0$.

Se $0 < \varphi < \pi$ il verso di rotazione nel dominio del tempo, sul piano xy , è orario (guardando dalla punta dell'asse z). Altrimenti, se $-\pi < \varphi < 0$, si ha il verso antiorario.

In particolare se $M = 1$ e $\varphi = \pm\pi/2$ si ha polarizzazione circolare:

$$A_y = \begin{cases} j A_x & \text{per il verso orario} \\ -j A_x & \text{per il verso antiorario} \end{cases}$$

I versi si possono individuare passando nel dominio del tempo. Ad esempio nel primo caso si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x(t) &= |A_x| \cos(\omega t + \varphi_x) \\ \tilde{A}_y(t) &= |A_y| \cos(\omega t + \varphi_y) = |A_x| \cos(\omega t + \varphi_x + \pi/2) = |A_x| \cos\left[\omega\left(t + \frac{\varphi_x}{\omega}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

La fase φ_x è legata semplicemente alla scelta dell'origine dei tempi, per cui si può eliminare senza perdita di generalità. Sono significative solo le differenze di fase. Per cui:

$$\tilde{A}_y(t) = |A_x| \cos(\omega t + \pi/2) = -|A_x| \sin(\omega t)$$

ove $\tilde{A}_x(t) = |A_x| \cos(\omega t)$.

Quindi $\tilde{A}_x(t)$ va come il $\cos(\omega t)$, $\tilde{A}_y(t)$ come il $-\sin(\omega t)$, da cui il verso orario. I versi ovviamente si invertono se si guarda invece nella direzione dell'asse z .

Il caso in cui $\varphi = \pm\pi/2$, ma $M \neq 1$ corrisponde ad una polarizzazione ellittica, in cui gli assi principali dell'ellisse coincidono con gli assi cartesiani. Se invece $\varphi \neq \pm\pi/2$ (e ovviamente diversa da 0 e da π , altrimenti si torna alla polarizzazione lineare) si tratta di un'ellisse con gli assi principali ruotati di un certo angolo rispetto agli assi cartesiani.

21.2 Scomposizione di una polarizzazione generica

Il generico vettore complesso $\underline{A}$, di polarizzazione in generale ellittica, può ovviamente decomporsi nella somma di due vettori, in generale complessi, polarizzati linearmente, ad esempio i due vettori componenti secondo x ed y nel piano di polarizzazione: $\underline{A} = A_x \underline{x}_o + A_y \underline{y}_o$. Ciò equivale ad assumere come base di rappresentazione, per uno stato di polarizzazione arbitrario, i vettori reali ortonormali $\underline{x}_o$ ed $\underline{y}_o$. Non si perde dunque in generalità a considerare vettori polarizzati linearmente, poiché poi è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti.

D'altra parte una generica polarizzazione ellittica si può esprimere anche come la sovrapposizione di due polarizzazioni circolari, di opposto verso di rotazione. Per dimostrarlo, dato un generico vettore complesso $\underline{A}$, si ponga:

$$\underline{A} = A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2$$

ove:

$$\begin{aligned} \underline{c}_1 &= \frac{\underline{x}_o - j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} & \underline{c}_2 &= \frac{\underline{x}_o + j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} \\ A_1 &= \frac{A_x + j A_y}{\sqrt{2}} & A_2 &= \frac{A_x - j A_y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2 &= \frac{A_x + j A_y}{\sqrt{2}} \left(\frac{\underline{x}_o - j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} \right) + \frac{A_x - j A_y}{\sqrt{2}} \left(\frac{\underline{x}_o + j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{A_x \underline{x}_o}{2} - j \frac{A_x \underline{y}_o}{2} + j \frac{A_y \underline{x}_o}{2} + \frac{A_y \underline{y}_o}{2} \\ &\quad + \frac{A_x \underline{x}_o}{2} + j \frac{A_x \underline{y}_o}{2} - j \frac{A_y \underline{x}_o}{2} + \frac{A_y \underline{y}_o}{2} = A_x \underline{x}_o + A_y \underline{y}_o \end{aligned}$$

Dalle definizioni di A_1 e A_2 si ha, sommando:

$$A_1 + A_2 = 2 \frac{A_x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} A_x \quad \Rightarrow \quad A_x = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}}$$

Sottraendo si ha invece:

$$A_1 - A_2 = 2 j \frac{A_y}{\sqrt{2}} = j \sqrt{2} A_y \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{A_1 - A_2}{j \sqrt{2}}$$

Procedendo in modo analogo con i versori, si ha:

$$\underline{x}_o = \frac{\underline{c}_1 + \underline{c}_2}{\sqrt{2}} \quad \underline{y}_o = \frac{\underline{c}_2 - \underline{c}_1}{j \sqrt{2}}$$

Si noti intanto che i vettori complessi $\underline{c}_1$ e $\underline{c}_2$ sono di modulo unitario.

Si ha infatti:

$$|\underline{c}_1|^2 = \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1^* = \frac{\underline{x}_o - j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\underline{x}_o + j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \underline{c}_2^* \cdot \underline{c}_2 = |\underline{c}_2|^2$$

essendo $\underline{c}_1 = \underline{c}_2^*$. Le ampiezze complesse sono invece nulle, essendo $\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1 = \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2 = 0$ (pur essendo $\underline{c}_1$ e $\underline{c}_2 \neq 0$).

Inoltre $\underline{c}_1$ e $\underline{c}_2$ sono anche ortogonali (in senso algebrico), secondo la definizione:

$$\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2^* = \frac{\underline{x}_o - j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\underline{x}_o - j \underline{y}_o}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_1^*$$

Mentre si ha invece, come già visto, $\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2 = 1 \neq 0$.

Dunque i vettori complessi $\underline{c}_1$ e $\underline{c}_2$ costituiscono una base ortonormale. Si noti per inciso che mentre in una qualsiasi base ortonormale reale (ad esempio $\underline{x}_o$ e $\underline{y}_o$) si può scrivere per un vettore generico:

$$\underline{A} = A_x \underline{x}_o + A_y \underline{y}_o = (\underline{A} \cdot \underline{x}_o) \underline{x}_o + (\underline{A} \cdot \underline{y}_o) \underline{y}_o$$

questa espressione va invece modificata se la base è complessa, e si ha:

$$\underline{A} = A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2 = (\underline{A} \cdot \underline{c}_1^*) \underline{c}_1 + (\underline{A} \cdot \underline{c}_2^*) \underline{c}_2$$

(nuove definizioni algebriche per le componenti di un vettore). Infatti ad esempio:

$$\underline{A} \cdot \underline{c}_1^* = (A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2) \cdot \underline{c}_1^* = A_1 \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1^* + A_2 \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_1^* = A_1$$

Si noti adesso che $\underline{c}_1$ e $\underline{c}_2$ sono vettori polarizzati circolarmente. Si ha:

$$c_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad c_{1y} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

per cui $c_{1y} = -j c_{1x}$ (verso di percorrenza antiorario guardando dal semispazio $z > 0$). Inoltre:

$$c_{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad c_{2y} = \frac{j}{\sqrt{2}} = j c_{2x} \quad (\text{verso orario})$$

Ovviamente anche una generica polarizzazione lineare, come caso particolare di una polarizzazione ellittica (con uno dei semiassi nullo), può scomporsi in due polarizzazioni circolari. Del resto in questo caso si può scegliere l'asse x coincidente con la direzione di polarizzazione, per cui $\underline{A} = A_x \underline{x}_o$, e poi porre:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= (A_x/2) \underline{x}_o - j (A_x/2) \underline{y}_o \\ \underline{A}_2 &= (A_x/2) \underline{x}_o + j (A_x/2) \underline{y}_o \end{aligned}$$

ove $\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \underline{A}$, e $\underline{A}_1$ è polarizzato circolarmente in verso antiorario, mentre $\underline{A}_2$ lo è in verso orario.

Si noti che, dato un generico vettore complesso $\underline{A}$ funzione di punto (ad esempio un campo elettrico), non è sempre possibile scomporre tale vettore nel prodotto di uno scalare funzione di punto e di un vettore che non dipenda dal punto. Per cui in generale il tipo di polarizzazione sarà diverso da punto a punto nello spazio, $\underline{A}_R$ ed $\underline{A}_j$ saranno delle funzioni di punto, e si potranno considerare i luoghi dei punti in cui si ha ad esempio polarizzazione lineare, o circolare. Questo può avvenire ad esempio in una guida d'onda. Nel caso dell'onda piana, tuttavia, vista la sua dipendenza dalle coordinate ($\underline{E} = \underline{E}_o e^{-jkx}$, con $\underline{E}_o$ costante), si ha effettivamente che il tipo di polarizzazione è lo stesso in tutto lo spazio.

21.3 L'ellisse di polarizzazione

L'angolo θ che il vettore nel dominio del tempo $\tilde{\underline{A}}(t)$ forma in un certo istante con l'asse x del piano di polarizzazione è dato dalla:

$$\theta(t) = \arctan \frac{\tilde{A}_y(t)}{\tilde{A}_x(t)} = \arctan \frac{\hat{A}_y \cos(\omega t + \varphi)}{\hat{A}_x \cos(\omega t)}$$

avendo posto $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$, poiché come si è visto solo le differenze di fase sono significative.

L'ellisse di polarizzazione sarà allora percorsa con velocità angolare istantanea:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left[\frac{\tilde{A}_y(t)}{\tilde{A}_x(t)} \right]^2} \frac{\tilde{A}'_y(t) \tilde{A}_x(t) - \tilde{A}_y(t) \tilde{A}'_x(t)}{\tilde{A}_x^2(t)} = \frac{\tilde{A}'_y(t) \tilde{A}_x(t) - \tilde{A}_y(t) \tilde{A}'_x(t)}{\tilde{A}_x^2(t) + \tilde{A}_y^2(t)} = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}^2(t)} \left[-\hat{A}_y \omega \sin(\omega t + \varphi) \hat{A}_x \cos(\omega t) + \hat{A}_y \cos(\omega t + \varphi) \omega \hat{A}_x \sin(\omega t) \right] = \\ &= \frac{\omega \hat{A}_x \hat{A}_y}{\tilde{A}^2(t)} \left[\sin(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) \right] = -\omega \frac{\hat{A}_x \hat{A}_y \sin \varphi}{\tilde{A}^2(t)} \end{aligned}$$

Come si vede per $0 < \varphi < \pi$ si ha $\Omega < 0$ (ossia verso orario di rotazione), come già visto, mentre per $-\pi < \varphi < 0$ il verso è antiorario ($\Omega > 0$). Si noti comunque che la velocità angolare non risulta in generale costante nel tempo. Il vettore nel tempo compie però comunque una rotazione completa nel periodo $T = 2\pi/\omega$. Se $|A_x| = |A_y|$ e $\varphi = \pm\pi/2$ (polarizzazione circolare) si ha

$$\begin{aligned} \tilde{A}^2(t) &= \tilde{A}_x^2(t) + \tilde{A}_y^2(t) = \hat{A}_x^2 \cos^2(\omega t) + \hat{A}_x^2 \cos^2\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \hat{A}_x^2 \left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \right] = \hat{A}_x^2 \end{aligned}$$

per cui:

$$\Omega(t) = -\omega \frac{\hat{A}_x^2}{\hat{A}_x^2} (\pm 1) = \mp \omega = \text{cost}$$

Scomponendo una generica polarizzazione ellittica in due polarizzazioni circolari è anche semplice individuare l'ellisse di polarizzazione. Ponendo infatti $\underline{A} = A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2$ e scrivendo:

$$\frac{A_2}{A_1} = M e^{j2\alpha}$$

si può dimostrare che α è l'angolo che gli assi principali dell'ellisse formano con gli assi cartesiani. Si ha:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\text{Im} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)}{\text{Re} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)} \right]$$

Tornando alle componenti cartesiane sul piano di polarizzazione si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_2}{A_1} &= \frac{(A_x - j A_y) \frac{1}{\sqrt{2}}}{(A_x + j A_y) \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{A_x - j A_y}{A_x + j A_y} = \frac{(A_x - j A_y)(A_x^* - j A_y^*)}{|A_x + j A_y|^2} = \\
 &= \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j(A_x A_y^* + A_y A_x^*)}{|A_x + j A_y|^2} = \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j 2 \operatorname{Re}[A_x A_y^*]}{|A_x + j A_y|^2} = \\
 &= \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j 2 \operatorname{Re}[\hat{A}_x \hat{A}_y e^{-j\varphi}]}{|A_x + j A_y|^2} = \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j 2 \hat{A}_x \hat{A}_y \cos \varphi}{|A_x + j A_y|^2}
 \end{aligned}$$

Per cui:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2 \hat{A}_x \hat{A}_y \cos \varphi}{\hat{A}_x^2 - \hat{A}_y^2} \right)$$

Si verifica che se $\varphi = \pm\pi/2$ gli assi principali coincidono con gli assi cartesiani. Si dimostra inoltre che il rapporto fra il semiasse maggiore a e il semiasse minore b è dato dalla:

$$\frac{a}{b} = \frac{|1 + M|}{|1 - M|} = \frac{1 + \left| \frac{A_2}{A_1} \right|}{\left| 1 - \frac{A_2}{A_1} \right|}$$

Nel caso $M = 1$ si ricade nella polarizzazione lineare (A_2 e A_1 hanno lo stesso modulo) $b = 0$, mentre la polarizzazione circolare si ha per $M = 0$ ($A_2 = 0$), con $a/b = 1$ (semiassi uguali).

Capitolo 22

Costanti secondarie dei mezzi. Costanti di fase e di attenuazione per onde piane uniformi. Perdite dei mezzi. Relazioni di Kramers-Krönig

Per costanti secondarie di un mezzo si intendono le quantità k e ζ , rispettivamente *costante di propagazione* e *impedenza caratteristica* (o intrinseca) del mezzo. Le costanti primarie sono invece ε , μ e σ .

Le costanti secondarie dipendono dalle costanti primarie e dalla frequenza, secondo le note relazioni:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_c} = \sqrt{\omega^2 \mu \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \sigma} = \sqrt{-j \omega \mu (\sigma + j \omega \varepsilon)} = k_R - j k_j \\ \zeta &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j \omega \mu}{\sigma + j \omega \varepsilon}} = \sqrt{\frac{j \omega \mu (\sigma - j \omega \varepsilon)}{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2} + \frac{j \omega \mu \sigma}{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2}} = \zeta_R + j \zeta_j \end{aligned}$$

Del resto anche le costanti primarie ε e μ nei mezzi dispersivi (e tutti i mezzi a rigore lo sono) saranno in generale funzioni complesse della variabile ω (si pensi ad esempio al modello di Lorentz per $\varepsilon(\omega)$). Per quanto riguarda σ si può vedere che fino a frequenze al di sotto delle microonde ($\omega \leq 10^{11} \text{ sec}^{-1}$) le conducibilità dei metalli sono essenzialmente reali (corrente di conduzione in fase con il campo elettrico) ed indipendenti dalla frequenza. A frequenze più elevate (infrarosso e oltre) la conducibilità è complessa e varia con la frequenza (modello di Drude).

Si è visto che in ambedue le definizioni delle costanti secondarie compare il fattore $(\sigma + j \omega \varepsilon)$. Ricordando che la corrente di conduzione è data da $\underline{J}_c = \sigma \underline{E}$, e la corrente di spostamento da $j \omega \varepsilon \underline{E}$, si dirà che un mezzo è buon conduttore se prevale l'effetto della

corrente di conduzione, cioè se $\sigma \gg |\omega\varepsilon|$, mentre è un buon dielettrico se $|\omega\varepsilon| \gg \sigma$ (è stato inserito il modulo per includere il caso dispersivo per ε , con la parte immaginaria legata a dissipazioni nel dielettrico). Ovviamente tale distinzione dipende dal campo di frequenze che interessa. Alle alte frequenze, ad esempio frequenze ottiche, anche i metalli, con σ dell'ordine di 10^7 S/m, non sono più degli ottimi conduttori. Se un mezzo possiede elettroni liberi, è un conduttore a basse frequenze, un isolante negli altri casi.

Si noti che le costanti secondarie sono qui definite come caratteristiche di un certo mezzo, indipendentemente dal tipo di campo elettromagnetico che si propaga in quel mezzo (a parte la dipendenza dalla frequenza). È stato posto $k = k_R - j k_j$ poiché, nell'ipotesi di mezzi non dispersivi (oppure dispersivi, ma non dissipativi, ε e μ reali), la quantità k^2 giace nel quarto quadrante del piano complesso, e si sceglie la determinazione della radice quadrata con parte reale positiva (che giace cioè anch'essa nel quarto quadrante, ed ha quindi parte immaginaria negativa). In tal modo k_R e k_j risultano entrambi positivi.

Per quanto riguarda ζ si ha invece che (nelle stesse ipotesi sui mezzi) ζ^2 giace nel primo quadrante, e si sceglie ζ anch'essa nel primo quadrante, per cui $\zeta_R, \zeta_j > 0$.

Separando ora la parte reale da quella immaginaria si ha:

$$k^2 = (k_R - j k_j)^2 = k_R^2 - k_j^2 - 2j k_R k_j = \omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \sigma$$

Per cui:

$$\begin{aligned} k_R^2 - k_j^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon \\ 2 k_R k_j &= \omega \mu \sigma \end{aligned}$$

Nel caso dell'impedenza si ha invece:

$$\zeta^2 = (\zeta_R + j \zeta_j)^2 = \zeta_R^2 - \zeta_j^2 + 2j \zeta_R \zeta_j = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon + j \omega \mu \sigma}{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2}$$

per cui:

$$\begin{aligned} \zeta_R^2 - \zeta_j^2 &= \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \\ 2 \zeta_R \zeta_j &= \frac{\omega \mu \sigma}{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \end{aligned}$$

Confrontando con il sistema precedente per k , si vede subito che si può porre:

$$\zeta_R = \frac{k_R}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2}} \quad \zeta_j = \frac{k_j}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2}}$$

È sufficiente allora considerare e risolvere solo il problema per k . Ciò sarà fatto inizialmente nelle due situazioni di buon dielettrico e di buon conduttore.

Nel caso del buon dielettrico ($\omega\varepsilon \gg \sigma$) si ha:

$$\omega^2 \mu \varepsilon \gg \omega \mu \sigma \quad \implies \quad \omega^2 \mu \varepsilon + k_j^2 \gg \omega \mu \sigma$$

Ma:

$$\omega^2 \mu \varepsilon + k_j^2 = k_R^2 \quad \text{e} \quad \omega \mu \sigma = 2 k_R k_j$$

da cui:

$$k_R^2 \gg 2 k_R k_j \implies k_R^2 \gg k_R k_j \implies k_R \gg k_j$$

È possibile allora trascurare k_j rispetto a k_R nella prima equazione del sistema per k , e scrivere:

$$k_R^2 \cong \omega^2 \mu \varepsilon \implies k_R \cong \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

Dalla seconda si ha:

$$k_j = \frac{\omega \mu \sigma}{2 k_R} \cong \frac{\mu \sigma}{2 \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cong \frac{\sigma}{2 \omega \varepsilon} k_R \ll k_R$$

Per quanto riguarda ζ , essendo in questo caso:

$$\sqrt{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \cong \omega \varepsilon$$

si avrà:

$$\zeta_R \cong \frac{k_R}{\omega \varepsilon} \quad \zeta_j \cong \frac{k_j}{\omega \varepsilon}$$

da cui:

$$\zeta_R \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\zeta_j \cong \frac{\sigma}{2 \omega \varepsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cong \frac{\sigma}{2 \omega \varepsilon} \zeta_R \ll \zeta_R$$

Si noti che k_R e k_j risultano (come già detto) determinati una volta note ε , μ , σ e la frequenza.

Si consideri ora un'onda piana, in cui si introducono come è noto il vettore di fase $\underline{\beta}$ e quello di attenuazione $\underline{\alpha}$. Si hanno le note relazioni:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = k_R^2 - k_j^2$$

$$\underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = \frac{\omega \mu \sigma}{2} = k_R k_j$$

Da tali relazioni segue per inciso che dev'essere $\beta \neq 0$, inoltre $\beta > \alpha$, e l'angolo fra $\underline{\beta}$ ed $\underline{\alpha}$ non ottuso. I valori di β e α dipendono dalle caratteristiche dell'onda che si propaga in quel mezzo.

Per esempio nel caso particolare dell'onda piana uniforme, essendo $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$ paralleli (e concordi), si ha:

$$\underline{k} = \underline{\beta} - j \underline{\alpha} = (\beta - j \alpha) \underline{\beta}_o = k \underline{\beta}_o, \text{ con } k = \beta - j \alpha \implies \begin{cases} k_R = \beta \\ k_j = \alpha \end{cases}$$

Risulta dal sistema precedente $\underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = \beta \alpha$.

Un'altra soluzione del sistema sarebbe $\beta = -k_R$, $\alpha = -k_j$, non accettabile essendo β ed α supposti positivi. Le altre due soluzioni (il sistema è di quarto grado, quindi ha quattro soluzioni) sono immaginarie, quindi non accettabili. Ricapitolando, per un buon dielettrico, si ha per l'onda piana uniforme $\beta \gg \alpha$.

Passando ora al caso di buon conduttore ($\sigma \gg \omega \varepsilon$) si ha:

$$\begin{aligned} k^2 &= -j \omega \mu (\sigma + j \omega \varepsilon) \cong -j \omega \mu \sigma \quad \Rightarrow \\ k &\cong \sqrt{-j} \sqrt{\omega \mu \sigma} = \sqrt{\omega \mu \sigma} \frac{1-j}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1-j) \end{aligned}$$

Ne segue allora che:

$$k_R \cong k_j \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

Ne deriva subito:

$$\zeta_R \cong \zeta_j \cong \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} \quad \Rightarrow \quad \zeta \cong \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} (1+j)$$

Nel caso particolare di un'onda piana uniforme in un buon conduttore, ne segue che $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$ hanno modulo quasi uguale.

Si consideri ora il caso di un mezzo generico. Si ha:

$$\begin{aligned} k_j &= \frac{\omega \mu \sigma}{2 k_R} \quad \Rightarrow \quad k_R^2 - \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2 k_R} \right)^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \\ 4 k_R^4 - 4 k_R^2 \omega^2 \mu \varepsilon - \omega^2 \mu^2 \sigma^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si tratta di un'equazione biquadratica, per cui:

$$\begin{aligned} k_R^2 &= \frac{1}{8} \left[4 \omega^2 \mu \varepsilon \pm \sqrt{16 \omega^4 \mu^2 \varepsilon^2 + 16 \omega^2 \mu^2 \sigma^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\omega^2 \mu \varepsilon \pm \sqrt{\omega^4 \mu^2 \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)} \right] = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

Scartando la determinazione con il meno, poiché dà luogo ad un valore negativo per k_R^2 , si ha:

$$k_R = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]}$$

Si ritrovano i casi particolari visti in precedenza (buon dielettrico e buon conduttore).

Per quanto riguarda k_j si ha in modo analogo:

$$\begin{aligned} k_R &= \frac{\omega \mu \sigma}{2 k_j} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2 k_j} \right)^2 - k_j^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \\ 4 k_j^4 + 4 k_j^2 \omega^2 \mu \varepsilon - \omega^2 \mu^2 \sigma^2 &= 0 \end{aligned}$$

Per cui:

$$k_j^2 = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} \right]$$

avendo anche ora scartato la determinazione negativa; ed infine:

$$k_j = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]}$$

Si ritrovano anche ora i casi particolari già visti.

Come già detto, nel caso delle onde piane uniformi le espressioni ricavate sono anche quelle per β e α rispettivamente.

Si noti come β e α abbiano entrambe le dimensioni fisiche di m^{-1} . Tuttavia, per ricordare che β si riferisce alla fase (esponenziale immaginario) si parla spesso di rad/m , mentre per sottolineare che α è legato al modulo (esponenziale reale) si parla di Neper/m , o Np/m . Per l'attenuazione si usa anche la notazione in decibel a metro (dB/m), secondo la definizione (supponendo z la direzione di propagazione dell'onda):

$$\text{dB}(z) = 20 \log_{10} e^{-\alpha z} = 20(-\alpha z) \log_{10} e \cong 20(-\alpha z)(0.434) = -8.68 \alpha z$$

Per cui (per lunghezza unitaria):

$$\alpha_{\text{dB/m}} \cong 8.68 \alpha_{\text{Np/m}}$$

Infine dalle espressioni per β nei vari casi si ricavano la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/\beta$ e la velocità di fase $v_p = \omega/\beta$.

Si definisce inoltre profondità di pelle (*skin depth*) δ la quantità $\delta = 1/\alpha$, ossia la distanza percorsa da un'onda piana uniforme per ridursi in modulo di $e^{-1} \cong 0.368$, ossia a circa il 36.8%.

Un modo per caratterizzare le perdite di un certo mezzo è l'introduzione della cosiddetta tangente di perdita (*loss tangent*) $\tan \delta$ (non si confonda δ con la profondità di pelle). Si tratta di un parametro adimensionale definito dalla (rapporto fra parte immaginaria e parte reale):

$$\varepsilon_c = \varepsilon(1 - j \tan \delta) = \varepsilon - j \varepsilon \tan \delta$$

per cui

$$\varepsilon \tan \delta = \frac{\sigma}{\omega} \implies \tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$$

ove il pedice σ si riferisce alle perdite ohmiche. Usualmente per un certo materiale il costruttore assegna o la conducibilità (S/m) oppure la *loss tangent*.

In modo analogo, tangenti di perdita possono definirsi per le perdite dielettriche e magnetiche. In questo caso si porrà:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon'(\omega) - j \varepsilon''(\omega) = \varepsilon'(1 - j \tan \delta_\varepsilon) \\ \mu(\omega) &= \mu'(\omega) - j \mu''(\omega) = \mu'(1 - j \tan \delta_\mu) \end{aligned}$$

ove al solito una parte immaginaria negativa corrisponde effettivamente a potenza dissipata (come si vede a proposito del teorema di Poynting). Si avrà:

$$\tan \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, \quad \text{oppure} \quad \tan \delta_\mu = \frac{\mu''}{\mu'}$$

L'effetto di ε'' può essere paragonato a quello di una conducibilità (del resto $\omega\varepsilon''$ ha le stesse dimensioni di σ), e si può definire una conducibilità equivalente $\sigma + \omega\varepsilon''$. Ad esempio nel riscaldamento a microonde dei cibi l'effetto prevalente è quello di ε'' . Inoltre il muscolo ha una più elevata ε'' della pelle e dei grassi, per cui i cibi vengono scaldati dal forno a microonde più all'interno che all'esterno. Per questo motivo anche non ci si accorge subito di essere "scaldati" a microonde, perché i sensori di temperatura si trovano all'esterno, sulla pelle.

Inoltre ad esempio il vetro e la plastica posseggono bassi valori di σ (buoni isolanti), ma possono presentare notevoli perdite dielettriche.

Nel caso di mezzo dispersivo (e dissipativo) i sistemi di equazioni per k ed ζ non sono più validi, restano soltanto le definizioni.

Si noti che nel caso di un'onda piana uniforme che si propaghi in un certo mezzo di costanti secondarie k ed ζ , è possibile associare ad essa una linea di trasmissione equivalente, lungo la direzione di propagazione dell'onda. I parametri della linea (costante di propagazione ed impedenza caratteristica) vengono a coincidere con quelli del mezzo. Questa è una caratteristica delle onde TEM (come l'onda piana uniforme).

Si noti ancora che le funzioni $\varepsilon'(\omega)$ ed $\varepsilon''(\omega)$ non sono indipendenti fra loro, ossia nota una delle due è possibile calcolare l'altra. Questo deriva dal fatto che la funzione complessa $\varepsilon(\omega)$ è olomorfa nel semipiano destro della variabile complessa $s = p + j\omega$. Non ci devono cioè essere poli nel semipiano destro (compreso l'asse immaginario). Si potrebbe vedere che tale proprietà è in generale conseguenza, in un sistema lineare ($\varepsilon(\omega)$ si può vedere come la funzione di trasferimento di un sistema lineare), delle ipotesi di stabilità (uscita limitata per ingressi limitati) e causalità (il vettore $\tilde{D}$ in un certo istante è determinato solo dai valori del campo $\tilde{E}$ per istanti precedenti).

Valgono allora in tali ipotesi le cosiddette relazioni di Kramers-Krönig:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= \varepsilon_o + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega [\varepsilon'(\omega') - \varepsilon_o]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned}$$

Relazioni analoghe valgono anche per $\mu(\omega)$. Esse sono inoltre perfettamente analoghe alle relazioni fra parte reale e immaginaria delle funzioni impedenza.

Si noti infine che esiste un legame fra le relazioni di Kramers-Krönig e la trasformata di Hilbert (rispetto alla pulsazione). Si ha in particolare che

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_o = -H[\varepsilon''(\omega)] \quad \varepsilon''(\omega) = H[\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_o]$$

Ricordando poi che $\varepsilon'(\omega)$ è una funzione pari ed $\varepsilon''(\omega)$ una funzione dispari (essendo $\varepsilon(\omega)$ la trasformata di una funzione reale), dalle trasformate di Hilbert seguono le relazioni di Kramers-Krönig con semplici passaggi.

Concludendo, è possibile, da esperimenti di assorbimento, ricavare empiricamente $\varepsilon''(\omega)$ e quindi calcolare $\varepsilon'(\omega)$.

Si noti infine che non può esistere un mezzo (a parte il vuoto) che sia dispersivo e non dissipativo per ogni ω , ossia avente la parte immaginaria identicamente nulla. Questo porterebbe infatti, dalla prima relazione di Kramers-Krönig, ad avere la parte reale coincidente con ε_0 . Viceversa, poiché tutti i mezzi reali sono in qualche modo dissipativi, è necessario ammettere un comportamento dispersivo.

Capitolo 23

Onde piane uniformi

Come è noto, si hanno onde piane uniformi in due casi: quando il vettore di attenuazione $\underline{\alpha}$ è nullo, e quando esso è parallelo al vettore di fase $\underline{\beta}$. Nel primo caso il vettore di propagazione $\underline{k}$ è reale, nel secondo caso è complesso, ma polarizzato linearmente (versore reale).

Si è visto che in entrambi i casi si ha un'onda TEM (trasversa elettromagnetica) rispetto alla direzione di propagazione, ossia il piano di polarizzazione per i vettori $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ (in generale polarizzati ellitticamente) è ortogonale alla direzione di propagazione.

Considerando le posizioni:

$$\underline{E}_o = \underline{E}_R + j \underline{E}_j \qquad \underline{H}_o = \underline{H}_R + j \underline{H}_j$$

con

$$\underline{E} = \underline{E}_o e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}} \qquad \underline{H} = \underline{H}_o e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}}$$

non è detto in generale che, presi separatamente, i vettori reali $\underline{E}_R$ e $\underline{H}_R$ (ed i vettori reali $\underline{E}_j$ ed $\underline{H}_j$) rappresentino un'onda piana, una volta moltiplicati per l'esponenziale. Occorre come è noto verificare che sia:

1.

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c$$

affinché si tratti di una soluzione dell'equazione di Helmholtz (condizione di separabilità). Ovviamente tale condizione in questo caso è verificata, essendo per ipotesi la coppia $\underline{E}$, $\underline{H}$ un'onda piana.

2.

$$\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0$$

affinché si tratti di una soluzione delle equazioni di Maxwell (condizione aggiuntiva

$\nabla \cdot \underline{E} = 0$). Nel caso dell'onda piana uniforme si ha:

$$\begin{aligned} (\underline{E}_R + j \underline{E}_j) \cdot \underline{k} &= (\underline{E}_R + j \underline{E}_j) \cdot \underline{k} \underline{\beta}_o = 0 & k &= \beta - j \alpha \\ \Rightarrow \underline{E}_R \cdot \underline{\beta}_o &= 0 & \underline{E}_j \cdot \underline{\beta}_o &= 0 \\ \Rightarrow \underline{k} \cdot \underline{E}_R &= 0 & \underline{k} \cdot \underline{E}_j &= 0 \end{aligned}$$

3. resta a questo punto determinato $\underline{H}_o = (1/\omega\mu)\underline{k} \times \underline{E}_o$, per cui occorre controllare che anche questa sia verificata.

Nel caso in cui $\underline{\alpha} = 0$ si ha:

$$\underline{H}_R + j \underline{H}_j = \frac{1}{\omega\mu} \underline{\beta} \times (\underline{E}_R + j \underline{E}_j)$$

Separando parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \underline{H}_R &= \frac{1}{\omega\mu} \underline{\beta} \times \underline{E}_R = \frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times \underline{E}_R \\ \underline{H}_j &= \frac{1}{\omega\mu} \underline{\beta} \times \underline{E}_j = \frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times \underline{E}_j \end{aligned}$$

per cui ho effettivamente scomposto in due onde piane, è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti.

Nel caso invece in cui $\underline{\alpha} \parallel \underline{\beta}$ le prime due condizioni sono ancora verificate, mentre dalla terza si ha:

$$(\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) \times (\underline{E}_R + j \underline{E}_j) = \omega\mu(\underline{H}_R + j \underline{H}_j)$$

e separando parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \underline{\beta} \times \underline{E}_R + \underline{\alpha} \times \underline{E}_j &= \omega\mu \underline{H}_R \\ -\underline{\alpha} \times \underline{E}_R + \underline{\beta} \times \underline{E}_j &= \omega\mu \underline{H}_j \end{aligned}$$

In questo caso le equazioni non si separano, e non si può concludere che $\underline{k} \times \underline{E}_R = \omega\mu \underline{H}_R$ e $\underline{k} \times \underline{E}_j = \omega\mu \underline{H}_j$. Non è possibile scomporre in questo modo in due onde piane. Per ottenere la scomposizione di $\underline{E}_o$ e $\underline{H}_o$ in due vettori polarizzati linearmente (anche se non più reali), si può prendere la direzione di propagazione come asse z , il piano di polarizzazione come piano xy , e porre:

$$\begin{aligned} \underline{E}_o &= E_{ox} \underline{x}_o + E_{oy} \underline{y}_o = \underline{E}_{ox} + \underline{E}_{oy} \\ \underline{H}_o &= H_{ox} \underline{x}_o + H_{oy} \underline{y}_o = \underline{H}_{ox} + \underline{H}_{oy} \end{aligned}$$

con $\underline{E}_{ox}$, $\underline{E}_{oy}$, $\underline{H}_{ox}$ e $\underline{H}_{oy}$ in generale complessi, ma ovviamente polarizzati linearmente.

Si considerino ora le coppie $\underline{E}_{ox}$, $\underline{H}_{oy}$ ed $\underline{E}_{oy}$, $\underline{H}_{ox}$ e si controlli che si tratti separatamente di onde piane. Essendo $\underline{k}$ diretto lungo z si ha (condizione 2):

$$\underline{k} \cdot \underline{E}_{ox} = 0 \quad \underline{k} \cdot \underline{E}_{oy} = 0$$

Per quanto riguarda la condizione 3, dalla $\underline{k} \times \underline{E}_o = \omega\mu \underline{H}_o$ si ha che:

$$\begin{aligned}\underline{k} \times (\underline{E}_{ox} + \underline{E}_{oy}) &= \omega\mu (\underline{H}_{ox} + \underline{H}_{oy}) \\ \underline{k} \times \underline{E}_{ox} + \underline{k} \times \underline{E}_{oy} &= \omega\mu \underline{H}_{ox} + \omega\mu \underline{H}_{oy}\end{aligned}$$

Il vettore $\underline{k} \times \underline{E}_{ox}$ è polarizzato linearmente nella direzione y , mentre $\underline{k} \times \underline{E}_{oy}$ nella direzione x . Per cui uguagliando separatamente si ha:

$$\begin{aligned}\underline{k} \times \underline{E}_{ox} &= \omega\mu \underline{H}_{oy} \\ \underline{k} \times \underline{E}_{oy} &= \omega\mu \underline{H}_{ox}\end{aligned}$$

Si è dunque visto come sia sempre possibile, nel caso dell'onda piana uniforme, scomporre una generica polarizzazione ellittica in due (onde piane) polarizzate linearmente. Per cui non si perde in generalità a considerare onde piane uniformi polarizzate linearmente.

Sempre per un'onda piana uniforme, dalla:

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times \underline{E}$$

segue:

$$\underline{H} = \frac{k}{\omega\mu} \underline{\beta}_o \times \underline{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\mu}} \underline{\beta}_o \times \underline{E} = \frac{1}{\zeta} \underline{\beta}_o \times \underline{E} = \frac{1}{\zeta} \underline{k}_o \times \underline{E}$$

essendo ζ l'impedenza caratteristica del mezzo, in generale complessa (nel vuoto si ha $\zeta_o \cong 120\pi \Omega \cong 377\Omega$). Le dimensioni fisiche sono quelle di un'impedenza, in quanto $\underline{H}$ ha dimensioni (nel caso dei fasori) A/m, $\underline{E}$ ha dimensioni V/m ed il versore è adimensionale.

In termini di campo elettrico si ha invece:

$$\underline{E} = \frac{1}{\omega\varepsilon_c} \underline{H} \times \underline{k} = \frac{k}{\omega\varepsilon_c} \underline{H} \times \underline{\beta}_o = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \underline{H} \times \underline{\beta}_o = \zeta \underline{H} \times \underline{\beta}_o = \zeta \underline{H} \times \underline{k}_o$$

Si noti tuttavia che queste relazioni con l'impedenza possono scriversi anche per un'onda piana generica (non uniforme), in cui cioè il vettore complesso $\underline{k}$ non sia polarizzato linearmente. Si può sempre porre, infatti $\underline{k} = k \underline{k}_o = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} \underline{k}_o$, ove però $\underline{k}_o$, definito dalla $\underline{k}_o = \underline{k}/(\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c})$, sarà in generale complesso. Il vettore $\underline{k}$ sicuramente non è polarizzato circolarmente, perché $\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}$, con $\underline{\beta}$ ed $\underline{\alpha}$ di modulo diverso.

Il vettore $\underline{k}_o$ sarà di modulo in generale non unitario, ma di ampiezza (complessa) unitaria. Sarà inoltre sempre vero che:

$$\underline{k}_o \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{k}_o \cdot \underline{H} = 0$$

Anche per i vettori $\underline{E}$ ed $\underline{H}$, che non saranno in generale polarizzati linearmente, si potrà però sempre scrivere (a parte il caso di polarizzazione circolare):

$$\underline{E} = E \underline{e}_o \quad \underline{H} = H \underline{h}_o \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \underline{k}_o \cdot \underline{e}_o = 0 \\ \underline{k}_o \cdot \underline{h}_o = 0 \end{cases}$$

con E ed H ampiezze complesse.

Scrivendo allora la relazione per il campo elettrico:

$$E \underline{e}_o = \zeta H \underline{h}_o \times \underline{k}_o$$

si ricava, uguagliando la parte scalare e quella vettoriale:

$$E = \zeta H \quad \underline{e}_o = \underline{h}_o \times \underline{k}_o$$

Quindi fra le ampiezze complesse la relazione di impedenza è valida in generale.

Dalla relazione vettoriale segue, moltiplicando vettorialmente a sinistra per $\underline{k}_o$:

$$\underline{k}_o \times (\underline{h}_o \times \underline{k}_o) = (\underline{k}_o \cdot \underline{k}_o) \underline{h}_o - (\underline{k}_o \cdot \underline{h}_o) \underline{k}_o = \underline{h}_o = \underline{k}_o \times \underline{e}_o$$

Si ha poi:

$$\underline{e}_o \times \underline{h}_o = \underline{e}_o \times (\underline{k}_o \times \underline{e}_o) = (\underline{e}_o \cdot \underline{e}_o) \underline{k}_o - (\underline{e}_o \cdot \underline{k}_o) \underline{e}_o = \underline{k}_o$$

Sostanzialmente i 3 pseudoversori $\underline{e}_o$, $\underline{h}_o$, $\underline{k}_o$ si comportano come $\underline{x}_o$, $\underline{y}_o$, $\underline{z}_o$ rispettivamente nei prodotti vettoriali.

Mentre la relazione di impedenza fra le ampiezze complesse è vera sempre, la relazione analoga fra i moduli vale se $\underline{k}_o$ è reale ($\underline{k}$ polarizzato linearmente, ossia onda piana uniforme). Infatti in questo caso, dalla:

$$\underline{E} = \zeta \underline{H} \times \underline{\beta}_o \quad \text{con} \quad \underline{H} \cdot \underline{\beta}_o^* = \underline{H} \cdot \underline{\beta}_o = 0$$

si può concludere che il modulo del prodotto vettoriale è il prodotto dei moduli, e scrivere:

$$|\underline{E}| = |\zeta| |\underline{H} \times \underline{\beta}_o| = |\zeta| |\underline{H}| |\underline{\beta}_o| = |\zeta| |\underline{H}|$$

ove ζ è complessa nel caso $\underline{\alpha} \neq 0$, reale nel caso $\underline{\alpha} = 0$.

Considerando ora i corrispondenti vettori nel dominio del tempo, si possono fare alcune osservazioni. Si è visto che per i vettori complessi si ha, per un'onda piana del tutto generale:

$$\underline{E} \cdot \underline{H} = 0 \quad \underline{E}_o \cdot \underline{H}_o = 0$$

Nel dominio del tempo si ha invece:

$$\begin{aligned} \underline{E}(t) &= \text{Re} \left[\underline{E} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\underline{E}_o e^{-j\beta \cdot \underline{r}} e^{-\alpha \cdot \underline{r}} e^{j\omega t} \right] = e^{-\alpha \cdot \underline{r}} \text{Re} \left[(\underline{E}_R + j \underline{E}_j) e^{-j\beta \cdot \underline{r}} e^{j\omega t} \right] = \\ &= e^{-\alpha \cdot \underline{r}} \left[\underline{E}_R \cos(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) - \underline{E}_j \sin(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) \right] \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\underline{H} = e^{-\alpha \cdot \underline{r}} \left[\underline{H}_R \cos(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) - \underline{H}_j \sin(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) \right]$$

Si ha allora:

$$\underline{E}(t) \cdot \underline{H}(t) = e^{-2\alpha \cdot r} \left[\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R \cos^2(\omega t - \underline{\beta} \cdot \underline{r}) - \underline{E}_R \cdot \underline{H}_j \cos(\omega t - \underline{\beta} \cdot \underline{r}) \sin(\omega t - \underline{\beta} \cdot \underline{r}) + \right. \\ \left. - \underline{E}_j \cdot \underline{H}_R \sin(\omega t - \underline{\beta} \cdot \underline{r}) \cos(\omega t - \underline{\beta} \cdot \underline{r}) + \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j \sin^2(\omega t - \underline{\beta} \cdot \underline{r}) \right]$$

D'altra parte, dalla $\underline{E}_o \cdot \underline{H}_o = 0$ segue:

$$(\underline{E}_R + j \underline{E}_j) \cdot (\underline{H}_R + j \underline{H}_j) = 0$$

ossia:

$$\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R + j \underline{E}_R \cdot \underline{H}_j + j \underline{E}_j \cdot \underline{H}_R - \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j = 0$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ha:

$$\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j \quad \underline{E}_R \cdot \underline{H}_j = -\underline{E}_j \cdot \underline{H}_R$$

Per cui risulta:

$$\underline{E}(t) \cdot \underline{H}(t) = e^{-2\alpha \cdot r} \underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = e^{-2\alpha \cdot r} \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j$$

per un'onda piana del tutto generale. Si noti che tale prodotto scalare non dipende dal tempo.

Nel caso generale non sarà vero che $\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j = 0$, per cui i vettori nel tempo non sono ortogonali. Neppure nel caso in cui l'onda piana sia uniforme con $\underline{\alpha} \neq 0$. Se invece si ha $\underline{\alpha} = 0$, dalle relazioni viste in precedenza segue:

$$\begin{cases} \underline{\beta} \times \underline{E}_R = \omega \mu \underline{H}_R \\ \underline{\beta} \times \underline{E}_j = \omega \mu \underline{H}_j \end{cases} \implies \underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = 0 = \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j$$

per cui in questo caso i vettori nel tempo sono ad ogni istante ortogonali fra loro.

Si consideri ora la relazione di impedenza per i vettori nel dominio del tempo. Si è visto che si può decomporre la generica onda piana uniforme che si propaghi nella direzione z in due onde piane polarizzate linearmente, date da $\underline{E}_{o_x}$, $\underline{H}_{o_y}$ e $\underline{E}_{o_y}$, $\underline{H}_{o_x}$. Valgono le relazioni fra le ampiezze complesse:

$$E_{o_x} = \zeta H_{o_y} \quad E_{o_y} = -\zeta H_{o_x}$$

Nella seconda equazione si è usato il segno meno, il che corrisponde a prendere il versore $(-\underline{x}_o)$ per mantenere il carattere destro della terna $\underline{e}_o$, $\underline{h}_o$, $\underline{k}_o$.

Considerando ora i vettori nel dominio del tempo, si ha per il caso privo di perdite ($\underline{\alpha} = 0$):

$$\underline{E}(t) = E_x(t) \underline{x}_o + E_y(t) \underline{y}_o$$

con:

$$E_x(t) = \text{Re} \left[E_{o_x} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = E_{o_x R} \cos(\omega t - \beta z) - E_{o_x j} \sin(\omega t - \beta z) \\ E_y(t) = \text{Re} \left[E_{o_y} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = E_{o_y R} \cos(\omega t - \beta z) - E_{o_y j} \sin(\omega t - \beta z)$$

ove, essendo ζ reale, si ha:

$$\begin{aligned} E_{o_x R} &= \zeta H_{o_y R} & E_{o_y R} &= -\zeta H_{o_x R} \\ E_{o_x j} &= \zeta H_{o_y j} & E_{o_y j} &= -\zeta H_{o_x j} \end{aligned}$$

Per il campo magnetico si ha:

$$\underline{H}(t) = H_x(t) \underline{x}_o + H_y(t) \underline{y}_o$$

con:

$$\begin{aligned} H_x(t) &= \operatorname{Re} \left[H_{o_x} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = H_{o_x R} \cos(\omega t - \beta z) - H_{o_x j} \sin(\omega t - \beta z) \\ H_y(t) &= \operatorname{Re} \left[H_{o_y} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = H_{o_y R} \cos(\omega t - \beta z) - H_{o_y j} \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

Calcolando i moduli nel dominio del tempo si ha:

$$\begin{aligned} |\underline{H}(t)|^2 &= H_x^2 + H_y^2 = [H_{o_x R} \cos(\omega t - \beta z) - H_{o_x j} \sin(\omega t - \beta z)]^2 + \\ &\quad + [H_{o_y R} \cos(\omega t - \beta z) - H_{o_y j} \sin(\omega t - \beta z)]^2 \end{aligned}$$

Per il campo elettrico invece:

$$\begin{aligned} |\underline{E}(t)|^2 &= E_x^2 + E_y^2 = [\zeta H_{o_y R} \cos(\omega t - \beta z) - \zeta H_{o_y j} \sin(\omega t - \beta z)]^2 + \\ &\quad + [-\zeta H_{o_x R} \cos(\omega t - \beta z) + \zeta H_{o_x j} \sin(\omega t - \beta z)]^2 = \\ &= \zeta^2 |\underline{H}(t)|^2 \implies |\underline{E}(t)| = \zeta |\underline{H}(t)| \end{aligned}$$

Riassumendo, i due vettori $\underline{E}(t)$ e $\underline{H}(t)$ sono ad ogni istante ortogonali, ed i moduli differiscono per un fattore costante ζ . La dimostrazione non è più valida nel caso di $\underline{\alpha} \neq 0$.

23.1 Onde piane TE, TM e TEM

È noto che un'onda piana uniforme è sempre un'onda TEM rispetto alla direzione di propagazione. D'altra parte risulta vero anche il viceversa, nell'ambito delle onde piane. Ossia un'onda piana TEM rispetto alla direzione di propagazione (che è in generale la direzione del vettore $\underline{\beta}$, per cui si ipotizza $\underline{\beta} \cdot \underline{E} = 0$ e $\underline{\beta} \cdot \underline{H} = 0$) risulta uniforme, ossia $\underline{\beta} \parallel \underline{\alpha}$.

Infatti, dalle relazioni generali, sempre valide per onde piane:

$$\underline{k} \cdot \underline{E} = 0 \quad \underline{k} \cdot \underline{H} = 0$$

segue:

$$\begin{aligned} (\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) \cdot \underline{E} &= \underline{\beta} \cdot \underline{E} - j\underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0 \implies \underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0 \\ (\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) \cdot \underline{H} &= \underline{\beta} \cdot \underline{H} - j\underline{\alpha} \cdot \underline{H} = 0 \implies \underline{\alpha} \cdot \underline{H} = 0 \end{aligned}$$

Se per assurdo non fosse $\underline{\beta} \parallel \underline{\alpha}$, allora questi due vettori reali individuerebbero un piano, e dovendo essere $\underline{\beta} \cdot \underline{E} = 0$ e $\underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0$, il vettore $\underline{E}$ dovrebbe essere polarizzato linearmente nella direzione ortogonale a tale piano. La stessa cosa varrebbe per $\underline{H}$, che risulterebbe polarizzato linearmente nella stessa direzione di $\underline{E}$. Ma allora non potrebbe essere verificata l'altra relazione generale $\underline{E} \cdot \underline{H} = 0$.

È noto anche che se si considera un'onda piana in cui il campo elettrico sia polarizzato linearmente, tale onda risulta un'onda TE rispetto alla direzione di propagazione.

Si noti che ciò è vero sia se $\sigma = 0$ (e allora $\underline{\alpha} \perp \underline{\beta}$, altrimenti se fosse $\underline{\alpha} = 0$ si ricadrebbe nel caso TEM), sia se $\sigma \neq 0$ (e $\underline{\alpha}$ non parallelo a $\underline{\beta}$). Infatti, in ogni caso, se $\underline{E}$ è polarizzato linearmente si può scrivere per $\underline{E}_o$:

$$\underline{E}_o = \underline{E}_R(1 + j b)$$

per cui dalla relazione generale $\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0$ segue:

$$(\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) \cdot \underline{E}_R(1 + j b) = 0 \implies \underline{\beta} \cdot \underline{E}_R = 0 \implies \underline{\beta} \cdot \underline{E} = 0, \quad \underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0$$

Per il campo magnetico è noto che esso risulta polarizzato (in generale ellitticamente) nel piano individuato da $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$.

Si può vedere che vale anche il viceversa, ossia se un'onda piana è TE rispetto alla direzione di propagazione (ossia $\underline{E} \cdot \underline{\beta} = 0$) allora il campo elettrico risulta polarizzato linearmente lungo la direzione ortogonale al piano individuato da $\underline{\beta}$ ed $\underline{\alpha}$. Infatti ovviamente, dalla $\underline{k} \cdot \underline{E} = 0$ segue:

$$\underline{\beta} \cdot \underline{E} - j \underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0 \implies \underline{E} \cdot \underline{\alpha} = 0$$

Analogamente si può vedere che per il campo magnetico l'ipotesi di essere polarizzato linearmente è equivalente all'avere un'onda TM rispetto alla direzione di propagazione.

Si noti inoltre che le onde piane TE e TM hanno soltanto tre componenti di campo (delle sei) diverse da zero, e cioè la componente di $\underline{E}$ (o di $\underline{H}$ rispettivamente) ortogonale al piano individuato da $\underline{\beta}$ ed $\underline{\alpha}$, e le due componenti di $\underline{H}$ (o di $\underline{E}$) sul piano individuato da $\underline{\beta}$ ed $\underline{\alpha}$. Questo fatto non è vero, ad esempio, per i modi TE e TM in una guida d'onda (tranne particolari valori per gli indici di modo).

Si noti infine che si possono definire anche campi TE e TM (rispetto ad un'arbitraria direzione) in modo ancor più generale (che non siano necessariamente onde piane), e si può dimostrare che in generale un arbitrario campo elettromagnetico si può esprimere come somma di un campo TE e di uno TM. Ciascuno di tali campi può inoltre venir ricavato a partire da una funzione scalare che soddisfa l'equazione di Helmholtz omogenea.

23.2 Vettore di Poynting per onde piane

Si consideri ora l'espressione del vettore di Poynting per una generica onda piana. Si ha:

$$\begin{aligned}
 \underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} \underline{E} \times \left[\frac{1}{\omega \mu} \underline{k} \times \underline{E} \right]^* = \frac{1}{2\omega \mu^*} \underline{E} \times (\underline{k}^* \times \underline{E}^*) = \\
 &= \frac{1}{2\omega \mu^*} \underline{E}_o e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \times \left(\underline{k}^* \times \underline{E}_o^* e^{j\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} \right) = \frac{1}{2\omega \mu^*} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} \underline{E}_o \times (\underline{k}^* \times \underline{E}_o^*) = \\
 &= \frac{1}{2\omega \mu^*} e^{-j\mathbf{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}} e^{j\mathbf{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}} \underline{E}_o \times (\underline{k}^* \times \underline{E}_o^*) = \\
 &= \frac{1}{2\omega \mu^*} e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \underline{E}_o \times (\underline{k}^* \times \underline{E}_o^*)
 \end{aligned}$$

Dalla regola del doppio prodotto vettoriale segue:

$$\begin{aligned}
 \underline{P} &= \frac{1}{2\omega \mu^*} e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \left[(\underline{E}_o \cdot \underline{E}_o^*) \underline{k}^* - (\underline{E}_o \cdot \underline{k}^*) \underline{E}_o^* \right] = \\
 &= \frac{1}{2\omega \mu^*} e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \left[|\underline{E}_o|^2 (\underline{\beta} + j \underline{\alpha}) - (\underline{E}_o \cdot \underline{k}^*) \underline{E}_o^* \right]
 \end{aligned}$$

In modo analogo si poteva calcolare $\underline{P}$ in funzione del solo campo magnetico, ottenendosi:

$$\underline{P} = \frac{1}{2\omega \varepsilon_c} e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \left[|\underline{H}_o|^2 (\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) - (\underline{H}_o^* \cdot \underline{k}) \underline{H}_o \right]$$

Considerando di nuovo la prima espressione, si vede che $\underline{P}$ ha una parte reale (per mezzi non dispersivi, o comunque non dissipativi) diretta come $\underline{\beta}$ (direzione di propagazione), una parte immaginaria diretta come $\underline{\alpha}$, oltre a un termine complesso, dato da:

$$-\frac{1}{2\omega \mu^*} e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} (\underline{E}_o \cdot \underline{k}^*) \underline{E}_o^*$$

A questo proposito si noti ancora una volta che la condizione (sempre vera) $\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0$ non implica in generale che sia $\underline{E}_o \cdot \underline{k}^* = 0$. Questo però si verifica, come si è detto, se almeno uno dei due vettori $\underline{E}_o$ e $\underline{k}$ è polarizzato linearmente (oppure in particolare è reale). Il caso di $\underline{E}_o$ polarizzato linearmente si è visto che coincide con il caso dell'onda piana TE (rispetto alla direzione di $\underline{\beta}$), mentre $\underline{k}$ polarizzato linearmente corrisponde all'onda TEM. In tali situazioni rimane:

$$\underline{P} = \frac{1}{2\omega \mu^*} |\underline{E}_o|^2 (\underline{\beta} + j \underline{\alpha}) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}}$$

Analogamente dall'espressione di $\underline{P}$ in funzione di $\underline{H}$ si vede che nel caso TEM o nel caso TM ($\underline{H}_o$ polarizzato linearmente) si ha:

$$\underline{P} = \frac{1}{2\omega \varepsilon_c} |\underline{H}_o|^2 (\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}}$$

Nel caso particolare di conducibilità σ nulla, $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$ risultano ortogonali.

Esaminando ancora l'espressione in funzione di $\underline{E}$, si può dimostrare (per μ reale) che il termine complesso è tale che la sua parte reale è ortogonale ad $\underline{\alpha}$, mentre la sua parte immaginaria è ortogonale a $\underline{\beta}$.

Quindi si può scrivere in generale:

$$\underline{P} = \frac{1}{2\omega\mu} |\underline{E}_o|^2 \underline{\beta} e^{-2\underline{\alpha} \cdot \underline{r}} + j \frac{1}{2\omega\mu} |\underline{E}_o|^2 \underline{\alpha} e^{-2\underline{\alpha} \cdot \underline{r}} + (\underline{Re} + j \underline{Im})$$

con

$$\underline{Re} \cdot \underline{\alpha} = 0 \quad \underline{Im} \cdot \underline{\beta} = 0$$

Dunque nel caso di mezzi privi di perdite ($\underline{\beta} \perp \underline{\alpha}$), l'intera parte reale di $\underline{P}$ non ha componenti lungo la direzione di $\underline{\alpha}$, e l'intera parte immaginaria di $\underline{P}$ non ha componenti lungo la direzione di $\underline{\beta}$.

Questo però non significa che in generale la parte reale di $\underline{P}$ sia diretta come $\underline{\beta}$ e che la parte immaginaria sia diretta come $\underline{\alpha}$: infatti il termine $\underline{Re}$ non sarà in generale parallelo a $\underline{\beta}$, ed il termine $\underline{Im}$ non sarà parallelo ad $\underline{\alpha}$. Ciò si verifica tuttavia nei casi TE, TM e TEM, casi in cui il termine $(\underline{Re} + j \underline{Im})$ si annulla.

È comunque improprio per inciso associare senza precauzioni la parte reale del vettore di Poynting ad un flusso di potenza attiva, la parte immaginaria alla potenza reattiva.

Tornando infine all'espressione iniziale di $\underline{P}$, si noti che per un'onda piana generica il vettore di Poynting dipende dalle coordinate solo tramite il fattore esponenziale $e^{-2\underline{\alpha} \cdot \underline{r}}$. Esso è quindi costante sul generico piano equiampiezza ortogonale ad $\underline{\alpha}$. Allora se $\underline{P}$ ha una componente reale nella direzione di $\underline{\alpha}$, si ha per così dire un flusso infinito di potenza attiva attraverso il piano stesso.

Ciò avviene in mezzi con perdite, oppure quando $\underline{\alpha} = 0$ (caso in cui tutto lo spazio è equiampiezza). Questo risultato assurdo è una conseguenza dei limiti di validità fisica della soluzione onda piana.

La singola onda piana infatti (come l'onda monocromatica nel caso della dipendenza dal tempo) contraddice il principio di indeterminazione di Heisenberg. Questo non toglie che una opportuna sovrapposizione di onde piane (spettro di onde piane) possa dar luogo a soluzioni fisicamente realizzabili (così come una sovrapposizione di onde monocromatiche può dar luogo ad una dipendenza dal tempo realistica).

23.3 Vettore di Poynting per incidenza normale di onde piane uniformi

Si considerino ora le espressioni per il vettore di Poynting nel caso di incidenza normale di un'onda piana uniforme (polarizzata linearmente) sulla superficie piana di separazione fra due mezzi diversi. Si supponga il mezzo 1 (da cui proviene l'onda) privo di perdite ($\sigma_1 = 0$, $\underline{k}_1 = \underline{\beta}_1$ reale, e ζ_1 reale). L'asse z è entrante nel mezzo 2.

Nel caso di trasmissione totale, che però per incidenza normale può avvenire solo se il mezzo 2 è identico al mezzo 1, si avrebbe come è noto (indicando con gli apici i campi

incidente e riflesso e supponendo il campo elettrico polarizzato lungo x):

$$\begin{aligned}\underline{E}_1 &= \underline{E}^i = E_o \underline{x}_o e^{-j\beta z} = E_1(z) \underline{x}_o \\ \underline{H}_1 &= \underline{H}^i = H_o \underline{y}_o e^{-j\beta z} = \frac{E_o}{\zeta_1} \underline{y}_o e^{-j\beta z} = H_1(z) \underline{y}_o\end{aligned}$$

con $\beta = \beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$

Il vettore di Poynting avrebbe l'espressione:

$$\begin{aligned}\underline{P}_1 &= \frac{1}{2} \underline{E}_1 \times \underline{H}_1^* = \frac{1}{2} \underline{z}_o E_o e^{-j\beta z} \frac{E_o^* e^{j\beta z}}{\zeta_1} = \frac{1}{2} \frac{|E_o|^2}{\zeta_1} \underline{z}_o = \\ &= \frac{1}{2} E_1 H_1^* \underline{z}_o\end{aligned}$$

Esso risulterebbe puramente reale (flusso di potenza attiva nella direzione z) e indipendente da z , potendosi quindi pensare (con le debite cautele) come la potenza media (in regime sinusoidale) trasportata dall'onda per unità di superficie normale a β . Il fatto che $\underline{P}_1$ sia reale è legato al fatto che E_1 ed H_1 sono in fase (essendo $E_1 = \zeta_1 \underline{H}_1$, con ζ_1 reale, si ha $E_1 H_1^* = \zeta_1 H_1 H_1^* = \zeta_1 |H_1|^2$, reale). Si tratta di un'onda puramente progressiva.

Nel caso invece di riflessione totale (che per incidenza normale può avvenire solo se il mezzo 2 è un conduttore perfetto) si ha come è noto, nel mezzo 1:

$$\begin{aligned}\underline{E}_1 &= \underline{E}^i + \underline{E}^r = \underline{x}_o \left(E_o^i e^{-j\beta_1 z} + E_o^r e^{j\beta_1 z} \right) = \underline{x}_o E_o^i \left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z} \right) = \\ &= -\underline{x}_o E_o^i 2j \sin(\beta_1 z) = E_1(z) \underline{x}_o \\ \underline{H}_1 &= \underline{H}^i + \underline{H}^r = \underline{y}_o \left(H_o^i e^{-j\beta_1 z} - H_o^r e^{j\beta_1 z} \right) = \underline{y}_o H_o^i \left(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z} \right) = \underline{y}_o H_o^i 2 \cos(\beta_1 z) = \\ &= \underline{y}_o \frac{E_o^i}{\zeta_1} 2 \cos(\beta_1 z) = H_1(z) \underline{y}_o\end{aligned}$$

essendo $E_o^r = -E_o^i$, $H_o^r = -H_o^i$. Si noti che $H_1 \neq E_1/\zeta_1$, perché la relazione di impedenza vale singolarmente per i campi incidente e riflesso, ma non per il campo somma.

Si ha per il vettore di Poynting:

$$\begin{aligned}\underline{P}_1 &= -\frac{1}{2} \underline{z}_o E_o^i 2j \sin(\beta_1 z) \frac{E_o^{i*}}{\zeta_1} 2 \cos(\beta_1 z) = \\ &= -\underline{z}_o \frac{|E_o^i|^2}{\zeta_1} j 2 \sin(\beta_1 z) \cos(\beta_1 z) = -j \frac{|E_o^i|^2}{\zeta_1} \sin(2\beta_1 z) \underline{z}_o = \\ &= \frac{1}{2} E_1 H_1^* \underline{z}_o\end{aligned}$$

Esso risulta dipendente da z e puramente immaginario (potenza reattiva). Ciò è legato al fatto che E_1 ed H_1 sono in quadratura. Infatti se $E_1 = \pm j r H_1$, con $r \in \mathbb{R}$, si ha che

$$E_1 H_1^* = \pm j r H_1 H_1^* = \pm j r |H_1|^2$$

è una quantità puramente immaginaria. Si tratta di un'onda puramente stazionaria.

Negli altri casi $E_1 H_1^*$ risulta dotato sia di parte reale che di parte immaginaria. Si ha $E_1 = c H_1 = M e^{j\phi} H_1$, per cui:

$$E_1 H_1^* = M e^{j\phi} |H_1|^2$$

Nel caso generale, in cui non c'è riflessione totale, ma c'è ovviamente riflessione, si ha per i campi nel mezzo 1:

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 &= E_o^i \underline{x}_o e^{-j\beta_1 z} + E_o^r \underline{x}_o e^{j\beta_1 z} = E_1(z) \underline{x}_o \\ \underline{H}_1 &= H_o^i \underline{y}_o e^{-j\beta_1 z} - H_o^r \underline{y}_o e^{j\beta_1 z} = \frac{E_o^i}{\zeta_1} \underline{y}_o e^{-j\beta_1 z} - \frac{E_o^r}{\zeta_1} \underline{y}_o e^{j\beta_1 z} = H_1(z) \underline{y}_o \end{aligned}$$

Per cui si ha il vettore di Poynting:

$$\begin{aligned} \underline{P}_1 &= \underline{z}_o \frac{1}{2} \left(E_o^i e^{-j\beta_1 z} + E_o^r e^{j\beta_1 z} \right) \left(\frac{E_o^{i*}}{\zeta_1} e^{j\beta_1 z} - \frac{E_o^{r*}}{\zeta_1} e^{-j\beta_1 z} \right) = \\ &= \underline{z}_o \frac{1}{2\zeta_1} \left(|E_o^i|^2 - |E_o^r|^2 \right) - \frac{j}{\zeta_1} \underline{z}_o \operatorname{Im} \left[E_o^i E_o^{r*} e^{-2j\beta_1 z} \right] \end{aligned}$$

Quindi la potenza reale (parte reale del vettore di Poynting) è la somma algebrica delle potenze (reali) associate all'onda incidente e all'onda riflessa. Inoltre vi è una parte immaginaria, che costituisce il termine cosiddetto di interferenza, dovuto al fatto che il calcolo del vettore di Poynting non è ovviamente un'operazione lineare, quindi non si possono semplicemente sommare i vettori di Poynting delle due onde progressive componenti (incidente e riflessa). Si tratta in questo caso di un'onda in parte progressiva ed in parte stazionaria. La parte immaginaria è la sola a comparire se $|E_o^i| = |E_o^r|$, ovvero $|\Gamma_E| = 1$, riflessione totale.

Dunque nel caso generale, in cui c'è riflessione, ma non totale, per cui $|E_o^i| > |E_o^r|$, ci sarà un flusso di potenza reale nella direzione entrante nel mezzo 2 (come è ovvio, visto che bisogna alimentare in qualche modo l'onda trasmessa).

Per quanto riguarda invece la potenza reattiva, legata al termine:

$$\operatorname{Im} \left[E_o^i E_o^{r*} e^{-2j\beta_1 z} \right]$$

si può vedere che tale quantità è nulla per ogni z se e solo se $E_o^r = 0$, ossia assenza di onda riflessa. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[E_o^i E_o^{r*} e^{-2j\beta_1 z} \right] &= \operatorname{Im} \left\{ \left[\operatorname{Re} \left(E_o^i E_o^{r*} \right) + j \operatorname{Im} \left(E_o^i E_o^{r*} \right) \right] \left[\cos(2\beta_1 z) - j \sin(2\beta_1 z) \right] \right\} = \\ &= -\operatorname{Re} \left(E_o^i E_o^{r*} \right) \sin(2\beta_1 z) + \operatorname{Im} \left(E_o^i E_o^{r*} \right) \cos(2\beta_1 z) \end{aligned}$$

Essendo il seno e il coseno linearmente indipendenti, l'annullarsi dell'espressione precedente per ogni z implica che sia:

$$\operatorname{Re} \left(E_o^i E_o^{r*} \right) = \operatorname{Im} \left(E_o^i E_o^{r*} \right) = 0 \quad \implies \quad E_o^i E_o^{r*} = 0 \quad \implies \quad E_o^r = 0$$

(essendo per ipotesi $E_o^i \neq 0$).

Rimane da osservare che la parte reale del vettore di Poynting nel mezzo 1, ossia:

$$\underline{z}_o \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta_1} \left(|E_o^i|^2 - |E_o^r|^2 \right)$$

è uguale al vettore di Poynting nel mezzo 2 (che risulta reale nell'ipotesi di assenza di perdite e supponendo il mezzo 2 indefinito). Si ha infatti:

$$\underline{P}_2 = \frac{1}{2} \underline{E}_2 \times \underline{H}_2^* = \frac{1}{2} \underline{E}^t \times \underline{H}^{t*} = \frac{1}{2} \frac{|E_o^t|^2}{\zeta_2} \underline{z}_o$$

D'altra parte, dalle condizioni di continuità all'interfaccia per le componenti tangenziali del campo elettromagnetico, si aveva:

$$\begin{aligned} E_o^t &= E_o^i + E_o^r \\ H_o^t &= H_o^i - H_o^r \quad \Rightarrow \quad \frac{E_o^t}{\zeta_2} = \frac{E_o^i - E_o^r}{\zeta_1} \end{aligned}$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \frac{|E_o^t|^2}{\zeta_2} &= \frac{E_o^t E_o^{t*}}{\zeta_2} = \frac{1}{\zeta_1} (E_o^i - E_o^r) (E_o^{i*} + E_o^{r*}) = \\ &= \frac{1}{\zeta_1} (|E_o^i|^2 + E_o^i E_o^{r*} - E_o^r E_o^{i*} - |E_o^r|^2) \end{aligned}$$

Si ricordi ora che $E_o^r = \Gamma_E E_o^i$, ove Γ_E è reale nelle nostre ipotesi di assenza di perdite, essendo (mezzo 2 indefinito)

$$\Gamma_E = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}$$

dunque E_o^r ed E_o^i sono in fase. Per cui:

$$E_o^r E_o^{i*} = \Gamma_E |E_o^i|^2$$

è una quantità reale, e quindi uguale al suo coniugato $E_o^i E_o^{r*}$. Si ha allora:

$$\frac{|E_o^t|^2}{\zeta_2} = \frac{1}{\zeta_1} \left(|E_o^i|^2 - |E_o^r|^2 \right)$$

e infine:

$$\underline{P}_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta_1} \left(|E_o^i|^2 - |E_o^r|^2 \right) \underline{z}_o$$

come volevasi dimostrare, e in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

Si considerano ora le grandezze elettromagnetiche nel dominio del tempo, iniziando dal caso di polarizzazione lineare. Nel caso di onda puramente progressiva (trasmissione totale), si ha in mezzi privi di perdite (ζ reale) e supponendo per semplicità (ma senza perdita di generalità) E_o reale positivo e $\beta = \beta_1$:

$$\underline{E}(z, t) = \text{Re} \left[\underline{E}(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[E_o \underline{x}_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = E_o \underline{x}_o \cos(\omega t - \beta z)$$

Il caso di E_o genericamente complesso (cioè dotato di una fase diversa da zero e da π) può ricondursi semplicemente ad un cambiamento di origine nell'asse dei tempi. Per il campo magnetico si ha:

$$\underline{H}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{E_o}{\zeta} \underline{y}_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = \frac{E_o}{\zeta} \underline{y}_o \cos(\omega t - \beta z)$$

Da cui, per il vettore di Poynting:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z, t) &= \underline{E}(t) \times \underline{H}(t) = \underline{z}_o E_o \cos(\omega t - \beta z) \frac{E_o}{\zeta} \cos(\omega t - \beta z) = \\ &= \frac{E_o^2}{\zeta} \underline{z}_o \cos^2(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

(Si ricordi che nel dominio della frequenza $\underline{P} = (1/2)(E_o^2/\zeta) \underline{z}_o$ e che $\cos^2 x = [1 + \cos(2x)]/2$)

Ovviamente il vettore di Poynting complesso non è il fasore del vettore di Poynting nel dominio del tempo, poiché comporta un'operazione di prodotto vettoriale, non lineare rispetto al campo elettromagnetico.

Calcolando ora le densità di energia elettrica e magnetica si ha:

$$\begin{aligned} w_E(z, t) &= \frac{1}{2} \varepsilon \underline{E}(t) \cdot \underline{E}(t) = \frac{1}{2} \varepsilon E_o^2 \cos^2(\omega t - \beta z) \\ w_H(z, t) &= \frac{1}{2} \mu \underline{H}(t) \cdot \underline{H}(t) = \frac{1}{2} \mu \frac{E_o^2}{\zeta^2} \cos^2(\omega t - \beta z) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon E_o^2 \cos^2(\omega t - \beta z) = w_E \end{aligned}$$

Come si vede, le due densità di energia sono uguali, per cui l'energia totale è ripartita equamente nelle due forme.

Si può anche definire una velocità dell'energia. Infatti, pensando la velocità come lo spazio percorso dall'energia nell'unità di tempo, e considerando il flusso di energia attraverso una superficie di area unitaria, ortogonale alla direzione di propagazione, tale spazio percorso coincide numericamente con il volume occupato dall'energia che attraversa tale area nell'unità di tempo, cioè dalla potenza. Tale potenza non è altro che il modulo del vettore di Poynting. Per ottenere allora il volume cercato, basta dividere tale quantità per la densità di energia, ottenendo:

$$v_e = \frac{P(t)}{w_E(t) + w_H(t)} = \frac{(E_o^2/\zeta) \cos^2(\omega t - \beta z)}{\varepsilon E_o^2 \cos^2(\omega t - \beta z)} = \frac{1}{\zeta \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = v$$

Tale quantità v (velocità della luce nel mezzo) è anche, come è noto, la velocità di fase. Tuttavia in altri casi queste due velocità non sono necessariamente uguali. Si ricordi che la velocità dell'energia è vincolata ad essere al massimo uguale alla velocità della luce nel mezzo v , a differenza della velocità di fase, che può essere anche maggiore.

La configurazione del campo elettromagnetico è ad un certo istante ($t = 0$) del tipo in Fig. 23.1. Il periodo delle oscillazioni lungo z è $2\pi/\beta = 2\pi/(2\pi/\lambda) = \lambda$. I campi risultano in fase, ad un massimo di $\underline{E}$ corrisponde un massimo di $\underline{H}$, e così per i minimi. Al variare del tempo, le sagome si spostano rigidamente nel verso delle z positive, alla velocità di fase.

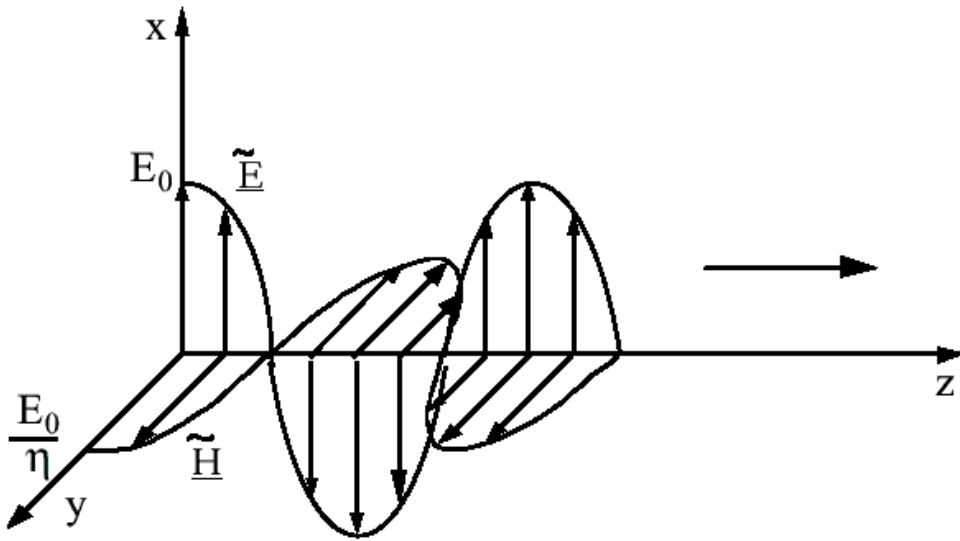


Figura 23.1:

Si consideri ora il caso di onda puramente stazionaria (riflessione totale), sempre per polarizzazione lineare. Si ha nel dominio del tempo (supponendo $E_o = E_o^i$ reale positivo):

$$\begin{aligned}\underline{E}(z, t) &= \text{Re} \left[-\underline{x}_o E_o 2j \sin(\beta z) e^{j\omega t} \right] = 2\underline{x}_o E_o \sin(\beta z) \sin(\omega t) \\ \underline{H}(z, t) &= \text{Re} \left[\frac{E_o}{\zeta} \underline{y}_o 2 \cos(\beta z) e^{j\omega t} \right] = \frac{E_o}{\zeta} 2\underline{y}_o \cos(\beta z) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

La configurazione del campo elettromagnetico è ad un certo istante ($\omega t = \pi/4$) del tipo raffigurato in Fig. 23.2. In questo caso i campi sono in quadratura, con $\underline{E}(t)$ che raggiunge il suo valore di picco quando $\underline{H}(t)$ vale zero, e viceversa. Inoltre, coerentemente con la natura stazionaria dell'onda, non c'è spostamento delle sagome nella direzione z .

In corrispondenza ai nodi dell'onda stazionaria per $\underline{E}$, ossia sui piani $\beta z = n\pi$, $z = n\pi/(2\pi/\lambda) = n\lambda/2$ con n intero, si ha per ogni t : $\underline{E} = 0$. Il fatto che il campo elettrico tangenziale sia nullo su un certo piano geometrico permetterebbe di sostituire a tale piano

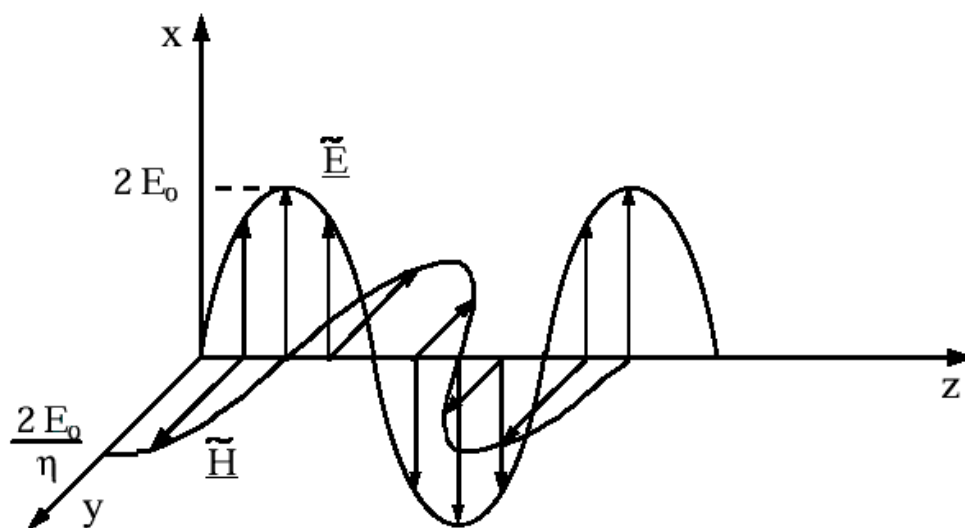


Figura 23.2:

un piano fisico perfettamente conduttore. Infatti tale sostituzione non modifica le condizioni al contorno, e quindi non altera il campo elettromagnetico. Questo fa capire come nel caso dell'onda stazionaria si abbia una situazione a compartimenti stagni, senza influenze fra queste regioni di spessore $\lambda/2$.

Per il vettore di Poynting si ha:

$$\begin{aligned}\underline{P}(z, t) &= 2 z_o E_o \sin(\beta z) \sin(\omega t) \frac{E_o}{\zeta} 2 \cos(\beta z) \cos(\omega t) = \\ &= 4 z_o \frac{E_o^2}{\zeta} \sin(\beta z) \cos(\beta z) \sin(\omega t) \cos(\omega t) = z_o \frac{E_o^2}{\zeta} \sin(2\beta z) \sin(2\omega t)\end{aligned}$$

Si trova conferma del fatto che il valor medio nel tempo è nullo (non c'è flusso di potenza in media).

Per le densità di energia si ha:

$$\begin{aligned}w_E(z, t) &= \frac{1}{2} \varepsilon 4 E_o^2 \sin^2(\beta z) \sin^2(\omega t) = 2 \varepsilon E_o^2 \sin^2(\beta z) \sin^2(\omega t) \\ w_H(z, t) &= \frac{1}{2} \mu \frac{E_o^2}{\zeta^2} 4 \cos^2(\beta z) \cos^2(\omega t) = 2 \varepsilon E_o^2 \cos^2(\beta z) \cos^2(\omega t)\end{aligned}$$

Come si vede, negli istanti in cui la densità di energia elettrica è massima, la densità di energia magnetica è zero, e viceversa. L'energia viene scambiata tra le forme elettrica e magnetica.

Si consideri ora il caso di polarizzazione circolare, e di onda puramente progressiva (trasmissione totale), ossia del tipo (fasore):

$$\underline{E} = (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z}$$

Il verso di polarizzazione è antiorario, se si guarda dal semipiano $z > 0$ (essendo $E_y = -j E_x$).

Il campo magnetico sarà dato dalla relazione:

$$\underline{H} = \frac{1}{\zeta} \underline{z}_o \times \underline{E}$$

ossia:

$$\underline{H} = \frac{1}{\zeta} \underline{z}_o \times (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} = \frac{1}{\zeta} (\underline{y}_o + j \underline{x}_o) E_o e^{-j\beta z} = j(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} e^{-j\beta z}$$

I campi $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ sono in quadratura.

Nel dominio del tempo si ha (supponendo E_o reale):

$$\underline{E}(z, t) = \text{Re} \left[(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = E_o \underline{x}_o \cos(\omega t - \beta z) + E_o \underline{y}_o \sin(\omega t - \beta z)$$

(E_o sarebbe il raggio della circonferenza)

$$\begin{aligned} \underline{H}(z, t) &= \text{Re} \left[\frac{1}{\zeta} (\underline{y}_o + j \underline{x}_o) E_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = \\ &= \frac{E_o}{\zeta} \underline{y}_o \cos(\omega t - \beta z) - \frac{E_o}{\zeta} \underline{x}_o \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

Le sagome di E_x ed E_y , H_x ed H_y si spostano rigidamente nel tempo con la velocità di fase. In questo caso una rappresentazione dinamica dell'onda ricorda un moto elicoidale nella direzione z . Si può verificare (come doveva essere, trattandosi di un'onda piana uniforme in mezzi privi di perdite) che si ha $\underline{E}(z, t) \cdot \underline{H}(z, t) = 0$ per ogni t .

Considerando ora il vettore di Poynting si ha:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z, t) &= \left[E_o \underline{x}_o \cos(\omega t - \beta z) + E_o \underline{y}_o \sin(\omega t - \beta z) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{E_o}{\zeta} \underline{y}_o \cos(\omega t - \beta z) - \frac{E_o}{\zeta} \underline{x}_o \sin(\omega t - \beta z) \right] = \\ &= \underline{z}_o \frac{E_o^2}{\zeta} \cos^2(\omega t - \beta z) + \underline{z}_o \frac{E_o^2}{\zeta} \sin^2(\omega t - \beta z) = \underline{z}_o \frac{E_o^2}{\zeta} \end{aligned}$$

Per le densità di energia si ha:

$$\begin{aligned} w_E(z, t) &= \frac{1}{2} \varepsilon \left[E_o^2 \cos^2(\omega t - \beta z) + E_o^2 \sin^2(\omega t - \beta z) \right] = \frac{1}{2} \varepsilon E_o^2 \\ w_H(z, t) &= \frac{1}{2} \mu \left[\frac{E_o^2}{\zeta^2} \cos^2(\omega t - \beta z) + \frac{E_o^2}{\zeta^2} \sin^2(\omega t - \beta z) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{\zeta^2} E_o^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E_o^2 = w_E \end{aligned}$$

Come si vede, nel caso della polarizzazione circolare non c'è variazione delle densità di potenza e di energia nel tempo e nello spazio. Si ha un flusso stazionario di potenza. Per il vettore di Poynting complesso si ha:

$$\begin{aligned}\underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} \times (-j)(\underline{x}_o + j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} e^{j\beta z} = \\ &= -\frac{1}{2} j \frac{E_o^2}{\zeta} (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \times (\underline{x}_o + j \underline{y}_o) = -\frac{1}{2} j \frac{E_o^2}{\zeta} (j \underline{z}_o + j \underline{z}_o) = \frac{E_o^2}{\zeta} \underline{z}_o \equiv \underline{P}(z, t)\end{aligned}$$

puramente reale, come doveva essere.

Nel caso invece di onda puramente stazionaria (riflessione totale) polarizzata circolarmente si ha (essendo $\Gamma_E = -1$):

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \underline{E}^i + \underline{E}^r = (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} - (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) E_o e^{j\beta z} = (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) E_o (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = \\ &= (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) (-2j) E_o \sin(\beta z) \\ \underline{H}^i &= j(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} e^{-j\beta z} \quad (\text{come già calcolato}) \\ \underline{H}^r &= \frac{1}{\zeta} (-\underline{z}_o) \times \underline{E}^r = \frac{1}{\zeta} (-\underline{z}_o) \times (-\underline{x}_o + j \underline{y}_o) E_o e^{j\beta z} = \\ &= \frac{1}{\zeta} (\underline{y}_o + j \underline{x}_o) E_o e^{j\beta z} = j \frac{E_o}{\zeta} (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) e^{j\beta z}\end{aligned}$$

Per cui:

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \underline{H}^i + \underline{H}^r = j(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} e^{-j\beta z} + j \frac{E_o}{\zeta} (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) e^{j\beta z} = \\ &= j(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = j(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} 2 \cos(\beta z) \quad (\text{in fase con } \underline{E})\end{aligned}$$

Si calcolino ora i campi istantanei:

$$\begin{aligned}\underline{E}(z, t) &= \text{Re}[(\underline{x}_o - j \underline{y}_o)(-2j) E_o \sin(\beta z) e^{j\omega t}] = -2 E_o \sin(\beta z) \text{Re}[(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) j e^{j\omega t}] = \\ &= -2 \underline{y}_o E_o \sin(\beta z) \cos(\omega t) + 2 \underline{x}_o E_o \sin(\beta z) \sin(\omega t) = \\ &= 2 E_o \sin(\beta z) [\underline{x}_o \sin(\omega t) - \underline{y}_o \cos(\omega t)] \\ \underline{H}(z, t) &= \text{Re}[j(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} 2 \cos(\beta z) e^{j\omega t}] = \\ &= \frac{E_o}{\zeta} 2 \cos(\beta z) [-\underline{x}_o \sin(\omega t) + \underline{y}_o \cos(\omega t)] = \\ &= -\frac{E_o}{\zeta} 2 \cos(\beta z) [\underline{x}_o \sin(\omega t) - \underline{y}_o \cos(\omega t)]\end{aligned}$$

Si noti che in questo caso $\underline{E}(z, t)$ ed $\underline{H}(z, t)$ sono paralleli, e di modulo non dipendente da t (polarizzazione circolare). La configurazione del campo sarà del tipo (ad esempio per $\omega t = \pi/2$) di Fig. 23.3.

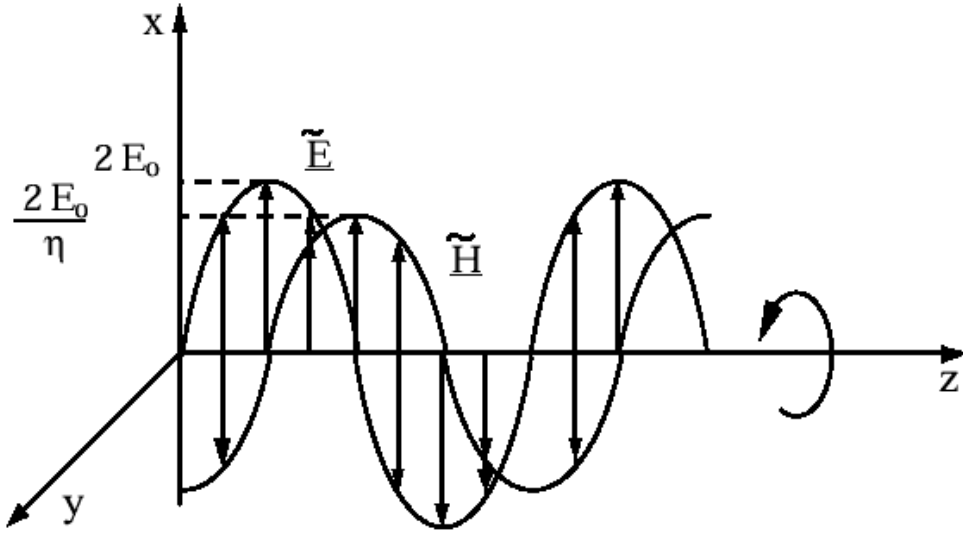


Figura 23.3:

Per le varie quantità si ha:

$$\begin{aligned}
 \underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) (-2j) E_o \sin(\beta z) \times (-j) (\underline{x}_o + j \underline{y}_o) \frac{E_o}{\zeta} 2 \cos(\beta z) = \\
 &= -\frac{E_o^2}{\zeta} 2 \sin(\beta z) \cos(\beta z) (\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \times (\underline{x}_o + j \underline{y}_o) = \\
 &= -\frac{E_o^2}{\zeta} \sin(2\beta z) [(\underline{x}_o - j \underline{y}_o) \times (\underline{x}_o + j \underline{y}_o)] = -\frac{E_o^2}{\zeta} \sin(2\beta z) (j \underline{z}_o + j \underline{z}_o) = \\
 &= -2j \frac{E_o^2}{\zeta} \sin(2\beta z) \underline{z}_o
 \end{aligned}$$

puramente immaginario, come doveva essere. Nel dominio del tempo si ha:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}(z, t) &= \underline{E}(z, t) \times \underline{H}(z, t) = \\
 &= 2 E_o \sin(\beta z) [\underline{x}_o \sin(\omega t) - \underline{y}_o \cos(\omega t)] \times \left(-\frac{E_o}{\zeta} \right) 2 \cos(\beta z) [\underline{x}_o \sin(\omega t) - \underline{y}_o \cos(\omega t)] = \\
 &= -4 \frac{E_o^2}{\zeta} \sin(\beta z) \cos(\beta z) [-\underline{z}_o \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \underline{z}_o \cos(\omega t) \sin(\omega t)] = 0
 \end{aligned}$$

$$w_E(z, t) = \frac{1}{2} \varepsilon 4 E_o^2 \sin^2(\beta z) [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = 2\varepsilon E_o^2 \sin^2(\beta z)$$

$$w_H(z, t) = \frac{1}{2} \mu \frac{E_o^2}{\zeta^2} 4 \cos^2(\beta z) [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = 2\varepsilon E_o^2 \cos^2(\beta z)$$

Si noti l'indipendenza dal tempo delle densità di potenza e di energia, al contrario di ciò che accadeva per l'onda stazionaria polarizzata linearmente. Tuttavia l'onda stazionaria polarizzata circolarmente si può sempre vedere come sovrapposizione di due onde stazionarie polarizzate linearmente, per le quali vale il discorso dell'energia oscillante fra le due forme elettrica e magnetica.

Si considerino ora le eventuali modifiche alla polarizzazione in caso di riflessione. Si esaminino il caso di incidenza obliqua. Se l'onda incidente è polarizzata linearmente e la superficie di discontinuità è piana, anche le onde riflesse e rifratte saranno polarizzate linearmente. Se invece le superfici riflettenti sono curve oppure ruvide, esse introducono una componente di campo ortogonale a quella incidente, e si parla di polarizzazione incrociata (*cross polarization*).

Se l'onda incidente sulla superficie piana è invece polarizzata circolarmente, e se il secondo mezzo è un conduttore perfetto (riflessione totale), la polarizzazione circolare è mantenuta, ma viene invertito il verso di rotazione. Se il secondo mezzo è un dielettrico perfetto, le onde riflesse e rifratte risultano in generale polarizzate ellitticamente. L'onda riflessa ha verso opposto di rotazione, l'onda rifratta verso concorde.

Nel caso di polarizzazione incidente ellittica, se il mezzo 2 è un conduttore perfetto si ha per l'onda riflessa un'inversione del verso di rotazione, ma viene mantenuto il rapporto fra i semiassi. Invece se il mezzo 2 è un dielettrico perfetto, nell'onda riflessa e rifratta viene alterato il rapporto fra i semiassi.

Queste modifiche nel caso del dielettrico perfetto sono dovute al fatto che la generica polarizzazione ellittica si può come si è visto decomporre nella somma di due polarizzazioni lineari (incidenza orizzontale e incidenza verticale) e che nei due casi i coefficienti di riflessione e di trasmissione hanno espressioni diverse, per cui si ha una deformazione.

Capitolo 24

Carta di Smith

24.1 Adattamento con uno stub

L'adattamento della linea può essere ottenuto mediante l'uso di uno stub, che è un tratto di linea di trasmissione senza perdite, chiuso in corto circuito (potrebbe anche essere chiuso in circuito aperto), e di lunghezza opportuna. Si vuole cioè adattare un certo carico, che indichiamo con l'ammettenza normalizzata $\hat{Y}_L = \hat{G}_L + j\hat{B}_L$, ad una linea di ammettenza caratteristica Y_0 : ad una certa distanza l dal carico si pone in parallelo alla linea uno stub di lunghezza l_1 e di ammettenza caratteristica Y_1 . Le quantità da determinare sono l ed l_1 . Il carico può essere qualsiasi, purché non puramente immaginario. Si ricordi in proposito che l'adattamento con trasformatore a $\lambda/4$ è utilizzabile solo per carichi reali.

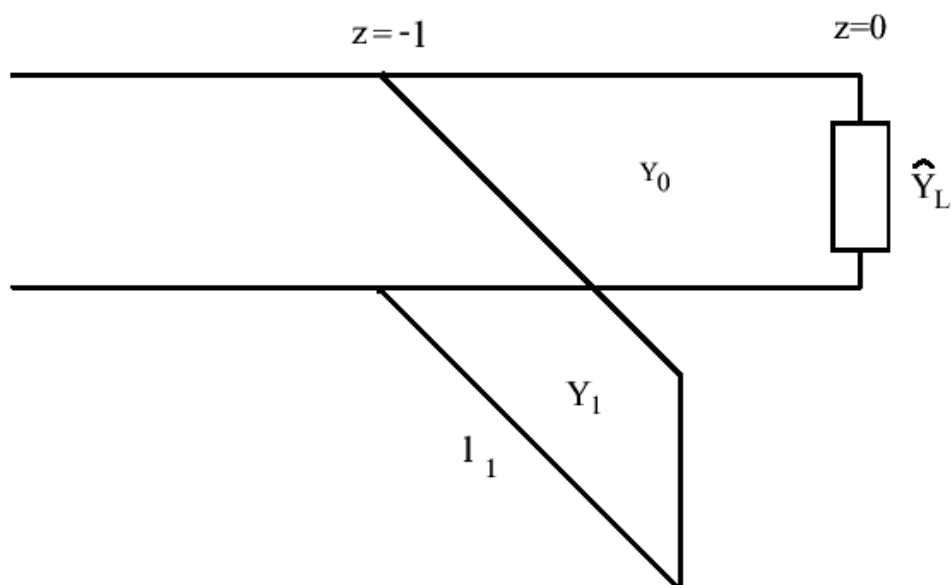


Figura 24.1:

Consideriamo a tale scopo il diagramma di Smith per le ammettenze. Sia L il punto rappresentativo dell'ammettenza di carico $\hat{G}_L + j\hat{B}_L$. Essendo la linea supposta priva di perdite, il modulo del coefficiente di riflessione deve mantenersi costante lungo la linea stessa. Spostandoci dal carico verso il generatore (cioè nel verso negativo di z) dovremo muoverci sul diagramma di Smith lungo la circonferenza di centro O' e passante per L , in senso orario, fino ad arrivare alla sezione della linea nella quale si ha $\hat{G} = 1$. Si noti che per carichi puramente immaginari questa condizione non sarebbe ottenibile.

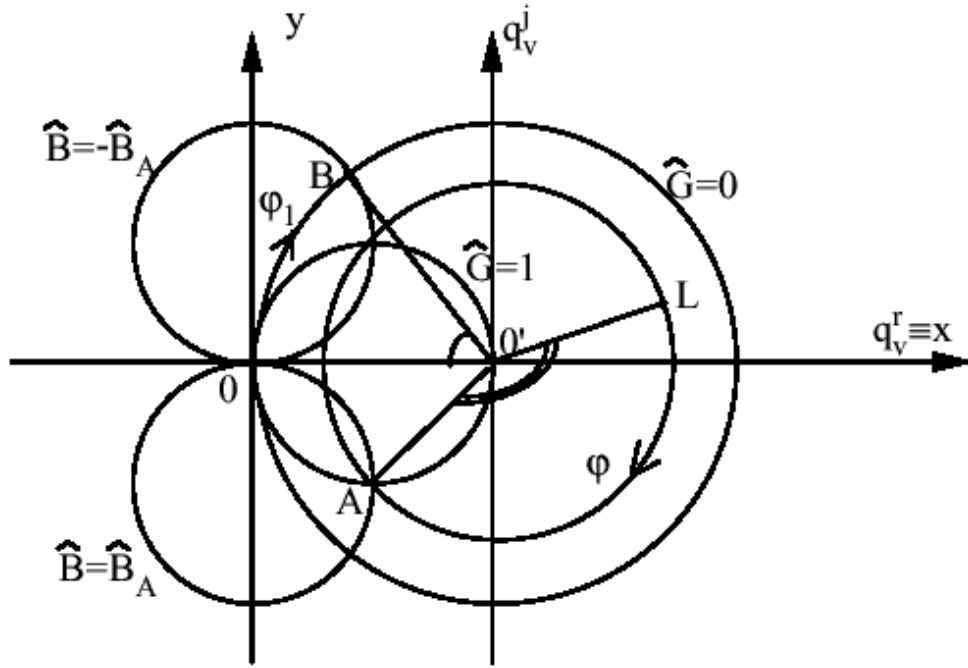


Figura 24.2:

Il punto corrispondente è quello indicato con A . Ma in tale punto $\hat{B} \neq 0$: nel nostro caso $\hat{B}_A > 0$, appartenendo A ad una circonferenza che si trova al di sotto dell'asse x . Quindi per ottenere l'adattamento, cioè la condizione $\hat{Y} = 1$, ossia $\hat{G} = 1$ e $\hat{B} = 0$, si deve aggiungere in parallelo alla linea una suscettanza non normalizzata pari a $-\hat{B}_A Y_0$. Ciò viene realizzato ponendo lo stub nella sezione $z = -l$ corrispondente al punto A , in parallelo alla linea principale.

La lunghezza l si può ottenere misurando l'angolo φ in radianti ($1 \text{ rad} \cong 57.3^\circ$) che corrisponde all'arco LA , e ricordando che tale angolo corrisponde alla variazione di fase del coefficiente di riflessione lungo il tratto l . Per cui si ha:

$$\varphi = 2\beta l = 2 \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{4\pi}{\lambda} l \implies l = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi$$

Per quanto riguarda la lunghezza d'onda, se la linea principale è una schematizzazione matematica di una struttura guidante che opera nel modo TEM (ad esempio cavo coassiale

o linea bifilare) la lunghezza d'onda da prendere in considerazione è quella nello spazio libero, ossia $\lambda = v/f$, ove è nota la frequenza f alla quale si opera, e v è la velocità della luce nel mezzo. Lo stesso dicasi quando applichiamo il formalismo delle linee di trasmissione ad onde piane uniformi (e quindi TEM) che attraversano un mezzo stratificato.

Se invece la linea principale schematizza una guida d'onda, è necessario prendere in considerazione la lunghezza d'onda in guida:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_t^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2}}$$

ove ω è nota e k_t^2 è quello del modo in cui opera la guida (in genere il modo dominante).

Occorre ora determinare la lunghezza l_1 da dare allo stub. L'ammettenza d'ingresso di uno stub (cioè di una linea chiusa in corto circuito) è puramente reattiva (cioè puramente immaginaria) ed è pari a:

$$Y_S = -j Y_1 \cot(\beta_1 l_1) = j B_S$$

ossia:

$$B_S = -Y_1 \cot(\beta_1 l_1)$$

È necessario dunque, per l'adattamento, che sia $B_S = -\hat{B}_A Y_o$. Ma $B_S = \hat{B}_S Y_1$, per cui dovrà aversi

$$\hat{B}_S = -\hat{B}_A \frac{Y_o}{Y_1}$$

Considerando allora adesso sulla carta di Smith la linea stub, si deve partire dal suo carico, cioè dal corto circuito, corrispondente al punto origine O ; ruotare in senso orario lungo la circonferenza $\hat{G} = 0$ fino al punto che rappresenta la $\hat{B}_S$. Nel caso semplice considerato in Fig. 24.2 in cui lo stub e la linea principale abbiano la stessa ammettenza caratteristica si ha $\hat{B}_S = -\hat{B}_A$ e si ottiene il punto B , che giace sulla circonferenza simmetrica rispetto a quella di A . Misurando poi l'angolo φ_1 corrispondente all'arco OB si ottiene la lunghezza l_1 dello stub in funzione della lunghezza d'onda.

Abbiamo appena visto come con la stessa carta di Smith è possibile trattare insieme linee con ammettenze caratteristiche diverse. È questa l'utilità di considerare ammettenze normalizzate.

L'adattamento con un solo stub ha lo svantaggio che la posizione in cui devo applicare lo stub, cioè la lunghezza l , varia al variare del carico. Tale inconveniente è superato con il doppio stub.

24.2 Adattamento con doppio stub

Un ulteriore modo di realizzare l'adattamento di una linea a un carico $\hat{Y}_L$ è quello di usare due stubs: uno posto sul carico, e l'altro a distanza $\lambda/4$. Supponiamo inoltre per semplicità che i due stubs abbiano la stessa ammettenza caratteristica della linea principale.

Si rappresenta sul diagramma di Smith la $\hat{Y}_L = \hat{G}_L + j \hat{B}_L$ (punto L). Mediante il primo stub (ammettenza d'ingresso puramente reattiva), inserito in parallelo al carico, si ottiene

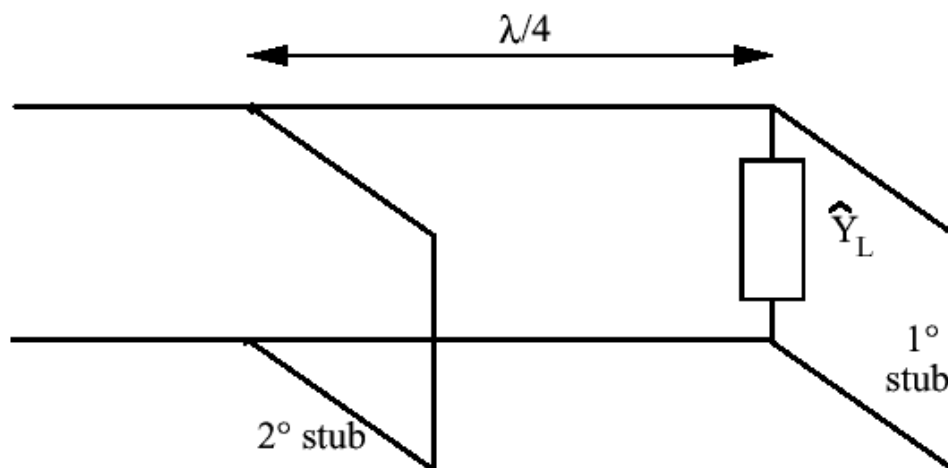


Figura 24.3:

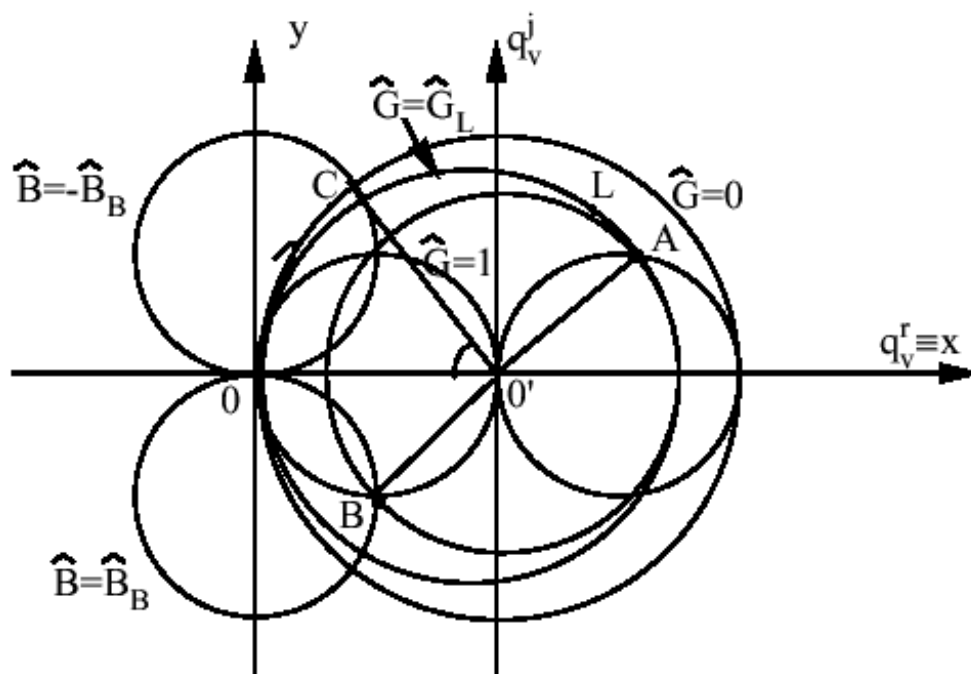


Figura 24.4:

l'effetto di variare la parte immaginaria lasciando uguale la parte reale: quindi regolando opportunamente la lunghezza dello stub ci si muove lungo la circonferenza $\hat{G} = \hat{G}_L$ passante per L . Si vuole arrivare fino al punto A , intersezione di tale circonferenza con quella simmetrica della circonferenza $\hat{G} = 1$ rispetto all'origine del piano Γ_v . La lunghezza dello stub deve essere tale che la suscettanza di ingresso di esso, sommata alla suscettanza $\hat{B}_L$, sia pari alla suscettanza del punto A .

Partendo quindi dal punto O , che rappresenta il corto circuito ($\Gamma_v = -1$) che chiude lo stub, ci si deve muovere in senso orario lungo la circonferenza più esterna $\hat{G} = 0$, sulla quale è $|\Gamma_v| = 1$, fino al punto di intersezione con la circonferenza di suscettanza normalizzata pari a $\hat{B}_A - \hat{B}_L$.

Spostandosi ora verso il generatore si deve attraversare il tratto di linea lungo $\lambda/4$, che viene detto *trasformatore in quarto d'onda*. Si può vedere che l'ammettenza normalizzata vista in ingresso di una tale linea è l'inverso di quella su cui la linea è terminata, cioè chiusa. Spostarsi lungo la linea di $\lambda/4$ corrisponde a muoversi lungo la circonferenza con centro in O' e passante per A (perché il modulo di Γ_v si mantiene costante), in senso orario perché si va verso il generatore, e di un angolo pari a π .

Si giunge così al punto B , che per ragioni di simmetria giace sulla circonferenza $\hat{G} = 1$. Ed è proprio per questo che in precedenza ci si è posizionati sulla circonferenza simmetrica, poiché essa è ovviamente il luogo dei punti che dopo una rotazione di 180° finiscono sulla circonferenza $\hat{G} = 1$.

Ricordando ora che la condizione di adattamento $\hat{Y} = 1$ corrisponde ad avere $\hat{G} = 1$ e $\hat{B} = 0$, occorre agire sulla suscettanza. Allo scopo, dopo la linea lunga $\lambda/4$ viene inserito in parallelo il secondo stub, la cui lunghezza dovrà essere tale che la sua suscettanza d'ingresso sia uguale ed opposta alla suscettanza relativa al punto B . Occorrerà al solito partire dal punto O e ruotare in senso orario sulla circonferenza $\hat{G} = 0$, fino ad intersecare la circonferenza $\hat{B} = -\hat{B}_B$ nel punto C . L'angolo corrispondente all'arco OC individua la lunghezza del secondo stub in termini di λ .

Si noti infine che il metodo dell'adattamento con doppio stub non è applicabile a carichi qualsiasi: occorre infatti, come è evidente dalla costruzione geometrica fatta, che il punto L sia esterno alla circonferenza $\hat{G} = 1$, cioè dev'essere $\hat{G}_L < 1$.

Un'osservazione generale su questi metodi di adattamento è che essi sono *a banda stretta*, ossia la condizione di adattamento si ottiene rigorosamente solo per una frequenza ben precisa. Infatti basti pensare che i vari tratti di linea vengono dimensionati in funzione della lunghezza d'onda, la quale varia se si cambia frequenza. Per frequenze poco lontane da quella di adattamento rigoroso si avrà una situazione di quasi adattamento, che però può ancora andar bene dal punto di vista pratico. Le specifiche pratiche del problema determinano quindi la banda di utilizzabilità.

24.3 Rapporto di onda stazionaria

Il rapporto di onda stazionaria (*Standing Wave Ratio*) è definito dalla:

$$(\text{VSWR}) \quad \Psi_V = \frac{|V(z)|_{\text{MAX}}}{|V(z)|_{\text{min}}}$$

Per il modulo della tensione si ha:

$$\begin{aligned} |V(z)| &= |V^+(z) + V^-(z)| = |V^+(z)| \left| 1 + \frac{V^-(z)}{V^+(z)} \right| = \\ &= |V^+ e^{-jkz}| |1 + \Gamma_v(z)| = |V^+ e^{-jkz}| |1 + \Gamma_v(0) e^{2jkz}| = \\ &= |V^+ e^{-jkz}| \left| 1 + |\Gamma_v(0)| e^{j[2kz + \angle \Gamma_v(0)]} \right| \end{aligned}$$

Nell'ipotesi da noi assunta di linea priva di perdite si ha $k = \beta$ e $|\Gamma_v| = \text{cost} = |\Gamma_v(0)|$, per cui:

$$\begin{aligned} |V(z)| &= |V^+| \left| 1 + |\Gamma_v| e^{j[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)]} \right| = \\ &= |V^+| \left| 1 + |\Gamma_v| \cos[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] + j |\Gamma_v| \sin[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] \right| \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} |V(z)|^2 &= |V^+|^2 \left\{ 1 + |\Gamma_v| \cos[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] \right\}^2 |V^+|^2 \left\{ |\Gamma_v| \sin[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] \right\}^2 = \\ &= |V^+|^2 \left\{ 1 + |\Gamma_v|^2 \cos^2[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] + 2|\Gamma_v| \cos[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] + \right. \\ &\quad \left. |\Gamma_v|^2 \sin^2[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] \right\} = \\ &= |V^+|^2 \left\{ 1 + |\Gamma_v|^2 + 2|\Gamma_v| \cos[2\beta z + \angle \Gamma_v(0)] \right\} \end{aligned}$$

Si ha quindi che $|V(z)|^2$ è una funzione sinusoidale a valor medio ovviamente positivo e con periodo

$$p = \frac{2\pi}{2\beta} = \frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2}$$

Nel caso di adattamento ($\Gamma_v = 0$) la sinusoide si appiattisce sul suo valor medio, per cui $|V(z)|^2 = |V^+|^2$ ossia $|V(z)| = |V^+|$, i massimi e i minimi coincidono e si ha $\Psi_v = 1$. Nel caso opposto di riflessione totale ($|\Gamma_v| = 1$) i minimi toccano l'asse z e si ha $|V(z)|_{\text{min}} = 0$ e $\Psi_v = +\infty$.

Per quanto riguarda l'andamento di $|V(z)|$, sarà anch'essa una funzione periodica di z (non sinusoidale), di periodo $\lambda/2$. Ovviamente i valori di z per i quali $|V(z)|$ sarà massimo o minimo saranno gli stessi per cui sarà massimo o minimo $|V(z)|^2$. Per trovare il massimo ed il minimo basta ovviamente indagare su un tratto lungo $\lambda/2$.

I massimi si avranno per:

$$\cos(2\beta z + \varphi_L) = +1$$

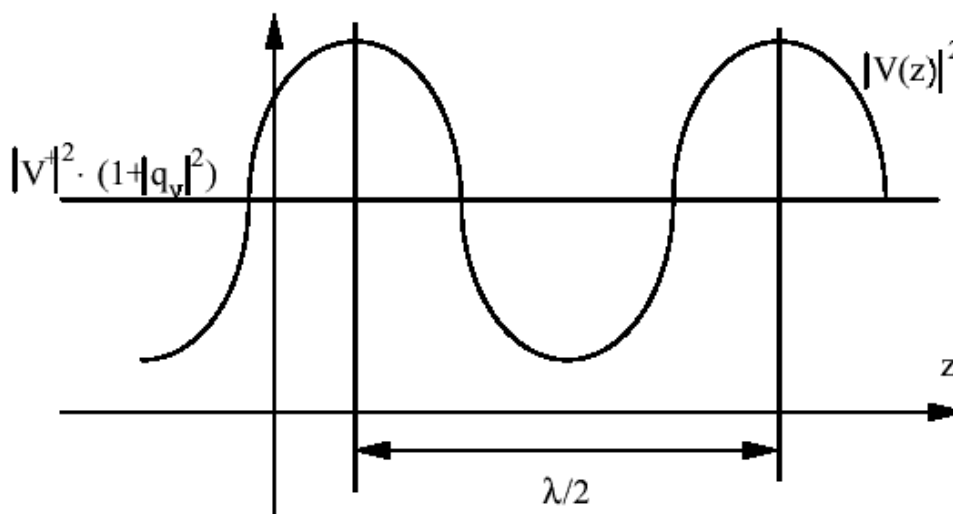


Figura 24.5:

avendo indicato con $\varphi_L = \angle \Gamma_v(0)$ la fase del coefficiente di riflessione sul carico, ossia per $z = 0$. Dovrà essere allora:

$$2\beta z + \varphi_L = 2n\pi \implies 2\frac{2\pi}{\lambda}z = -\varphi_L + 2n\pi \implies$$

$$z_{\text{MAX}} = -\varphi_L \frac{\lambda}{4\pi} + \frac{\lambda}{4\pi} 2n\pi = -\varphi_L \frac{\lambda}{4\pi} + \frac{n\lambda}{2}$$

Poiché i valori di z che ci interessano sono quelli negativi o nulli, avremo $n = 0, -1, -2, \dots$. Il valore $n = +1$ non va bene, visto che si suppone $0 \leq \varphi_L \leq 2\pi$. La distanza fra il carico e il punto di massimo sarà:

$$d_{\text{MAX}} = -z_{\text{MAX}} = \varphi_L \frac{\lambda}{4\pi} - n \frac{\lambda}{2} = \varphi_L \frac{\lambda}{4\pi} + m \frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{d_{\text{MAX}}}{\lambda} = \frac{\varphi_L}{4\pi} + m/2 \quad 0 \leq \varphi_L \leq 2\pi$$

I minimi invece si avranno per:

$$\cos[2\beta z + \varphi_L] = -1$$

$$2\beta z + \varphi_L = (2n + 1)\pi$$

$$z_{\text{min}} = -\varphi_L \frac{\lambda}{4\pi} + 2n\pi \frac{\lambda}{4\pi} + \pi \frac{\lambda}{4\pi} = -\varphi_L \frac{\lambda}{4\pi} + n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad n = 0, -1, -2, \dots$$

$$\frac{d_{\text{min}}}{\lambda} = \frac{\varphi_L}{4\pi} + m/2 - 1/4 \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 \leq \varphi_L < 2\pi$$

Nelle ultime due espressioni il valore nullo dell'indice può essere preso solo se $\varphi_L \geq \pi$.

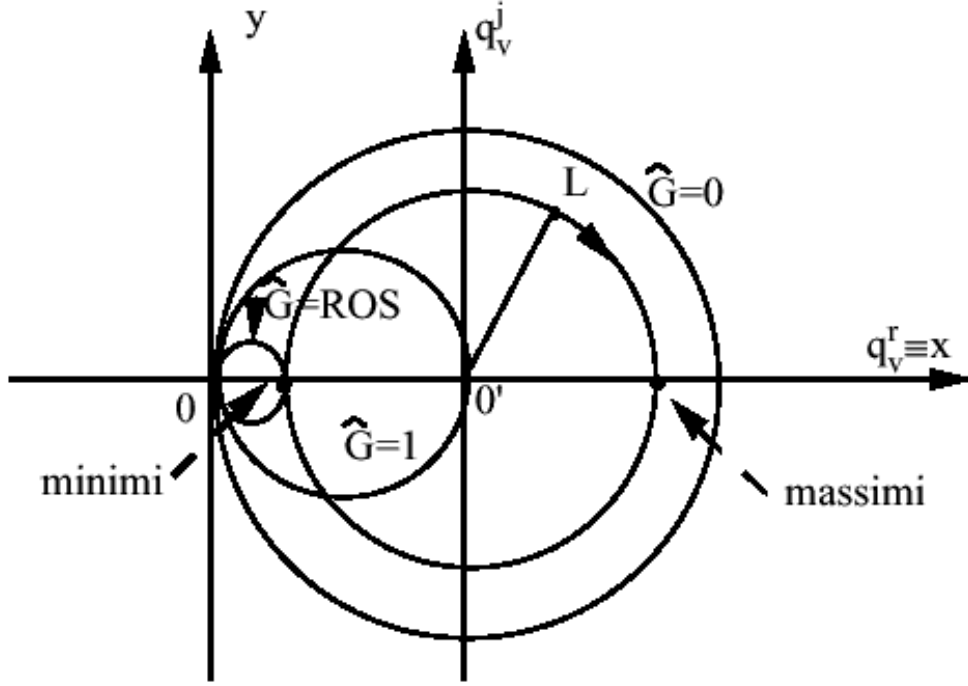


Figura 24.6:

Come si vede, e come doveva essere, un minimo dista $\lambda/4$ dai massimi adiacenti. Sul diagramma di Smith è immediato individuare questi massimi e minimi (Fig. 24.6). Una volta fissato il carico (punto L), e quindi la circonferenza di centro O' lungo la quale ci si deve muovere in senso orario, i massimi corrispondono ai multipli di 2π per la fase del coefficiente di riflessione, i minimi ai multipli dispari di π . Le distanze d_{MAX} e d_{min} in termini di lunghezza d'onda sono al solito ricavabili misurando gli angoli a partire dal punto L . Come si vede, il fatto di incontrare prima un massimo e poi un minimo, o viceversa, dipende dalla posizione del carico.

Per ricavare ora il rapporto d'onda stazionaria sulla carta di Smith delle ammettenze, osserviamo che in corrispondenza di un minimo il coefficiente di riflessione ha fase π , per cui ci troviamo all'interno del segmento $\overline{OO'}$, dove $\hat{B} = 0$ e $\hat{G} > 1$. Ricordando allora che:

$$\Gamma_v = \frac{1 - \hat{Y}}{1 + \hat{Y}} = \frac{1 - \hat{G}}{1 + \hat{G}}$$

da cui:

$$|\Gamma_v| = \frac{\hat{G} - 1}{\hat{G} + 1}$$

$$\Psi_v = \frac{1 + |\Gamma_v|}{1 - |\Gamma_v|} = \frac{1 + \frac{\hat{G} - 1}{\hat{G} + 1}}{1 - \frac{\hat{G} - 1}{\hat{G} + 1}} = \frac{\frac{\hat{G} + 1 + \hat{G} - 1}{\hat{G} + 1}}{\frac{\hat{G} + 1 - \hat{G} + 1}{\hat{G} + 1}} = \frac{2\hat{G}}{2} = \hat{G}$$

Dunque Ψ_v (che è lo stesso per qualsiasi sezione della linea) coincide con l'ammettenza normalizzata che si vede in una sezione di minimo. Quindi il punto di minimo sulla carta di Smith individua la circonferenza $\hat{G} = \Psi_v$. Si tratta fra l'altro del valore massimo di $\hat{G}$ ottenibile lungo la linea.

Se si conosce allora (ad esempio con una misura) il rapporto d'onda stazionaria (che viene misurato usando la sua definizione) di una linea chiusa su un certo carico, e si conosce inoltre la distanza dal carico del primo minimo di tensione (i minimi sono più facilmente, più precisamente, localizzabili dei massimi), si può determinare il coefficiente di riflessione (in modulo e fase) sul carico (cioè il punto rappresentativo del carico sulla carta), e quindi l'ammettenza del carico stesso.

Infatti, noto Ψ_v , è individuata la circonferenza $\hat{G} = \Psi_v$, ed il punto di minimo A . Ci si dovrà quindi muovere sulla circonferenza $|\Gamma_v| = \cos t$ passante per A , ma stavolta verso il carico e quindi in senso antiorario. Nota poi la distanza d del primo minimo dal carico, si ottiene l'angolo di cui ci si deve spostare, ossia $\varphi = (4\pi/\lambda)d$, fino a giungere al punto L rappresentativo del carico, ricavando così $\hat{G}_L$ e $\hat{B}_L$.

Si noti infine che molte delle considerazioni fatte devono essere modificate per dualità se si lavora invece sulla carta di Smith delle impedenze.

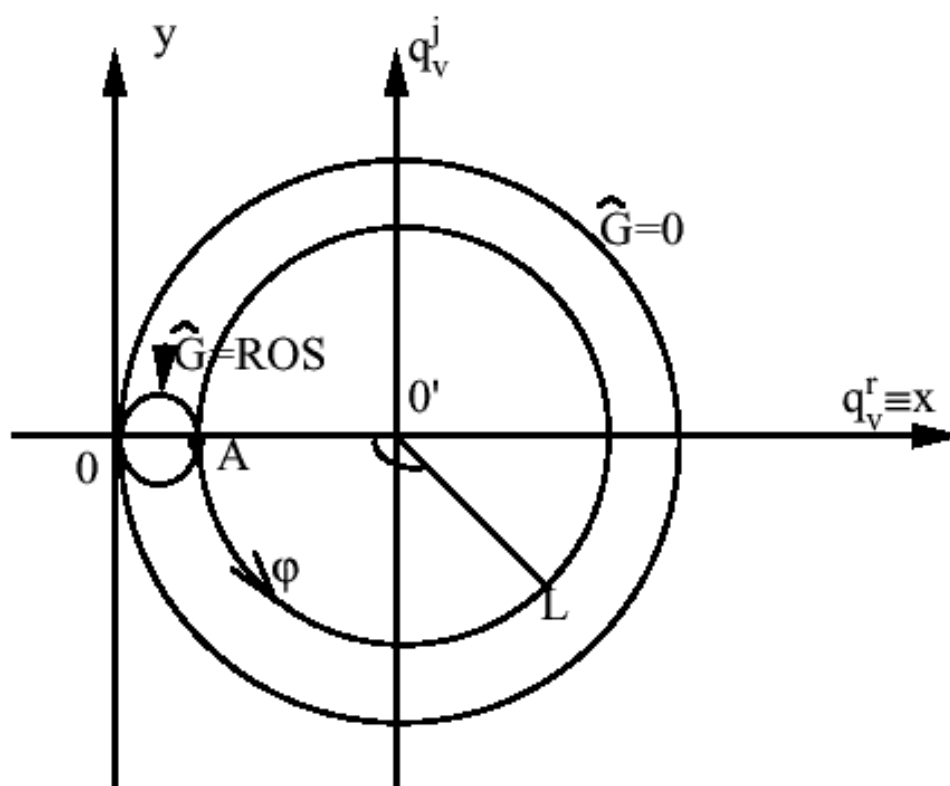


Figura 24.7:

Parte IV

Bibliografia

Capitolo 25

Bibliografie

Vedendo infatti la massa di numeri e l'effettiva difficoltà per chi desidera inoltrarsi nelle narrazioni storiche, a causa della vastità della materia, ci siamo preoccupati di offrire diletto a coloro che amano leggere, facilità a quanti intendono ritenere nella memoria, utilità a tutti gli eventuali lettori. Per noi certo, che ci siamo sobbarcati la fatica del sunteggiare, l'impresa non si presenta facile: ci vorranno sudori e veglie, così come non è facile preparare un banchetto e accontentare le esigenze altrui; tuttavia per far cosa gradita a molti ci sarà dolce sopportare la fatica, lasciando all'autore la completa esposizione dei particolari, curandoci invece di procedere secondo gli schemi di un riassunto.

(2 Mac 2, 24-28)

Il leggere rende un uomo completo; il parlare lo rende pronto; e lo scrivere lo rende preciso.

.....

Alcuni libri devono essere assaggiati, altri trangugiati, e alcuni, rari, masticati e digeriti.

(F. Bacon, Essays, 50, Of Studies)

I profeti hanno scritto i libri; sono venuti i nostri padri e li hanno messi in pratica; quelli dopo di loro li hanno imparati a memoria; infine è venuta questa generazione che li ha copiati e li ha riposti inutilizzati sulle mensole.

(Apoftegmi anonimi dei Padri del deserto)

Le opinioni sono fonte di felicità a buon prezzo! Apprendere la vera essenza delle cose, anche se si tratta di cose di minima importanza, costa una grande fatica.

(Erasmus da Rotterdam, Elogio della follia, XL, VII)

25.1 Bibliografie dei vari capitoli

25.1.1 Capitolo 3

- [1] C. Di Nallo, *Studio di metodi di analisi generalizzata per la caratterizzazione di guide d'onda a microonde e onde millimetriche*. Tesi di dottorato di ricerca in elettromagnetismo applicato e scienze elettrofisiche, Università “La Sapienza” di Roma, febbraio 1996, capitolo 4.

Sezione 3.4

- [2] C. Di Nallo, F. Frezza, A. Galli, G. Gerosa e P. Lampariello, “A Boundary-Element-Method formulation for the electromagnetic coupling between dielectric waveguide and resonators”, *Computational Mechanics*, vol. 13, n. 1/2, pp. 45–54, novembre 1993.
- [3] F. L. Mesa, R. Marqués e M. Horno, “A general algorithm for computing the bidimensional spectral Green dyad in multilayered complex bianisotropic media: the equivalent boundary method”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-39, pp. 1640–1649, settembre 1991.

25.1.2 Capitolo 7

- [4] C. Di Nallo, F. Frezza, A. Galli, G. Gerosa e P. Lampariello, “A boundary-element-method formulation for the electromagnetic coupling between dielectric waveguide and resonators”, *Computational Mechanics*, vol. 13, n. 1/2, pp. 45–54, novembre 1993.
- [5] N. Morita, N. Kumagai e J. R. Mautz, *Integral Equation Methods for Electromagnetics*, pp. 136–140. Artech House, Norwood, MA, 1990.
- [6] F. Olyslager e D. De Zutter, “Rigorous boundary integral equation solution for general isotropic and uniaxial anisotropic dielectric waveguides in multilayered media including losses, gain and leakage”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-41, pp. 1385–1392, agosto 1993.
- [7] J. R. James e I. N. L. Gallett, “Point-matched solutions for propagating modes on arbitrarily-shaped dielectric rods”, *The Radio Science and Electronic Engineer*, vol. 42, pp. 103–113, marzo 1972.
- [8] L. Lewin, “On the restricted validity of point matching techniques”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-18, pp. 1041–1047, dicembre 1970.
- [9] C. A. Brebbia e S. Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Butterworths, London, UK, 1980.

- [10] C. Di Nallo, *Studio di metodi di analisi generalizzata per la caratterizzazione di guide d'onda a microonde e onde millimetriche*. Tesi di dottorato di ricerca in Elettromagnetismo applicato e scienze elettrofisiche, Università "La Sapienza" di Roma, febbraio 1996, capitolo 1.

25.1.3 Capitolo 11

- [11] P. Mandarini, *Teoria dei Segnali*, La Goliardica, Roma, 1976.
- [12] A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, *Lezioni di Complementi di Matematica*, Veschi, Roma, 1972.
- [13] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1965.
- [14] J. W. Goodman, *Laser Speckle and Related Phenomena*, Ed. J. C. Dainty, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [15] J. C. Dainty, *Progress in Optics*, vol. 14, Ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [16] F. G. Tricomi, *Istituzioni di Analisi Superiore*, Cedam, Padova, 1970.
- [17] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [18] F. Riesz, B. Sz-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar, New York, 1955.
- [19] V. Smirnov, *Cours de Mathematiques Superieures*, Tome IV, MIR, Mosca, 1975.
- [20] W. Pogorzelski, *Integral Equations and their Applications*, vol. I, Pergamon Oxford, 1966.

25.1.4 Capitolo 12

- [21] P. Mandarini, *Teoria dei Segnali*, La Goliardica, Roma, 1976.
- [22] A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, *Lezioni di Complementi di Matematica*, Veschi, Roma, 1972.
- [23] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1965.
- [24] J.W. Goodman, *Laser Speckle and Related Phenomena*, Ed. J.C. Dainty, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [25] J.C. Dainty, *Progress in Optics*, Vol. 14, Ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, 1976.

- [26] F.G. Tricomi, *Istituzioni di Analisi Superiore*, Cedam, Padova, 1970.
- [27] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [28] F. Riesz, B. Sz-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar, New York, 1955.
- [29] V. Smirnov, *Cours de Mathematiques Superieures*, Tome IV, MIR, Mosca, 1975.
- [30] W. Pogorzelski, *Integral Equations and their Applications*, Vol. I, Pergamon Oxford, 1966.
- [31] P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Mc-Graw-Hill, New York, 1953.
- [32] M. Abramovitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- [33] D. Slepian, *Journal of Mathematics and Physics*, 44, 99, 1965.
- [34] D. Slepian, E. Sonnenblich, *Bell Syst. Tech. J.*, 44, 1745, 1965.
- [35] D. Slepian, H.O. Pollak, *Bell Syst. Tech. J.*, 40, 43, 1961.
- [36] H.J. Landau, H.O. Pollak, *Bell Syst. Tech. J.*, 40, 65, 1961.
- [37] H.J. Landau, H.O. Pollak, *Bell Syst. Tech. J.*, 41, 1295, 1962.
- [38] D. Slepian, *Bell Syst. Tech. J.*, 43, 3009, 1964.
- [39] H.J. Landau, *Acta math. Stockh.*, 117, 37, 1967.

25.1.5 Capitolo 13

- [40] A. A. Oliner e K. S. Lee, “The nature of the leakage from higher-order modes on microstrip lines”, *IEEE Intl. Microwave Symp. Digest*, Baltimora MD, pp. 119–122, giugno 1986.
- [41] H. Shigesawa, M. Tsuji e A. A. Oliner, “Conductor-backed slotline and coplanar waveguide: Dangers and full-wave analysis” *IEEE Intl. Microwave Symp. Digest*, New York, NY, pp. 199–202, maggio 1988
- [42] M. Tsuji, H. Shigesawa e A. A. Oliner, “Printed-circuit waveguide with anisotropic substrates: A new leakage effect”, *IEEE Intl. Microwave Symp. Digest*, Long Beach, CA, pp. 783–786, giugno 1989.
- [43] T. Tamir, A. A. Oliner, *Complex guided waves: Part 1. Fields at an interface*, Proc. IEE, vol. 110, pp. 310–324, febbraio 1963.

- [44] T. Tamir, A. A. Oliner, *Complex guided waves: Part 2. Relation to radiation patterns*, Proc. IEE, vol. 110, pp. 325–334, febbraio 1963.
- [45] J. Boukamp, R. H. Jansen *Spectral domain investigation of surface wave excitation and radiation by microstrip lines and microstrip disk resonators*, EuMC Proc., vol. 13, pp. 721–726, 1983.
- [46] L. P. Felsen e N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, New York, NY, IEEE Press, 1994.
- [47] D. Nghiem, J. T. Williams, D. R. Jackson e A. A. Oliner, *Proper and improper dominant mode solutions for stripline with an air gap*, Radio Science, vol. 28, n. 6, pp. 1163–1180, novembre–dicembre 1993.
- [48] V. V. Shevchenko, *Continuous Transitions in Open Waveguides*, Boulder, CO, Golem Press, 1971.
- [49] P. Lampariello, F. Frezza e A. A. Oliner, *The transition region between bound-wave and leaky-wave ranges for a partially dielectric-loaded open guiding structure*, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. 38, pp. 1831–1836, dicembre 1990.
- [50] J. S. Bagby, C.-H. Lee, D. P. Nyquist e Y. Yuan, *Identification of propagation regimes on integrated microstrip transmission lines*, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. 41, pp. 1887–1894, novembre 1993.
- [51] D. Nghiem, J. T. Williams, D. R. Jackson e A. A. Oliner, *Existence of a leaky dominant mode of microstrip line with an isotropic substrate: theory and measurements*, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. 44, pp. 1710–1715, ottobre 1996.

25.1.6 Capitolo 14

- [52] D. Nghiem, J. T. Williams, D. R. Jackson e A. A. Oliner, *Dominant leaky-mode solutions for Microstrip line on isotropic substrates*, URSI Radio Science Meeting Digest, p. 118, Luglio 1992.
- [53] H. Shigesawa, M. Tsuji e A. A. Oliner, *Conductor-backed slotline and coplanar waveguide: Dangers and full-wave analysis*, IEEE Intl. Microwave Symp. Digest, New York, NY, pp. 199–202, Maggio 1988.
- [54] D. Nghiem, *An Investigation of Dominant-Mode Leakage in Multiple-Layered Stripline and Microstrip Structures*, PhD Dissertation, University of Houston, Houston, TX, 1993.
- [55] T. K. Sarkar e O. Pereira, *Using the Matrix Pencil Method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 37, Febbraio 1995.

25.1.7 Capitolo 15

- [56] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, New York, NY, McGraw-Hill, 1953.
- [57] A. I. Markusevic, *Elementi di teoria delle funzioni analitiche*, Roma, Editori Riuniti, 1988.
- [58] L. P. Felsen e N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, New York, NY, IEEE Press, 1994.
- [59] A. Ghizzetti, F. Mazzarella e A. Ossicini, *Lezioni di complementi di matematica*, Roma, Editoriale Veschi, 1988.
- [60] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [61] D. Nghiem, *An Investigation of Dominant-Mode Leakage in Multiple-Layered Strip-line and Microstrip Structures*, PhD Dissertation, University of Houston, Houston, TX, 1993.
- [62] R. Marquès, F. L. Mesa, N. K. Das, *Comments on the “Criterion of leakage from printed circuit transmission lines”*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 43, pp. 242–245, 1995.

25.1.8 Parte III

- [63] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*, Wiley, New York, 1989.
- [64] G. Franceschetti, *Campi Elettromagnetici*, Boringhieri, Torino, 1983.
- [65] C. G. Someda, *Onde elettromagnetiche*, UTET, Torino, 1986.
- [66] J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Zanichelli, Bologna, 1984.
- [67] D. S. Jones, *Acoustic and electromagnetic waves*, Oxford University Press, 1986.
- [68] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. Van Duzer, *Campi e onde nell’elettronica per le telecomunicazioni*, Franco Angeli Editore, Milano, 1982.
- [69] L. D. Landau, E. M. Lifšits, *Elettrodinamica dei mezzi continui*, Editori Riuniti, Roma, 1986.
- [70] G. Barzilai, *Fondamenti di elettromagnetismo*, Siderea, Roma, 1975.
- [71] A. W. Snyder, J. D. Love, *Optical waveguide theory*, Chapman and Hall, London, 1983.

- [72] I. Cattaneo Gasparini, *Strutture algebriche. Operatori lineari*, Veschi, Roma, 1989.
- [73] G. C. Corazza, C. G. Someda, *Elementi di calcolo vettoriale e tensoriale*, Pitagora, Bologna, 1982.
- [74] K. Kurokawa, *An introduction to the theory of microwave circuits*, Academic Press, New York, 1969.
- [75] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [76] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [77] C. T. Tai, *Generalized vector and dyadic analysis*, IEEE Press, New York, 1992.

25.2 Collegamenti con altri corsi

- [78] F. Gori, *Elementi di Ottica*, Accademica, Roma, II edizione, 1997.
- [79] G. Martinelli e M. Salerno, *Fondamenti di elettrotecnica*, Siderea, Roma, II edizione, 1995.
- [80] G. Pesamosca, *Elementi di analisi numerica*, Sistema, Roma, 1988.
- [81] A. Ghizzetti e F. Rosati, *Analisi matematica: volume I*, Masson, Milano, II edizione, 1996.
- [82] A. Ghizzetti e F. Rosati, *Analisi matematica: volume II*, Masson, Milano, II edizione, 1996.
- [83] A. Ghizzetti e F. Rosati, *Esercizi e complementi di Analisi matematica: volume II*, Masson, Milano, 1993.
- [84] A. Ghizzetti, F. Mazzearella e A. Ossicini, *Lezioni di complementi di matematica*, Masson, Milano, 1981.
- [85] I. Cattaneo Gasparini, *Strutture algebriche. Operatori lineari*, Masson, Milano, III edizione, ristampa riveduta e corretta, 1989.
- [86] G. Gerosa e P. Lampariello, *Lezioni di Campi Elettromagnetici*, Edizioni Ingegneria 2000, Roma, 1995.
- [87] C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica II: elettromagnetismo-ottica*, Liguori, Napoli, II edizione, 1995.
- [88] F. S. Crawford Jr., *Onde e oscillazioni*, volume 3 di *La fisica di Berkeley*, Zanichelli, Bologna, 1972.

25.3 Riferimenti generali

- [89] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*, Wiley, New York, 1989. (I capitoli 11-14 sono ad un livello superiore rispetto ai primi 10).
- [90] R. E. Collin, *Field theory of guided waves*, IEEE Press, New York, II edizione, 1991.
- [91] R. E. Collin, *Foundations for microwave engineering*, McGraw-Hill, New York, II edizione, 1992.
- [92] R. S. Elliot, *An introduction to guided waves and microwave circuits*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [93] A. Ishimaru, *Electromagnetic wave propagation, radiation, and scattering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [94] D. S. Jones, *Acoustic and electromagnetic waves*, Oxford University Press, 1986.
- [95] N. Morita, N. Kumagai e J. R. Mautz, *Integral equation methods for electromagnetics*, Artech House, Boston, 1990.
- [96] L. Lewin, *Theory of waveguides: techniques for the solution of waveguide problems*, Newnes-Butterworths, London, 1975.
- [97] B. Lax e K. J. Button, *Microwave ferrites and ferrimagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [98] A. J. Baden Fuller, *Ferrites at microwave frequencies*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1987.
- [99] A. G. Gurevich, *Ferrites at microwave frequencies*, Consultants Bureau, New York, 1963.
- [100] R. N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, New York, 1986.
- [101] N. J. Cronin, *Microwave and optical waveguides*, IOP Publishing, Bristol, UK, 1995.
- [102] S. Betti, G. De Marchis e E. Iannone, *Coherent optical communications systems*, Wiley, New York, 1995.
- [103] J. Van Bladel, *Relativity and Engineering*, Springer, Berlin, 1984.
- [104] C. A. Balanis, *Antenna theory: analysis and design*, Wiley, New York, II edizione, 1997.
- [105] J. Van Bladel, *Singular electromagnetic fields and sources*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

- [106] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, VII (ampliata) edizione, 2000.
- [107] X.-S. Zhou, *Vector wave functions in electromagnetic theory*, Aracne, Roma, 1990.
- [108] M. Mrozowski, *Guided electromagnetic waves: properties and analysis*, RSP, Wiley, New York, 1997.
- [109] M. J. Ablowitz e A. S. Fokas, *Complex variables: introduction and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [110] T. Rozzi e M. Mongiardo, *Open electromagnetic waveguides*, IEE Press, Southampton, 1997.
- [111] V. P. Shestopalov e Y. V. Shestopalov, *Spectral theory and excitation of open structures*, IEE Press, Southampton, 1996.
- [112] V. A. Borovikov, *Uniform stationary phase method*, IEE Press, Southampton, 1994.
- [113] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Chelsea, New York, II edizione, 1977. Tre volumi in uno.
- [114] S. K. Koul, *Millimeter wave and optical dielectric integrated guides and circuits*, Wiley, New York, 1997.
- [115] A. A. Oliner, “Historical perspectives on microwave field theory”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-32, pp. 1022–1045, settembre 1984.
- [116] C. Müller, *Mathematical theory of electromagnetic waves*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [117] D. M. Pozar, *Microwave engineering*, Wiley, New York, II edizione, 1998.
- [118] J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory*, Wiley, New York, 1986.
- [119] W. C. Chew, *Waves and fields in inhomogeneous media*, Van Nostrand Reinhold, 1990, ristampato dalla IEEE Press, New York, 1995.
- [120] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley, New York, III edizione, 1999.
- [121] L. M. Brekhovskikh, *Waves in layered media*, Academic Press, New York, II edizione, 1980.

25.4 Riferimenti in italiano

- [122] S. Ramo, J. R. Whinnery e T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York, III edizione, 1994. Traduzione italiana della II edizione inglese: *Campi e onde nell'elettronica per le telecomunicazioni*, Franco Angeli Editore, Milano, 1987.
- [123] G. Franceschetti, *Campi Elettromagnetici*, Boringhieri, Torino, II edizione, 1988. Di questo libro esiste anche un parente in inglese, dal titolo *Electromagnetics: theory, techniques and engineering paradigms*, Plenum Press, New York, 1998.
- [124] C. G. Someda, *Onde elettromagnetiche*, UTET, Torino, 1986. Di questo libro esiste anche una versione aggiornata in inglese, dal titolo *Electromagnetic waves*, Chapman and Hall, London, 1998.
- [125] G. Conciauro, *Introduzione alle onde elettromagnetiche*, McGraw-Hill, Milano, 1993.
- [126] J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Zanichelli, Bologna, 2001, traduzione italiana della III edizione inglese.
- [127] B. Crosignani e H. Hodara, *Fondamenti di ottica integrata*, Siderea, Roma, 1987.
- [128] G. C. Corazza e C. G. Someda, *Elementi di calcolo vettoriale e tensoriale*, Pitagora, Bologna, 1982.
- [129] C. Bernardini, O. Ragnisco e P. M. Santini, *Metodi matematici della fisica*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1993, ristampato dalla Carocci Editore, Roma, 2002.
- [130] V. Comincioli, *Metodi numerici e statistici per le scienze applicate*, Ambrosiana, Milano, 1992.
- [131] E. Matriccioni, *La tesi scientifica. Guida alla comunicazione in ingegneria e nelle scienze*, Paravia, Torino, 2000.
- [132] M. L. Krasnov, G. I. Makarenko e A. I. Kiselev, *Calcolo delle variazioni*, Mir, Mosca, 1984.
- [133] P. Bassi, G. Bellanca e G. Tartarini, *Propagazione ottica libera e guidata*, CLUEB, Bologna, II edizione, 1999.
- [134] V. Rizzoli e A. Lipparini, *Propagazione elettromagnetica guidata*, Esculapio, Bologna, 1995.
- [135] C. Miranda, *Istituzioni di analisi funzionale lineare*, Unione Matematica Italiana, distribuito da Pitagora, Bologna, 1979. Soprattutto il secondo volume.
- [136] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori, Napoli, 1986.

- [137] G. Gilardi, *Analisi tre*, McGraw-Hill, Milano, 1994.
- [138] G. B. Stracca, *Teoria e tecnica delle microonde: guide d'onda e circuiti*, Clup Città Studi, Milano, 1991.
- [139] V. Rizzoli, *Lezioni di campi elettromagnetici: propagazione libera*, Progetto Leonardo, Esculapio, Bologna, 1995.
- [140] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Bollati Boringhieri, Torino, 1974.
- [141] H. M. Schaefer, *Introduzione alla teoria spettrale*, Boringhieri, Torino, 1980.
- [142] V. S. Vladimirov, *Equazioni della fisica matematica*, Mir, Mosca, 1987.
- [143] A. I. Markusevic, *Elementi di teoria delle funzioni analitiche*, Edizioni Mir Editori Riuniti, Roma, 1988.
- [144] R. Bruzzese, *Ottica, laser e applicazioni*, Liguori, Napoli, 1994.
- [145] L. Gatteschi, *Funzioni speciali*, UTET, Torino, 1973.

25.5 Riferimenti per argomento

25.5.1 Guide dielettriche

- [146] D. Marcuse, *Light transmission optics*, Van Nostrand Reinhold, Princeton, New Jersey, 1972.
- [147] D. Marcuse, *Theory of dielectric optical waveguides*, Academic Press, New York, 1974.
- [148] D. L. Lee, *Electromagnetic principles of integrated optics*, Wiley, New York, 1986.
- [149] T. Tamir, *Guided-wave optoelectronics*, Springer, Berlin, 1988.
- [150] S. Solimeno, B. Crosignani e P. Di Porto, *Guiding, diffraction and confinement of optical radiation*, Academic Press, New York, 1986.
- [151] A. W. Snyder e J. D. Love, *Optical waveguide theory*, Chapman and Hall, London, 1983.
- [152] E. Hecht, *Optics*, II edizione, Addison-Wesley, Reading, 1987.
- [153] J. E. Goell, "A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides", *Bell System Technical Journal*, vol. 48, n. 7, pp. 2133–2160, settembre 1969.

- [154] V. V. Shevchenko, *Continuous transitions in open waveguides*, The Golem Press, Boulder, 1971, (traduzione inglese dell'edizione russa 1969).
- [155] D. Gloge e D. Marcuse, "Formal quantum theory of light rays", *Journal of the Optical Society of America*, vol. 59, pp. 1629–1631, dicembre 1969.

25.5.2 Onde superficiali e onde leaky

- [156] N. Marcuvitz, "On field representations in terms of leaky modes or eigenmodes", *IRE (precedente denominazione dell'IEEE) Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-4, pp. 192–194, luglio 1956.
- [157] T. Tamir e A. A. Oliner, "Guided complex waves", *Proc. IEE*, vol. 110, pp. 310–334, febbraio 1963.
- [158] T. Tamir, "Inhomogeneous wave types at planar interfaces: II-surface waves", *Optik*, vol. 38, n. 2, pp. 204–228, 1973.
- [159] T. Tamir, "Inhomogeneous wave types at planar interfaces: III-leaky waves", *Optik*, vol. 38, pp. 269–297, 1973.
- [160] A. A. Oliner, "Leakage from higher modes on microstrip line with application to antennas", *Radio Science*, vol. 22, n. 6, pp. 907–912, novembre 1987.
- [161] P. Lampariello, F. Frezza e A. A. Oliner, "The transition region between bound-wave and leaky-wave ranges for a partially dielectric-loaded open guiding structure", *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-38, pp. 1831–1836, dicembre 1990.
- [162] D. G. Duffy, "Response of a grounded dielectric slab to an impulse line source using leaky modes", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-42, pp. 340–346, marzo 1994.
- [163] F. Mesa, D. R. Jackson e M. J. Freire, "Evolution of leaky modes on printed-circuit lines", *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-50, pp. 94–104, gennaio 2002.
- [164] C. Di Nallo, *Studio di metodi di analisi generalizzata per la caratterizzazione di guide d'onda a microonde e onde millimetriche*. Tesi di dottorato di ricerca in elettromagnetismo applicato e scienze elettrofisiche, Università "La Sapienza" di Roma, febbraio 1996, capitolo 5, 6, 7.

25.5.3 Antenne a onda leaky

- [165] L. O. Goldstone e A. A. Oliner, "Leaky-wave antennas I: rectangular waveguides", *IRE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-7, pp. :307–319, ottobre 1959.

- [166] L. O. Goldstone e A. A. Oliner, “Leaky-wave antennas II: circular waveguides”, *IRE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-9, pp. 280–290, maggio 1961.
- [167] C. H. Walter, *Traveling wave antennas*, McGraw-Hill, New York, 1965 (ristampato dalla Peninsula Publishing, California, 1990).
- [168] R. E. Collin e F. J. Zucker (editors), *Antenna theory*, cap. 19: A. Hessel, “General characteristics of traveling-wave antennas”; cap. 20: T. Tamir, “Leaky-wave antennas”. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [169] H. Jasik (editor), *Antenna Engineering Handbook*, cap. 16: F. J. Zucker, “Surface- and leaky-wave antennas”, McGraw-Hill, New York, I edizione, 1969.
- [170] Y. T. Lo e S. W. Lee (editors), *Antenna Handbook*, cap. 17: F. Schwing e A. A. Oliner, “Millimeter-wave antennas”, Van Nostrand Reinhold, New York, 1988.
- [171] F. Schwing, “Millimeter-wave antennas”, *Proc. IEEE*, vol. 80, pp. 92–102, gennaio 1992.
- [172] R. C. Johnson (editor), *Antenna Engineering Handbook*, cap. 10: A. A. Oliner, “Leaky-wave antennas”, McGraw-Hill, New York, III edizione, 1993.

25.5.4 Guida d’onda NRD

- [173] F. J. Tischer, “A waveguide structure with low losses”, *Arch. Elekt. Übertragung*, vol. 7, pp. 592–596, dicembre 1953.
- [174] T. Yoneyama e S. Nishida, “Nonradiative dielectric waveguide for millimeter-wave integrated circuits”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-29, pp. 1188–1192, novembre 1981.
- [175] C. Di Nallo, F. Frezza, A. Galli, P. Lampariello e A. A. Oliner, “Properties of NRD-guide and H-guide higher-order modes: physical and nonphysical ranges”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-42, pp. 2429–2434, dicembre 1994.

25.5.5 La slot line

- [176] S. B. Cohn, “Slot line on a dielectric substrate”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-17, pp. 768–778, ottobre 1969.
- [177] T. Itoh e R. Mittra, “Dispersion characteristics of slot lines”, *Electronics Letters*, vol. 7, pp. 364–365, luglio 1971.
- [178] J. B. Knorr e K. D. Kuchler, “Analysis of coupled slots and coplanar strips on dielectric substrate”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, pp. 541–548, luglio 1975.

25.5.6 Modi LSE e LSM

- [179] H. M. Altschuler e L. O. Goldstone, “On network representations of certain obstacles in waveguide regions”, *IRE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-7, aprile 1959.
- [180] L. O. Goldstone e A. A. Oliner, “Leaky-wave antennas I: rectangular waveguides”, *IRE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-7, pp. 307–319, ottobre 1959.

25.5.7 Discontinuità in guida d’onda

- [181] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1951. Ristampa corretta, Peter Peregrinus Ltd., London, 1986. Il capitolo 3 è di teoria. Dal capitolo 4 in poi c’è una collezione di risultati per varie discontinuità.
- [182] C. M. Angulo, “Discontinuities in rectangular waveguide partially filled with dielectric”, *IRE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-5, pp. 68–74, gennaio 1957.
- [183] J. Schwinger e D. S. Saxon, *Discontinuities in waveguides*, Gordon and Breach Sc. Publ., New York, 1968.
- [184] Y. Leviatan, P. G. Li, A. T. Adams e J. Perini, “Single-post inductive obstacles in rectangular waveguides”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-31, pp. 806–812, ottobre 1983.
- [185] A. T. Villeneuve, “Equivalent circuits of junctions of slab-loaded rectangular waveguides”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-33, pp. 1196–1203, novembre 1985.
- [186] R. E. Collin e R. M. Vaillancourt, “Application of Rayleigh-Ritz method to dielectric steps in waveguides”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-5, pp. 177–184, luglio 1957.

25.5.8 Scattering

- [187] J. J. Bowman, T. B. A. Senior e P. L. E. Uslenghi (editors), *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*, Hemisphere, Washington, 1987 (ristampa riveduta).
- [188] G. T. Ruck e D. E. Barrick, *Radar cross section handbook*, Plenum Press, New York, 1970.
- [189] P. Beckmann, *The depolarization of electromagnetic waves*, Golem Press, Boulder, 1968.

- [190] W. L. Stutzman, *Polarization in electromagnetic systems*, Artech House, Boston, 1993.
- [191] P. C. Clemmow, *The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields*, Pergamon Press, London, 1966. Ristampato dalla IEEE Press, New York, 1996.
- [192] C. F. Bohren e D. R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*, Wiley, New York, 1983.
- [193] H. C. van de Hulst, *Light scattering by small particles*, Wiley, New York, 1957. Ristampato dalla Dover, New York, 1981.
- [194] A. Banos Jr., *Dipole radiation in the presence of a conducting half-space*, Pergamon, Oxford, 1966.
- [195] D. R. Wilton, “Computational methods”, cap. 1.5.5 in *Scattering and inverse scattering in pure and applied science*, R. Pike e P. Sabatier (editors), 2001.

25.5.9 Calcolo tensoriale

- [196] C. T. Tai, *Generalized vector and dyadic analysis*, IEEE Press, New York, II edizione, 1997.
- [197] C. T. Tai, *Dyadic Green's functions in electromagnetic theory*, IEEE Press, New York, II edizione, 1993.
- [198] Zhou Xue Song, *Vector wave functions in electromagnetic theory*, Aracne, Roma, 1994.
- [199] A. G. Papayiannakis e E. E. Kriezis, “Scattering from a dielectric cylinder of finite length”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-31, pp. 725–731, 1983.

25.5.10 Momento angolare del campo elettromagnetico

- [200] N. Carrara, T. Fazzini, L. Ronchi e G. Toraldo di Francia, “Sul momento di rotazione del campo elettromagnetico”, *Alta Frequenza*, vol. XXIV, pp. 100–109, aprile 1955.
- [201] N. Carrara, “Coppia e momento angolare della radiazione”, *Il Nuovo Cimento*, vol. VI, n. 1, pp. 50–56, 20 gennaio 1949.
- [202] D. De Zutter, “Transverse radiation pressure and torque exerted by a plane electromagnetic wave on a rotating circular cylinder of isotropic material”, *Applied Scientific Research*, vol. 41, pp. 17–29, 1984.
- [203] G. G. Padmabandu e A. S. Marathay, “Angular momentum of light and its effect on a birefringent medium”, *Optical Engineering*, vol. 31, pp. 1342–1347, giugno 1992.

- [204] J. H. Poynting, “The wave motion of a revolving shaft and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarized light”, *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 82, pp. 560–567, 1909.
- [205] R. A. Beth, “Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light”, *Physical Review*, vol. 50, pp. 115–125, 1936.
- [206] V. Bagini, F. Gori, M. Santarsiero, F. Frezza, G. Schettini e G. Schirripa Spagnolo. “Change of energy of photons passing through rotating anisotropic elements”, *European Journal of Physics*, vol. 15, n. 2, pp. 71–78, 1994.

25.5.11 Onde rotanti

- [207] J. E. Velazco e P. H. Ceperley, “A discussion of rotating wave fields for microwave applications.” *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-41, pp. 330–335, febbraio 1993.
- [208] P. H. Ceperley, “Rotating waves”, *Am. J. Phys.*, vol. 60, pp. 938–942, ottobre 1992.

25.5.12 Funzioni di Bessel ed integrali relativi

- [209] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, London, 1962.
- [210] Y. L. Luke, *Integrals of Bessel functions*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [211] M. Abramowitz e I. A. Stegun (editors), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York, 1965. Nona ristampa corretta, 1972, capitolo 9.
- [212] E. B. Manring e J. Asmussen Jr., “Useful Bessel Function Identities and Integrals”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-41, pp. 1468–1471, agosto 1993.
- [213] Kajfez D., “Indefinite Integrals Useful in the Analysis of Cylindrical Dielectric Resonators”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-35, pp. 873–874, settembre 1987.
- [214] C. F. Du Toit, “The numerical computation of Bessel functions of the first and second kind for integer orders and complex arguments”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-38, pp. 1341–1349, settembre 1990.
- [215] R. Paknys, “Evaluation of Hankel functions with complex argument and complex order”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-40, pp. 569–578, maggio 1992.

25.5.13 Metodi matematici

- [216] P. M. Morse e H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [217] R. Courant e D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [218] B. Friedman, *Principles and techniques of applied mathematics*, Wiley, New York, 1956. Ristampato dalla Dover, New York, 1990.
- [219] M. D. Greenberg, *Foundations of applied mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- [220] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, Harcourt-Academic Press, New York, V edizione, 2001.
- [221] I. Stakgold, *Green's functions and boundary value problems*, Wiley, New York, II edizione, 1997.

25.5.14 Metodi matematici in elettromagnetismo

- [222] L. B. Felsen e N. Marcuvitz, *Radiation and scattering of waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973. Ristampato dalla IEEE Press, New York, 1994. Particolarmente celebrato il capitolo 4 sugli sviluppi asintotici.
- [223] D. G. Dudley, *Mathematical foundations for electromagnetic theory*, IEEE Press, New York, 1994.
- [224] W. X. Zhang, *Engineering electromagnetism: functional methods*, Ellis Horwood, New York, 1991.
- [225] D. S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, Oxford University Press, New York, II edizione, 1994.
- [226] G. W. Hanson e A. B. Yakovlev. *Operator theory for electromagnetics: an introduction*, Springer, New York, 2002.

25.5.15 Calcolo numerico

- [227] M. Abramowitz e I. A. Stegun (editors), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York, 1965. Nona ristampa corretta, 1972.
- [228] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, sesta edizione, 2000.

- [229] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov e O. I. Marichev, *Integrals and series*, Gordon and Breach, New York, ristampa corretta, 1988. (traduzione inglese dall'edizione russa del 1983).
- [230] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical recipes (in FORTRAN): the art of scientific computing*, Cambridge University Press, New York, II edizione, 1992. Questo libro è consultabile gratuitamente al sito internet <http://www.nr.com/>.
- [231] A. Ralston e P. Rabinowitz, *A first course in numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, II edizione, 1978.
- [232] S. Zhang e J. Jin, *Computation of special functions*, Wiley, New York, 1996.
- [233] A. H. Stroud, *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971.
- [234] C. G. Cullen, *Matrices and linear transformations*, Dover, New York, II edizione, 1990.

25.5.16 Metodi numerici in elettromagnetismo

- [235] R. C. Booton, *Computational methods for electromagnetics and microwaves*, Wiley, New York, 1992.
- [236] T. Itoh (Editor), *Numerical techniques for microwave and Millimeter-Wave Passive Structures*, Wiley, New York, 1989.
- [237] M. N. O. Sadiku. *Numerical techniques in electromagnetics*, CRC Press, London, II edizione, 2000.
- [238] R. Sorrentino (Editor), *Numerical methods for passive microwave and millimeter wave structures*, IEEE Press, New York, 1989 (collezione di articoli, divisa in capitoli, con brevi introduzioni per ogni capitolo).
- [239] R. Mittra, *Computer techniques for electromagnetics*. Hemisphere, Washington, 1987 (ristampa dell'edizione originaria del 1973).
- [240] C. Di Nallo, *Studio di metodi di analisi generalizzata per la caratterizzazione di guide d'onda a microonde e onde millimetriche*. Tesi di dottorato di ricerca in elettromagnetismo applicato e scienze elettrofisiche, Università "La Sapienza" di Roma, febbraio 1996, capitolo 3.

Metodo della risonanza trasversa

- [241] T. Itoh (Editor), *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*, cap. 11: R. Sorrentino, “Transverse resonance technique”, Wiley, New York, 1989.

Metodo della costante dielettrica efficace

- [242] W. V. McLevige, T. Itoh e R. Mittra, “New waveguide structures for millimeter-wave and optical integrated circuits”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, pp. 788–794, ottobre 1975.
- [243] G. B. Hocker e W. K. Burns, “Mode dispersion in diffused channel waveguides by the effective index method”, *Applied Optics*, vol. 16, pp. 113–118, gennaio 1977.
- [244] T. Trinh e R. Mittra, “Coupling characteristics of planar dielectric waveguides of rectangular cross section”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-29, pp. 875–880, settembre 1981.

Metodo dello *spectral domain*

- [245] T. Itoh (Editor), *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*, cap. 5: T. Uwaro e T. Itoh, “Spectral domain approach”, Wiley, New York, 1989.
- [246] C. Scott, *The spectral domain method in electromagnetics*, Artech House, Boston, 1989.
- [247] D. Mirshekar-Syahkal, *Spectral domain method for microwave integrated circuits*, Wiley, New York, 1990.

Metodo del *mode-matching*

- [248] R. Sorrentino, M. Mongiardo, F. Alessandri e G. Schiavon, “An investigation of the numerical properties of the mode-matching technique”, *Int. J. of Numerical Modelling*, vol. 4, pp. 19–43, 1991.
- [249] A. Wexler, “Solution of waveguide discontinuities by modal analysis”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-15, pp. 508–517, settembre 1967.
- [250] P. H. Masterman e P. B. J. Clarricoats, “Computer field-matching solution of waveguide transverse discontinuities”, In *Proc. IEE*, vol. 118, pp. 51–63, 1971.
- [251] T. Itoh (Editor), *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*, cap. 9: Y. C. Shih, “The mode-matching method”, Wiley, New York, 1989.

Metodo dei momenti

- [252] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillian Company, 1968. Ristampato dalla IEEE Press, New York, 1993.
- [253] J. J. H. Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*, Wiley, New York, 1991.
- [254] R. C. Hansen, *Moment methods in antennas and scattering*, Artech House, Boston, 1990 (collezione di articoli, divisa in capitoli, con brevi introduzioni per ogni capitolo).
- [255] E. K. Miller, L. Medgyesi-Mitschang e E. H. Newman, *Computational Electromagnetics. Frequency-domain method of moments*, IEEE Press, New York, 1992 (collezione di articoli, divisa in capitoli, con brevi introduzioni per ogni capitolo, ed una estesa bibliografia degli articoli sul metodo dei momenti dal 1960 al 1990).
- [256] C. M. Butler e D. R. Wilton. “Analysis of various numerical techniques applied to thin-wire scatterers”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-23, pp. 534–540, luglio 1975.
- [257] M. M. Ney, “Method of moments as applied to electromagnetic problems”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-33, pp. 972–980, ottobre 1985.

Metodo di Richmond

- [258] J. H. Richmond, “Scattering by an arbitrary array of parallel wires”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-13, pp. 408–412, luglio 1965.
- [259] J. H. Richmond, “A wire grid model for scattering by conducting bodies”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-14, pp. 782–786, novembre 1966.
- [260] L. O. Wilson, “The shielding of a plane wave by a cylindrical array of infinitely long thin wires”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-22, pp. 689–696, settembre 1974.
- [261] A. C. Ludwig, “Wire grid modeling of surfaces”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-35, pp. 1045–1048, settembre 1987.
- [262] R. J. Paknys, “The near field of a wire grid model”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-39, pp. 994–999, luglio 1991.
- [263] H. A. Ragheb e M. Hamid, “Scattering by N parallel conducting circular cylinders”, *Int. J. Electronics*, vol. 59, n. 4, pp. 407–421, 1985.
- [264] H. A. Ragheb e M. Hamid, “Simulation of a cylindrical reflector by conducting circular cylinders”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-35, pp. 349–353, marzo 1987.

- [265] A. Z. Elsherbeni e A. A. Kishk, “Modeling of cylindrical objects by circular dielectric and conducting cylinders”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-40, pp. 96–99, gennaio 1992.

Metodo delle differenze finite (FD e FDTD)

- [266] K. S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-14, pp. 302–307, maggio 1966.
- [267] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*, Oxford University Press, Oxford, III edizione, 1985.
- [268] A. Taflov e S. C. Hagness, *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*, Artech House, Boston, II edizione, 2000.

Metodi variazionali

- [269] R. Weinstock, *Calculus of variations*, Dover, New York, 1974 (ristampa, l’edizione originale era del 1952, McGraw-Hill, New York).
- [270] E. Yamashita e R. Mittra, “Variational method for the analysis of microstrip lines”, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-16, pp. 251–256, 1968.
- [271] T. Itoh (Editor), *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*, cap. 2 “The Finite Element Method”, J. B. Davies, paragrafi 3, 4. Wiley, New York, 1989.

Metodo degli elementi finiti (FEM)

- [272] T. Itoh (Editor), *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*, cap. 2: J. B. Davies, “The Finite Element Method”. Wiley, New York, 1989.
- [273] J. Jin, *The finite element method in electromagnetics*, Wiley, New York, 1993.
- [274] P. P. Silvester e R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge University Press, New York, II edizione, 1990.
- [275] P. P. Silvester e G. Pelosi, *Finite elements for wave electromagnetics. Methods and techniques*, IEEE Press, New York, 1993 (collezione di articoli, divisa in capitoli, con estese introduzioni per ogni capitolo).
- [276] S. R. H. Hoole, *Computer aided analysis and design of electromagnetic devices*, Elsevier Press, New York, 1989.

Metodo degli elementi al contorno (BEM)

- [277] R. E. Collin e D. A. Ksienski, “Boundary element method for dielectric resonators and waveguides”, *Radio Science*, vol. 22, pp. 1155–1167, 1987.

25.5.17 Briciole di storia dell’elettromagnetismo

- [278] R. Maiocchi, *Storia della scienza in occidente: dalle origini alla bomba atomica*, La Nuova Italia, Firenze, 1995.
- [279] AA. VV., *Cento anni di radio: le radici dell’invenzione*, Seat, Torino, 1995.
- [280] *Maxwell: dai campi elettromagnetici ai costituenti ultimi della materia*. Le Scienze, novembre 1998. I grandi della scienza, n. 5.
- [281] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, III edizione, 1891, ripubblicato dalla Dover, New York, 1954.
- [282] V. Ronchi, *Storia della luce: da Euclide a Einstein*, Laterza, Bari, 1983.

25.6 Elenco di siti internet

- [283] <http://emlib.jpl.nasa.gov>
- [284] <http://aces.ee.olemiss.edu>
- [285] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history>
- [286] <http://www.si-list.org/swindex2.html>
- [287] <http://atol.ucsd.edu/~pflatau/scatlib/conjugate.html>
- [288] <http://www.elegant-math.com/abs-emrr.htm>
- [289] <http://iris-lee3.ece.uiuc.edu/~fling/resch/prelim.html>
- [290] <http://www.nr.com>
- [291] <http://www.ieee.org>. Per ricerche bibliografiche sulle pubblicazioni dell’Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), il sito <http://ieeexplore.ieee.org>. Per ricerche storiche, invece, la subdirectory [/organizations/history_center](http://www.ieee.org/organizations/history_center). Per il museo virtuale, il sito <http://www.ieee-virtual-museum.org>.
- [292] <http://www.aei.it>. Per le “sale” del museo virtuale dell’Associazione Elettrotecnica ed Elettronica Italiana (AEI), la subdirectory [ita/museo/mvp_hpg.htm](http://www.aei.it/ita/museo/mvp_hpg.htm)
- [293] <http://www.netlib.org>. Software matematico, articoli e database.

- [294] <http://mathworld.wolfram.com>, enciclopedia di matematica.
- [295] <http://functions.wolfram.com>, repertorio di funzioni matematiche, elementari e speciali.
- [296] <http://integrals.wolfram.com>
- [297] <http://www.polito.it/matdid>, esercizi e dispense di varie materie. Consultare anche il sito <http://corsiadistanza.polito.it>

Seminari, visite guidate, tesi di laurea

- [298] <http://www.fub.it>
- [299] <http://www.selex-si.com>
- [300] <http://www.alcatel.com/space>
- [301] <http://www.frascati.enea.it>
- [302] <http://www.lnf.infn.it>. Interessanti le subdirectories [/edu](#) e [/sis](#), e il sito <http://scienzapertutti.lnf.infn.it>
- [303] <http://www.ansoft.com>
- [304] <http://www.telespazio.it>
- [305] <http://www.estec.esa.int>
- [306] <http://www.uh.edu>
- [307] <http://www.cvut.cz/en>
- [308] <http://www.doshisha.ac.jp/english>
- [309] <http://www.vt.edu>
- [310] <http://151.100.120.244/personale/frezza/labcem2>
- [311] <http://www.dea.uniroma3.it/lema>

25.7 Ringraziamenti

Vi sono servigi così grandi, che possono essere ripagati solo con l'ingratitude.

(A. Dumas padre, Mémoires)

Pressoché tutti hanno piacere di sdebitarsi delle piccole obbligazioni; molti hanno riconoscenza per le obbligazioni mediocri, ma non c'è quasi nessuno che non abbia ingratitude per le grandi.

(La Rochefoucauld, Maximes, 299)

Desidero comunque ringraziare vivamente anzitutto Maurizio Fascetti (per il quale le due citazioni riportate valgono in sommo grado), Carlo Di Nallo (alla cui tesi di dottorato di ricerca ho attinto copiosamente), Paolo Burghignoli, Francesca Di Ventura, Costantino Guglielmi, Fabrizio Tinti, Luana Liberatore, Riccardo Moretti.

Un ringraziamento del tutto speciale, direi il “padre di tutti i ringraziamenti”, va infine ad Alessandro Ciorba, membro dell'IEEE Student Branch di Roma “Sapienza”, il quale ha curato la versione L^AT_EX di tutto il volume, nelle sue molteplici edizioni.

Epilogo

La grandezza dell'uomo si misura in base a quello che cerca e all'insistenza con cui egli resta alla ricerca.

(M. Heidegger)

Considerate la vostra semenza: fatti non foste a viver come bruti, ma per seguir virtute e canoscenza.

(Inferno XXVI, 118-120)

ma, al tempo stesso:

State contenti, umana gente, al quia; ché se possuto aveste veder tutto, mestier non era parturir Maria.

(Purgatorio III, 37-39)

Sagredo: Grandissima mi par l'inezia di coloro che vorrebbero che Iddio avesse fatto l'Universo più proporzionato alla piccola capacità del loro discorso che all'immensa, anzi infinita, sua potenza.

(Galileo, Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo)

Non si può pretendere che uno conosca tutto, ma piuttosto che, avendo conoscenza di una cosa, abbia conoscenza di tutto.

(H. von Hofmannsthal, Il libro degli amici)

Everything should be made as simple as possible, but not simpler.

(A. Einstein)

Un buon ricercatore deve avere enorme curiosità, tenacia e una grande onestà. Se una sua scoperta gli sembra troppo bella per essere vera, ci sono buone possibilità che non lo sia.

(Albert Sabin)

La morale per me è questa: che abbiamo enormemente da fare e prima di tutto enormemente da studiare.

(Rosa Luxemburg)

*Dov'è la Vita che abbiamo perso nel vivere?
Dov'è la saggezza che abbiamo perso nella conoscenza?
Dov'è la conoscenza che abbiamo perso nell'informazione?*

(T. S. Eliot, The Rock)

Per concludere con qualche controindicazione:

Bada che anche il tuo leggere molti autori e libri di ogni genere può essere una forma di incostanza e di instabilità. Bisogna che tu ti soffermi su un limitato numero di autori e di questi ti nutra la mente, se vuoi ricavarne un profitto che rimanga durevolmente nel tuo animo. Chi è dappertutto non è in alcun luogo. A chi passa tutta la vita viaggiando accade di avere molte conoscenze, ma nessuna amicizia; lo stesso accade inevitabilmente a chi non si dedica intensamente allo studio di nessun autore, ma legge tutto in fretta e con impazienza.

(Seneca, Lettere a Lucilio)

Detto da lui...:

Sì come ogni regno in sé diviso è disfatto, così ogni ingegno diviso in diversi studi si confonde e indebolisce.

(Leonardo, Pensieri, 27: detto da lui...)

Nel leggere il lavoro del pensare ci viene tolto per la maggior parte. Questo spiega lo stato di sensibile sollievo che proviamo, quando non ci occupiamo più dei nostri pensieri e passiamo alla lettura [...] Questa è la ragione perché colui che legge molto e durante quasi tutto il giorno, e negli intervalli si riposa passando il tempo senza pensare, a poco a poco perde la capacità di pensare da sé, come l'individuo che va sempre a cavallo alla fine disimpara a camminare [...] a furia di leggere si sono istupiditi [...] paralizza lo spirito più del lavoro manuale continuo, dato che durante il lavoro manuale vi è modo di abbandonarsi ai propri pensieri.

(Arthur Schopenhauer, Parerga e Paralipomena)

Le parole dei saggi sono come pungoli; come chiodi piantati, le raccolte di autori. Quanto a ciò che è in più di questo, figlio mio, bada bene: i libri si moltiplicano senza fine, ma il molto studio affatica il corpo.

(cfr. Qo 12, 11-12)

La maggior parte degli uomini non vuol nuotare prima di saper nuotare. Certo che non vogliono nuotare; sono nati per la terra, non per l'acqua. E naturalmente non vogliono pensare: infatti sono nati per la vita, non per il pensiero. Già, e chi pensa, chi concentra la vita nel pensiero può andare molto avanti, è vero, ma ha scambiato la terra con l'acqua e a un certo momento affogherà.

(Herman Hesse)

Gli esami:

Examinations are formidable even to the best prepared, for the greatest fool may ask more than the wisest man can answer.

(Ch. C. Colton, Lacon, I, 322)

Per chi leggerà o scriverà articoli scientifici:

Nello scrivere articoli pubblicati nelle riviste scientifiche siamo abituati a presentare il lavoro quanto più terminato possibile, nascondere tutte le strade tentate, non preoccuparsi dei vicoli ciechi per cui si è passati o descrivere come si era iniziato dall'idea errata, e così via. Insomma, non c'è alcun posto dove pubblicare in maniera degna cosa si è davvero fatto per arrivare a quei risultati.

(R. Feynman, discorso per il Premio Nobel, 1966)

Sulla necessità in qualche modo di “fidarsi”:

... il 98% di ciò che un genio conosce, egli in realtà lo crede. Non è una conoscenza acquisita in maniera indipendente e personale. La conoscenza umana è un’acquisizione che si rifà a secoli e secoli di storia, e se noi non volessimo accettare niente che non troviamo da noi stessi, allora torneremmo indietro all’era paleozoica. In quel periodo gli uomini scoprivano da se stessi tutto ciò che conoscevano.

(B. Lonergan, A second Collection: papers by Bernard J. F. Lonergan)

Sullo scopo del conoscere:

*Vi sono coloro che vogliono conoscere solo per conoscere:
e questa è curiosità;
vi sono coloro che vogliono conoscere solo per essere conosciuti:
e questa è vanità;
vi sono coloro che vogliono conoscere per vendere il loro sapere:
e questo è un guadagno ingiusto;
vi sono coloro che vogliono conoscere per esserne edificati:
e questa è la saggezza;
vi sono infine coloro che vogliono conoscere per edificare:
e solo questa è la carità.*

Bernardo da Chiaravalle